FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound

AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06 (47.4

TOM. XVIII.

pro Anno MDCCLXXIII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXIV.

4/19/1916 / collat

16. 70283 april 28

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XVIII.

MATHEMATICA.

I.

Theoria Elementaris ſerierum, ex ſinibus atque coſinibus arcuum arithmetice progredientium diuerſimode compoſitarum, dilucidata.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 3.

Duas de conſimili argumento diſſertationes, ab Ill. *Bernoullio* ad Academiam transmiſſas, praecedentibus Commentariorum noſtrorum tomis inſeruimus, in quarum vna ſerierum quarundam incongrue verarum iuſta interpretatio atque vſus, in altera vero ſerierum infinitarum, quas arcuum arithmetice progredientium ſinus vel coſinus formant, ſummatio traditur. Editis ab eo inde tempore Commentariis Academiae Pariſinae ad annum 1769. nouam de eodem hoc argumento meditandi anſam ex eo adeptus eſt Ill. Auctor, quod in iſto volumine egregiam methodum a Dn. Abbate

Boſſut expoſitam cerneret, determinandi pro dato quocunque terminorum numero ſummas ſerierum, quas angulorum arithmetice progredientium ſinus coſinusue eorumue poteſtates ſimiles exhibent. Primum problema a Cel. *Boſſut* reſolutum conſiſtit in ſummatione huius ſeriei

$$\text{ſin.}\, q + \text{ſin.}\, 2q + \text{ſin.}\, 3q + \text{ſin.}\, 4q + \ldots\ldots \text{ſin.}\, nq$$

cuius inuenit ſummam $S = \frac{\text{ſin.}\, q\,(1 + \text{coſ.}\, q - \text{coſ.}\, nq - \text{coſ.}\,(n+1)q)}{1 - \text{coſ.}\, 2q}$

vbi numerus integer n determinatum exprimit terminorum ſummandorum numerum. Hanc eandem ſeriem Ill. *Bernoullius* in priori ſuo ſchediaſmate eſt contemplatus, ſed ita, vt *in infinitum continuata* ſupponeretur, qui quippe ſolus caſus ambiguitate a nemine adhuc explicata intricabatur; oſtenditque eſſe

$$\text{ſin.}\, q + \text{ſin.}\, 2q + \text{ſin.}\, 3q + \text{ſin.}\, 4q + \ldots \text{ſin.}\, \infty q = \frac{\frac{1}{2}\text{ſin.}\, q}{\text{ſin.vers.}\, q}$$

quae ſumma ex formula Boſſutiana colligitur eſſe

$$\frac{\text{ſin.}\, q\,(1 + \text{coſ.}\, q - \text{coſ.}\, \infty q - \text{coſ.}\,(\infty + 1)q)}{1 - \text{coſ.}\, 2q};$$

hanc vero expreſſionem prima fronte aenigma videri inſolubile, nemo inficiabitur, cum, quid pro coſ. ∞q et coſ. $(\infty + 1)q$ ſit intelligendum, plane non pateat; dum contra formula Bernoulliana ab omni aequiuocatione prorſus eſt libera. Quo vero formulae vtriusque veritas et conſenſus pateſceret, Ill. Auctor ex principiis metaphyſicis hic oſtendit, ambos iſtos terminos combinatos in formula Boſſutiana, nempe coſ. ∞q + coſ. $(\infty + 1)q$, nihilo aequari;

quari; quo demonſtrato, aequatisque duabus iſtis ſummae eiusdem expreſſionibus, requiritur inſuper, vt ſit

$$\frac{1}{2\,\text{ſin. vers.}\,q} = \frac{1+\text{coſ.}\,q}{1-\text{coſ.}\,2\,q}$$

quod ſtatim adparet, cum ſit

$$1-\text{coſ.}\,2\,q = 2\,\text{ſin.}\,q^2 \quad \text{et} \quad \text{ſin. verſ.}\,q = 1-\text{coſ.}\,q;$$

ſic enim habebitur

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\text{coſ.}\,q^2}{2\,\text{ſin.}\,q^2} = \frac{\text{ſin.}\,q^2}{2\,\text{ſin.}\,q^2} \text{ aut denique } 1 = 1.$$

Seriei coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatae ſummam noua et eleganti methodo Cel. *Boſſut* indagauit; reperitque eſſe

$$\text{coſ.}\,q + \text{coſ.}\,2\,q + \text{coſ.}\,3\,q + \text{coſ.}\,4\,q + \ldots\, \text{coſ.}\,n\,q = \frac{\text{coſ.}\,q\,(\text{ſin.}\,n\,q + \text{ſin.}\,(n+1)\,q - \text{ſin.}\,q)}{\text{ſin.}\,2\,q}$$

vbi quidem notiſſimum eſt, ſi ſit $n = \infty$, hanc ſummam fore $= -\frac{1}{2}$. Docet itaque Ill. *Bernoullius*, etiam hoc caſu pariter fore

$$\text{ſin.}\,\infty\,q + \text{ſin.}\,(\infty+1)\,q = 0;$$

quo ſubſtituto iſta formula abit in hanc

$$\frac{-\text{coſ.}\,q\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.}\,2\,q} = -\frac{1}{2} \text{ ob ſin.}\,q\,\text{coſ.}\,q = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\,q.$$

Eodem modo etiam reliquae formulae ſummatoriae a Cel. *Boſſut* ad datum quemcunque terminorum ſummandorum numerum exhibitae caſui, quo ſeries ſupponuntur in infinitum progredi, poſſunt adcommodari; vnde principii, quo Illuſtr. Auctor vtitur, metaphyſici veritas et vſus abunde colligitur, praeſertim cum hae meditationes Cel. *Boſ-*

ſutii

ſutii commodam Ill. Auctori occaſionem praebuerint, quid de ipſo termino infinitesimo ſtatuendum ſit, vberius explicandi, quo demum facto formulas Boſſutianas a finito perfecte determinato ad infinitum quodammodo indeterminatum extendere licet. Theoria haec Ill. *Bernoulli* cum duobus innitatur principiis; primo, quod propoſita ſeries infinita compoſita ſit ex periodis, quae perfecte ſine fine recurrunt eaedem; ſecundo, quod ſumma omnium terminorum in vna eademque periodo contentorum aequetur nihilo; de vtroque hoc principio complures obſeruationes ad rem illuſtrandam perutiles in hac diſſertatione ſuperadduntur.

II.

Summatio progreſſionum

$$\text{ſin.}\, \phi^{\lambda} + \text{ſin.}\, 2\,\phi^{\lambda} + \text{ſin.}\, 3\,\phi^{\lambda} \ldots\ldots + \text{ſin.}\, n\,\phi^{\lambda}$$
$$\text{coſ.}\, \phi^{\lambda} + \text{coſ.}\, 2\,\phi^{\lambda} + \text{coſ.}\, 3\,\phi^{\lambda} \ldots\ldots + \text{coſ.}\, n\,\phi^{\lambda}.$$

Auctore L. Eulero pag. 24.

Ill. *Bernoullii* praecedens diſſertatio anſam praebuit Ill. *Eulero*, eiusmodi progreſſionum, quae ex ſinibus vel coſinibus arcuum arithmetice progredientium eorumue ſimilibus poteſtatibus componuntur, naturam et ſummationem penitius inueſtigandi. Principio Ill. Auctnr iſtas progreſſiones ad ſeries geometricas reuocare docet; poſito enim

coſ-

$$\operatorname{coſ}.\Phi + \sqrt{-1}\operatorname{ſin}.\Phi = p \text{ et } \operatorname{coſ}.\Phi - \sqrt{-1}\operatorname{ſin}.\Phi = q;$$

vt ſit

$$\operatorname{coſ}.n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2} \text{ et } \operatorname{ſin}.n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}};$$

tum vero etiam $pq = 1$; euidens eſt, eas reduci poſſe ad has duas geometricas

$$p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} \ldots + p^{n\alpha} \text{ et } q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} \ldots + q^{n\alpha}$$

vbi quidem ſumma prioris $= \frac{p^\alpha(1 - p^{n\alpha})}{1 - p^\alpha}$; poſterioris vero $= \frac{q^\alpha(1 - q^{n\alpha})}{1 - q^\alpha}$. His conſtitutis, ſi hae duae ſeries ad ſe inuicem addantur, habebitur, reſtitutis pro p et q valoribus, ſumma

$$= -1 + \frac{\operatorname{coſ}.n\alpha\Phi - \operatorname{coſ}.(n+1)\alpha\Phi}{1 - \operatorname{coſ}.\alpha\Phi};$$

ſi vero vna ſubtrahatur ab altera, prodit earundem differentia

$$= \frac{\operatorname{ſin}.\alpha\Phi + \operatorname{ſin}.n\alpha\Phi - \operatorname{ſin}.(n+1)\alpha\Phi}{1 - \operatorname{coſ}.\alpha\Phi}\sqrt{-1}.$$

Ex his formulis duabus omnes caſus propoſiti facili negotio deriuantur; id quod Ill. Auctor pro caſibus, vbi $\lambda = 1$; $\lambda = 2$; $\lambda = 3$; $\lambda = 4$ perſpicue docet. Praecipuus vero quaeſtionis nodus in eo verſatur, cuiusmodi prodituræ ſint ſummae, ſi iſtae ſeries in infinitum continuentur, ſiue ponatur $n = \infty$. Duos hic caſus diſtingui conuenit: ſi λ fuerit numerus par; nullum eſt dubium, iſtas ſummas fore infinite magnas; ſin vero λ fuerit numerus impar; tum Ill. *Eulero* nihil certi de his ſummis affirmari

 poſſe

poſſe videtur, quae vero per rationes metaphyſicas perquam ingenioſe ab Ill. *Bernoullio* aſſignantur, ita, vt iis in Analyſi plene aequieſcere queamus; accedit huc, quod iam pridem Ill. Auctor adnotauit, eiusmodi caſibus voci *ſummae* ſignificatum ad Analyſin magis adcommodatum eſſe tribuendum, quo admiſſo omnia circa eiusmodi ſummationes dubia ſponte euaneſcunt, vt ſcilicet vox *ſummae* formulam eam deſignet analyticam, ex cuius euolutione iſtae ſeries naſcuntur. Ita v. c. ſi ſit

$$s = \text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,2\,\Phi \ldots\ldots + \text{ſin.}\,n\,\Phi$$

colligitur $s = \frac{\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,n\,\Phi - \text{ſin.}\,(n+1)\,\Phi}{2\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$

vbi formulae ſin. $n\,\Phi$ et ſin. $(n+1)\,\Phi$ propter *vltimum* ſeriei terminum ingrediuntur, ſi igitur ſit $n = \infty$, ita, vt *vltimus* terminus ſit *nulius*, etiam iſtae formulae ſin. $n\,\Phi$ et ſin. $(n+1)\,\Phi$ ſponte excidunt; vnde fit $s = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{2\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$, ex cuius formulae euolutione ſeries propoſita reſultat.

Simili modo pro altera ſerie

$$t = \text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\Phi \ldots\ldots + \text{coſ.}\,n\,\Phi$$

inuenitur $t = -\frac{1}{2} + \frac{\text{coſ.}\,n\,\Phi - \text{coſ.}\,(n+1)\,\Phi}{2\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$

ſiue poſito $n = \infty$ ſimili ratiocinio colligitur $t = -\frac{1}{2}$; vt itaque praecedens ſummae notio etiam huic caſui queat adplicari, notandum eſt, valorem $-\frac{1}{2}$ natum eſſe ex hac formula $t = \frac{\text{coſ.}\,\Phi - 1}{2\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$, quem valorem aequalem eſſe ſeriei propoſitae, Ill. Auctor oſtendit. Adiungitur ſub finem diſſertationis ſupplementum de *ſummatione generali infinitarum aliarum progreſſionum*

num ad hoc genus referendarum, quod ſequens continet theorema: ſi huius progreſſionis

$$A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 \ldots + N z^n$$

cognita fuerit ſumma, tum ſemper etiam has progreſſiones ſummare licebit:

$$A x \sin.\Phi + B x^2 \sin.2\Phi + C x^3 \sin.3\Phi \ldots + N x^n \sin.n\Phi$$

et $A x \cos.\Phi + B x^2 \cos.2\Phi + C x^3 \cos.3\Phi \ldots + N x^n \cos.n\Phi$

id quod ipſis exemplis oſtenditur.

III.

Obſeruationes variae circa ſeries, ex ſinibus vel coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatas.

Auctore A. I. Lexell p. 37

Occaſione eorum, quae Illuſtr. *Bernoulli* de his ſeriebus in noſtris Commentariis docuit, Clar. huius diſſertationis Auctor earum contemplationem ſuſcepit, quam heic adumbrandam iudicauit. In hoc vero argumento ita verſatus eſt, vt primum quaereret ſummam binarum ſerierum

$$\sin.z + \sin.(z+v) + \sin.(z+2v) + \sin.(z+3v) \ldots + \sin(z+nv)$$

$$\cos.z + \cos(z+v) + \cos.(z+2v) + \cos.(z+3v) \ldots + \cos.(z+nv)$$

pro terminorum numero finito, facillima autem reductio, quae hunc in finem adhiberi poteſt, ea eſt

 qua

qua vtraque ſeries multiplicatur per $2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v$, hoc enim facto fiet ex priori

$2\,S.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v = \text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)$ et ex poſteriori ſerie

$2\,S.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v = -\text{ſin.}(z-\frac{1}{2}v) + \text{ſin.}(z+(n+\frac{1}{2})v)$.

Quod ſi nunc ponatur numerus terminorum infinitus, dubium eſſe poterit, quomodo ſumma ſeriei ſit exprimenda, quia nimirum membrum $\text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)$ varios immo nonnunquam infinitos valores recipere poteſt, nec proprie quidem loquendo dici poteſt, hunc terminum $\text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)$ euaneſcere. Si vero in ſerie propoſita ſinuum, ita aſſumtum fuerit v, vt ad circumferentiam circuli rationem habeat rationalem, tum in hac ſerie certae dabuntur periodi, poſt quas iidem termini denuo recurrunt, ſumma autem terminorum in ſingulis periodis, aequabitur nihilo. Hoc igitur caſu pro ſumma totius ſeriei etiam numero terminorum infinito compoſitae, recte habebitur medius valor inter ſummas, quae pro aliqua periodo locum habere poſſunt, hic autem medius valor erit $= \frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v}$, ideoque pro caſu $v = z$ fiet $= \frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}v$. Quum igitur hoc valeat pro quocunque numero terminorum periodi, valebit etiam ſi iſte numerus ponatur infinitus, ita vt in genere ſtatui queat, ſummam ſeriei ſupra propoſitae in infinitum continuatae eſſe $\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v}$.

Singularis tamen heic ſtatuenda eſt exceptio ſi fuerit vel $v = 0$, vel $v =$ multiplo cuidam circumfe-

rentiae

rentiae circuli, tum enim ſumma ſeriei fiet $= n$ ſin. z, hinc que pro numero infinito, infinita. Explicatis iis quae ad ſummationes ſerierum ſupra propoſitarum, pertinent, progreditur Auctor huius diſſertationis ad ſummationes ſerierum, quae formantur ex poteſtatibus quibuscunque ſinuum vel coſinuum pro arcubus arithmetice progredientibus, quod quidem vix vllum faceſſit negotium, quia nimirum cognitum eſt quamcunque poteſtatem ſinus vel coſinus alicuius arcus, per ſinus vel coſinus arcuum multipſorum exprimi poſſe. Inuentis autem his ſummis pro termino numerorum finito, etiam facile erit ſummas pro numero infinito inuenire, vbi quidem id notatu dignum occurrit quod ſummae quarumcunque poteſtatum imparium coſinuum eundem habeant valorem, quippe quae inueniuntur $= -\frac{1}{2}$. His meditationibus ſubiungit denique Cl. Auctor ſummationes aliarum quarundam ſerierum, quae ex prius propoſitis facile deriuantur.

IV.

Noua ſeries infinita maxime conuergens perimetrum Ellipſis exhibens.

Auctore L. Eulero pag. 71.

In Commentariis Academiae noſtrae, vti et in Actis Berolinenſibus, paſſim iam Ill. Auctor ſeries dedit infinitas, quibus ellipſis cuiuscunque perime-

rimeter exprimitur, tam concinnas et ſimplices, vt, dari alias adhuc commodiores, vix ſuſpicari licuerit. Haec tamen ſeries, quam Ill. Auctor in praeſenti diſſertatione proponit, ceteris concinnitate ſua anteferenda videtur; eſtque plane noua. Quadrantis elliptici ponantur ſemiaxes a et b; hisque parallelae coordinatae x et y; habebitur ex natura ellipſis $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; ex qua aequatione Ill. Auctor peringenioſe totius arcus ſeu quartae partis perimetri longitudinem determinat. Ponatur ſcilicet

$$x=a\sqrt{\frac{1+z}{2}} \text{ et } y=b\sqrt{\frac{1-z}{2}};$$

vnde

$$dx=\frac{a\,dz}{2\sqrt{2(1+z)}} \text{ et } dy=\frac{-b\,dz}{2\sqrt{2(1-z)}};$$

ex quo ſi arcus ponatur $=s$; habebitur

$$ds^2=dz^2\,\frac{a^2+b^2-(a^2-b^2)z}{8(1-z^2)}$$

hincque

$$s=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int dz\sqrt{\frac{a^2+b^2-(a^2-b^2)z}{1-z^2}}$$

ſi itaque hoc integrale ita ſumatur, vt poſito $x=0$ euaneſcat, et vsque ad terminum $x=a$ extendatur: obtinebitur quaeſitus arcus ellipticus. In huius itaque formulae differentialis euolutione Ill. Auctor verſatur ex eaque ſeriem hanc ſimplicem et maxime conuergentem elicit

$$s=\frac{c\pi}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{1.1}{4.4}n^2-\frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}n^4-\frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}\cdot\frac{7.9}{12.12}n^6 \text{ etc.}\right)$$

vbi $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$ et $n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Si ſit $a=b$; quadrans hic ellipticus in circularem abit et, ob $n=0$ et $c=a.\sqrt{2}$, prodit, vti quidem

dem notiſſimum eſt, $s = \frac{a\pi}{2}$. Si vero ponatur $b = 0$; curua abit in lineam rectam alteri ſemiaxi aequalem; ita autem eſt $n = 1$ et $c = a$; vnde ſequens reſultat aequatio:

$$a = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8} - \text{etc.}\right)$$

adeoque ſeriei infinitae

$$1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}\ \text{etc.}$$

quae quidem minime conuergit, adcurate aſſignari poteſt ſumma $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Hac occaſione oblata Ill. Auctor operae pretium cenſet, in ſummam huius ſeriei etiam a poſteriori inquirere; ad quod praeſtandum methodo ſua iam ſaepius explicata potiſſimum vtitur, dum nimirum quaeſtionem ad aequationem differentialem reuocat, cuius integrale per ipſam ſeriem propoſitam exprimatur.

V.

Demonſtrationes circa reſidua ex diviſione poteſtatum per numeros primos reſultantia.

Auctore L. Eulero pag. 85.

Continet haec diſſertatio varia Theoremata, in quibus plures nouae veritates ex principiis prorſus ſingularibus demonſtrantur, ad quas per methodos

dos adhuc vſitatas vix vllus patere aditus videtur. Placet iſtorum theorematum praecipua hic ante oculos ponere, quorum vberior euolutio in ipſa diſſertatione traditur. Primum theorema ita ſe habet: ſi P deſignet numerum primum, ſitque $x < P$; forma $x^n - 1$ non, niſi n modis, per P diuiſibilis reddi poteſt; vnde problema reſultat, quo pro omnibus exponentibus n numerus caſuum propriorum quaeritur, quibus formula $x^n - 1$ per P diuiſibilis reddi queat, alios pro x valores non admittendo, niſi qui diuiſore ſint minores. Haec etſi omni fere vſu videntur deſtituta; ideo tamen erant praemittenda, quod viam muniunt demonſtrationibus ſequentium theorematum; v. c. ſi diuiſor primus ſit $P = 2n + 1$ et a radix primitiua: tum progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. terminus a^n reſiduum praebet $2n$ ſeu -1. Porro: ſi diuiſor fuerit numerus quicunque primus P: tot dantur radices primitiuae, quot reperiuntur numeri ad $P - 1$ primi eoque minores, quandoquidem tantum radices diuiſore minores conſiderantur. Elegantia inprimis ſunt ſequentia: Propoſito numero primo formae $4n + 1$, ſemper ſumma duorum quadratorum ad eum primorum exhiberi poteſt, quae ſit per eum diuiſibilis, atque alterum quidem quadratum pro lubitu accipere licet. Nulla vero ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum per vllum numerum primum formae $4n - 1$ diuiſibilis exiſtit. Hiſce expeditis Ill. Auctor etiam ad poteſtates cubicas progreditur, atque ſi omnes numeri cubici $1, 2^3$;

$3^3; 4^3$

3^{λ}; 4^{λ} etc. per numerum quemcunque primum P diuidantur: reſiduorum inde naſcentium indolem inveſtigat; et hoc ipſum problema etiam pro poteſtatibus quartis reſoluit; tandem in fine diſſertationis ſequens ſubiungitur theorema: ſi omnium numerorum poteſtates exponentis λ, ſcilicet 1, 2^{λ}; 3^{λ}; 4^{λ}; 5^{λ} etc. per numerum primum formae $\lambda n + 1$ diuidantur; multitudo reſiduorum diuerſorum erit n ideoque multitudo non-reſiduorum $= (\lambda - 1) n$.

VI.

Noua ratio quantitates irrationales proxime exprimendi.

Auctore L. Eulero pag. 136.

Notiſſimum eſt, omnem quantitatem irrationalem ſimplicem ad hanc formam $(1 + x)^n$ reduci poſſe. Sit enim N numerus quicunque ad poteſtatem exponentis fracti $\frac{\mu}{\nu} = n$ eleuandus; ei ſemper hanc formam tribuere licebit $N = a^{\nu} + b$; vnde fit $N^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\mu} \left(1 + \frac{b}{a^{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$; ſicque ſola expreſſio $\left(1 + \frac{b}{a^{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ irrationalitatem continet, quae, ſi ponatur $\frac{b}{a^{\nu}} = x$, ad formam $(1 + x)^n$ reducitur, quae more conſueto per euolutionem binomii Newtonianam in ſeriem

 infini-

infinitam conuertitur; idque duplici modo, primum ſcilicet directe

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}.x + \tfrac{n.n-1}{1.2}.x^2 + \text{etc.}$$

ſecundo autem ob

$$(1+x)^n = \frac{1}{(1+x)^{-n}}$$

erit quoque

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - n.x + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 - \text{etc.}},$$

ex quarum duarum expreſſionum multiplicatione poſito n pro $2n$ deriuatur tertia:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n}{2}.x + \frac{n.n-2}{2.4}x^2 + \text{etc.}}{1 - \frac{n}{2}.x + \frac{n.n+1}{2.4}x^2 - \text{etc.}}$$

cui quidem poſtremae formulae infinite multae aliae ſimiles, formulam $(1+x)^n$ exprimentes poſſunt exhiberi.

Fingatur enim $(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + etc.}$,

atque euidens eſt, ſi vel numerator vel denominator pro lubitu aſſumatur, alterius coëfficientes inde determinari. Quanquam vero problema hoc intuitu eſt indeterminatum atque infinitas admittit ſolutiones: ad id tamen inprimis eſt attendendum, vt vtraque ſeries reddatur quam maxime conuergens. Id vt obtineatur, denominatori finitum quendam terminorum numerum tribuere licebit atque ita quidem, vt inde vnus pluresue numeratoris termini ordine ſeſe excipientes plane euaneſcant. Hoc igitur negotium

tium Ill. Auctor in hac diſſertatione vberius pertractat, atque in tribus primis problematibus formulam propoſitam $(1+x)^n$ in ſeries maxime conuergentes ita reſoluere docet, vt denominator ſit vel binomium $1-\alpha x$ vel trinomium $1-\alpha x+\beta x^2$ vel quadrinomium $1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3$; ex quorum caſuum particularium conſideratione facile deriuare licet ſolutionem generalem, ſi ſcilicet pro denominatore aſſumatur multinomium quodcunque. Reſultant ex hac inueſtigatione formulae, notatu quam maxime dignae, quarum ope Ill. Auctor radicem quadraticam ex quouis numero propoſito non quadrato ſimilique modo radicem cubicam ex quouis numero non cubo proxime aſſignare et pro extractione radicum altiorum poteſtatum analogas formulas quantumuis exactas formare docet. Immo vlterius quoque earundem vſus patet, ſiquidem non logarithmum modo numeri cuiuscunque propoſiti, ſed quantitatem quoque exponentialem e^x harum formularum ope proxime exprimere licet, deſignante e iſtum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur. Quod vt perſpicuum fiat, ſufficit perpendiſſe, quantitatis $1+x$ logarithmum hyperbolicum eſſe $\frac{(1+x)^n-1}{n}$ exiſtente $n=0$; et $e^x=(1+\frac{x}{n})^n$, ſi pro n ſumatur numerus infinitus.

VII.

Solutio problematis de inueniendo triangulo, in quo rectae ex ſingulis angulis latera oppoſita biſecantes ſint rationales.

Auctore L. Eulero pag. 171.

Problematis huius euolutio ad reſolutionem trium ſequentium formularum reducitur: $2b^2+2c^2-a^2=f^2$; $2c^2+2a^2-b^2=g^2$ et $2a^2+2b^2-c^2=h^2$, ſi ſcilicet $2a$, $2b$ et $2c$ ſint latera trianguli a rectis f, g et h biſecta. Ex hiſce tribus formulis ternae aliae reſultant: $2g^2+2h^2-f^2=9.a^2$; $2h^2+2f^2-g^2=9.b^2$ et $2f^2+2g^2-h^2=9.c^2$; ex quarum cum prioribus ſimilitudine concludit Illuſtr. Auctor, pro lateribus $2f$, $2g$ et $2h$ fore rectas biſecantes $3a$, $3b$ et $3c$ adeoque pro f, g et h iſtas fore $\frac{3}{2}a$; $\frac{3}{2}b$ et $\frac{3}{2}c$ vnde colligitur, inuento vno huiusmodi triangulo, ſi rectae biſecantes pro lateribus noui trianguli accipiantur, id eadem praeditum fore proprietate. His praemiſſis, Ill. Auctor ipſum problema aggreditur, cuius reſolutio cum meris abſoluatur artificiis analyticis; nihil hic in epitome de ea adferre licet, niſi quod pendeat ab huiusmodi forma:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

ad

ad quadratum reuocanda, pro cuius reſolutione naturalis et ſimplex methodus adhuc deſideratur.

VIII.

Reſolutio aequationis

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

per numeros tam rationales, quam integros.

Auctore L. Eulero pag. 185.

Forma huius aequationis tam late patet, vt inſignem Analyſeos Diophanteae partem complecti cenſenda ſit. Prouti coëfficientibus A, B, C etc. varii diuerſae indolis valores tribuuntur; plures quoque inde reſultant caſus, diuerſis vulgo methodis pertractati. In hac diſſertatione Ill. Auctor ſingularem explicat modum, iſtam aequationem reſoluendi, atque ita quidem, vt ſolutio non ad rationales modo, ſed integros quoque numeros poſſit adplicari; et ab omni radicis extractione ſit libera. Caſus dantur haud pauci, quibus haec aequatio fit impoſſibilis; vnde Ill. Auctor vnicum ſaltem caſum, quo illi ſatisfiat, ſupponit eſſe cognitum, ex quo qua ratione alii ſiue numero finiti ſiue infiniti erui queant, deinceps explicat. Peculiari autem iudicio opus eſt, vtrum aequatio propoſita ſolutionem ad-

mittat in numeris integris, nec ne? conſideretur hunc in finem formula $B^2 - AC$, quae ſi fuerit numerus poſitiuus non quadratus, ſemper impetrari poſſunt bini numeri integri aequationi ſatisfacientes, idque adeo infinitis modis. Duplicem Ill. Auctor reſolutionem tradit aequationis propoſitae, quarum poſterior ideo potiſſimum peculiari attentione digna eſt, quod ex doctrina irrationalium eſt petita, quae quomodo in Analyſi indeterminata ſeu Diophantea in vſum poſſit vocari, minime obuium eſt. Eximiam vero eius in eiusmodi problematibus adplicationem iam pridem vberius docuit Ill. Auctor in Algebra ſua rhutenice et germanice apud nos typis impreſſa. Caſibus particularibus aequationis datae euoluendis Ill. Auctor non cenſuit eſſe immorandum, vtpote qui iam paſſim ſatis ſuperque ſunt pertractati.

IX.

Inſignes proprietates ſerierum ſub hoc termino generali contentarum:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n.$$

Auctore L. Eulero pag. 198.

Series ex hac formula reſultantes ad genus recurrentium ſecundi ordinis pertinent, ſiquidem quilibet terminus per binos praecedentes determinatur.

Nouas

Nouas quasdam et inſignes earundem proprietates Ill. Auctor hic explicat atque id potiſſimum dat operam, vt, dum alias eiusmodi inueſtigationes ad calculos perducunt intricatiſſimos, omnia hic ſuccincte et facile expediantur. Si in vtroque termino priores factores ponantur f et g; poſteriores v et u; formula propoſita ſtatim ita contrahetur, vt ſit $x = f.v^n + g.u^n$; et loco x ſcribit Ill. Auctor [n], quippe quo terminus deſignatur ex exponente n oriundus; ita, vt ipſa ſeries ſequentibus conſtet terminis

[0]; [1]; [2]; [3] etc.

Hiſce praenotatis principio Ill. Auctor legem inueſtigat, qua termini huius ſeriei immediate ſeſe inſequentes

[n]; [$n + 1$]; [$n + 2$] etc.

a ſe inuicem pendent; qua detecta pro terminis quoque non immediate, ſed per ſaltum ſeſe inſequentibus, veluti

[n]; [$n + \nu$]; [$n + 2\nu$] etc.

ſcalam relationis determinat; ita, vt hoc modo termini ab initio ſeriei quantumuis remoti ſatis expedite queant aſſignari, quorum determinatio, ſi ſeriem per ſingulos terminos actu continuare quis vellet, calculos requireret operoſiſſimos. Inuenta hac relatione, facile iam dato quocunque ſeriei termino [n] eius immediate ſequentem [$n + 1$], immo quoque terminum dato interuallo a dato termino remotum inuenire docet, vnde dato ſeriei termi-

termino quocunque [n] ex ſequentibus eum quoque definire licet, qui ab illo tantum diſtat, quantum ipſe ab initio, hoc eſt terminum [$2n$]; hisque alia analoga problemata plura in hac diſſertatione reſolvuntur.

X.

De reſolutione irrationalium per fractiones continuas, vbi ſimul noua quaedam ſingularis ſpecies minimi exponitur.

Auctore L. Eulero pag. 218.

Cohaeret diſſertationis huius argumentum cum reſolutione aequationis

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

quam Ill. Auctor in antecedentium diſſertationum vna pertractauit. Totum iſtud negotium eo redit, vt eiusmodi pro x et y inueſtigarentur valores in numeris integris, quibus formulae $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ minimus valor induceretur. Tres autem hic caſus occurrunt diſtinguendi; aut enim formae iſtius factores ſunt reales et diuerſi inter ſe, id eſt, $B^2 - AC$ poſitiuum; aut reales, ſed inter ſe aequales, quod fit, ſi $B^2 - AC = 0$; aut denique imaginarii, ſi $B^2 - AC$ fuerit negatiuum. Secundus et tertius caſus ab Ill. Auctore eſt praetermiſſus, quandoquidem

dem quaeſtio minimi in vtroque nulla plane difficultate laborat. Solus ergo relinquitur ille caſus, vbi factores ſunt reales et inter ſe diuerſi; vbi quidem haec ſuperaddenda eſt conditio, vt $B^2 - AC$ non ſit numerus quadratus; quod ſi acciderit, factores euaderent rationales, et nulla de minimo quaeſtio locum haberet, cum formulae propoſitae valor adeo ad nihilum poſſet redigi. Numerus itaque $B^2 - AC$ debet eſſe formae $m x^2 - n.y^2$, denotantibus litteris m et n numeros integros; atque hic iam quaeſtio notatu digna occurrit, quinam valores integri litteris x et y ſint tribuendi, vt ipſa formula minimum omnium adipiſcatur valorem. Notum eſt, ſi vel m vel n ponatur $= 1$, iſtam formulam adeo ad vnitatem vsque poſſe deprimi; ex theoremate enim celebri Pelliano conſtat, ſemper effici poſſe $x^2 - ny^2 = 1$; dummodo n non fuerit numerus quadratus. Dantur inſuper praeter hos duos et alii caſus, quibus formulae propoſitae valor in vnitatem abit; veluti $3x^2 - 2y^2 = 1$, poſitis $x = 1$ et $y = 1$ vti et $9x^2 - 5y^2 = 1$, poſito $x = 3$ et $y = 4$. Euenire autem vtique poteſt, vt formulae valor minimus vnitatem ſuperet; ac tum difficillima plerumque eſt determinatio minimi quaeſiti, veluti fit in formula $13.x^2 - 7.y^2$ quae deprimitur ad binarium, poſito $x = 15$ et $y = 11$; quod quidem de minimo iudicium calculos eo operoſiores poſtulat, quo maiores fuerint numeri m et n. Ex hactenus allatis abunde perſpicitur, expoſitionem methodi, in his caſibus minimum inueſtigandi, haud exiguum

 Analyſi

Analyſi incrementum adferre; atque id ipſum eſt, in quo explicando Ill. Auctor hic verſatur.

Ante quam ipſius methodi explicationem traderet, e re fore cenſuit, oſtendere, ſemper infinitis modis idem minimum poſſe obtineri; ipſa vero methodus ex eo eſt petita, quod caſu minimi valor formulae $m x^2 - n y^2$ propius ad nihilum, quam vllo alio, accedat; quocirca negotium eo iam eſt perductum, vt valores quaerantur, quibus proxime fiat $\frac{x}{y} = V \frac{n}{m}$ ſiue vt quaerantur fractiones rationales $\frac{x}{y}$, quae tam prope aequentur formae irrationali $V \frac{n}{m}$, quam quidem fieri poteſt, non maioribus pro x et y numeris adhibendis. Hunc in finem Ill. Auctor formulam $\frac{\surd n m}{m}$ in fractiones continuas conuertit; omnes enim fractiones hoc modo formatae hac gaudent proprietate, vt quaelibet valorem $\frac{\surd m n}{m}$ propius exhauriat, quam vllo alio modo fieri poſſet numeris non maioribus adhibendis, vbi quidem notum eſt, inter has fractiones eas quam maxime adpropinquare, quae maximos indices habent. Ill. Auctor hic methodum explicat, qua operationes, quibus iſti quoti continui reperiuntur, haud mediocriter contrahi poſſunt, et quam exemplo dilucidat. His explicatis ad ipſum problema progreditur et primo quidem ſi formula $A x^2 - 2 B x y + C y^2$ caſu $x = a$ et $y = b$ praebeat valorem c, infinitos alios valores pro x et y ſubſtituendos inueſtigare docet, qui eundem formulae valorem c ſint praebiturae; et tum porro

porro, quod erat principale, in eos inquirit valores, quibus ipſa formula euadat minimum; quam autem facilis et concinna ſit Ill. Auctoris regula, ex ſubiunctis exemplis abunde perſpicitur, quae deſumuntur a formulis ſequentibus:

$5x^2-6xy-7y^2$; $7x^2-20xy+14y^2$; $25x^2-70xy+46y^2$.

Regula quoque propoſita feliciſſime adhiberi poteſt in ſoluendo celebri illo problemate Pelliano, in quo notum eſt, quaeri duos numeros x et y tales, vt ſit $y = \sqrt{(kx^2+1)}$; tum enim oportet vtique, vt ſit proxime $\frac{y}{x} = \sqrt{k}$.

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

Noua Determinatio Centri oſcillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili ſuſpenſis, eiusque a regula communi diſcrepantia.

Auctore Daniele Bernoulli p. 245.

Eos, qui in diſquiſitionibus phyſico - mechanicis verſati ſunt, haud latent multifariae et ſubtiles cautelae, quas ſibi praeſcribunt philoſophi, dum experimentorum ope longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecunda vibrantis in diuerſis terrae locis inueſtigant. Recenſet eas Ill. *Bernoullius* in initio huius diſſertationis atque ſuam cuique acuminis et in experimentando ſcrupuloſitatis laudem ſaluam relinquit. Vnum eſt, quod Ill. Viro in his operationibus ſcrupulum mouet. Scilicet ſolent phyſici in pendulo, quo vtuntur ad experimentandum, inquirere in centrum oſcillationis atque ad hoc determinandum regulam ſequuntur communem a magno Hugenio primum prolatam tumque diſtantiam inter hoc centrum oſcillationis et punctum ſuſpenſionis pro vera aſſumunt longitudine penduli ſimplicis iſochroni. In huius operationis examine conſi-

conſiſtit praeſentis diſſertationis argumentum. In theoria oſcillationum Hugeniana ſyſtemata oſcillantia ſupponuntur rigida; quo fit, vt omnes totius ſyſtematis partes communi motu angulari circa rotationis axem ferantur. In experimentis vero, de quibus modo diximus, fila adhibentur flexibilia; ita, vt filum cum axe corporis inter oſcillandum angulum efformet certe lege variabilem; id quod ingens harum oſcillationum ab Hugenianis diſcrimen non producere non poteſt. Etſi itaque pro hypotheſi rigiditatis in toto ſyſtemate oſcillante negotium facile expeditur: haud tamen exigua problemati difficultas inducitur, ſi filum corpus ſuſpendens in puncto ſuſpenſionis aliquam inflexionem pati poſſe ſupponitur. Ill. Auctor itaque huius caſus reſolutionem ſuſcipit, ex qua ipſa pateſcit, oſcillationes pro filo flexili toto coelo differre ab oſcillationibus communiter aſſumtis pro filo rigido. Quantitatis radicalis ſolutionem ingredientis ſignum ambiguum duplex innuit oſcillationum genus, quorum alterum confitente Ill. Auctore, parum differt duratione ſua ab oſcillationibus Hugenianis; quo ſine dubio factum eſt, vt nemo adhuc diuerſitatem fuerit ſuſpicatus. Vt itaque haec omnia penitus excutiantur, Ill. Auctor ex inſtituto ſuo vtrumque id genus examini ſubiicit et primo quidem de oſcillationibus principalibus tardioribus, et deinceps de oſcillationibus acceſſoriis celerioribus ac tandem de oſcillationibus vtriusque generis coëxiſtentibus agit; quae vero omnia cum ad figuras ipſas multum referantur: cu-

 pidos

pidos profundae huius diſquiſitionis lectores ad ipſam diſſertationem Ill. Viri ablegamus.

II.

Determinatio motus oſcillatorii in praecedente diſſertatione pertractati, ex primis mechanicae principiis petita.

Auctore L. Eulero pag. 268.

Argumenti in ſuperiore diſſertatione ab Ill. *Bernoullio* tractati reſolutionem Ill. Auctor hic pariter ſuſcipit, eamque a primis inde mechanicae legibus repetit; vbi quidem ambae ſolutiones, ex diverſiſſimis licet principiis deriuatae, in fine tamen perfecto inter ſe inuicem conſenſu conſpirare deprehenduntur. Principio Ill. Auctor vires inueſtigat, corpus, de cuius motu oſcillatorio quaeſtio inſtituitur, ſollicitantes; quarum vna eſt vis grauitatis ponderi corporis aequalis, et in centro grauitatis adplicata; altera autem in puncto ſuſpenſionis et aequalis tenſioni ipſius fili. In ipſo autem corpore duplex motus eſt conſiderandus; alter *progreſſiuus*, quo fertur centrum grauitatis ipſum; alter *gyratorius* qui fit circa centrum grauitatis. His explicatis Ill. Auctor vtrumque hunc motum per prima mechanicae principia determinat; atque hoc modo tres aequa-

aequationes differentio - differentiales adipiſcitur, quae omnia determinant, quae ad motus cognitionem, vtcunque etiam is fuerit irregularis, deſiderari posſunt, ſiquidem iſtae formulae ita ſunt comparatae, vt tempus in minutis ſecundis exprimant, indeque ad quoduis tempus in minutis ſecundis expreſſum ſtatum ipſum ipſius corporis definiant. Hiſce aequationibus differentialibus ſecundi ordinis generatim euolvendis Ill. Auctor hic non immoratur; cum enim tantum de oſcillationibus quam minimis in diſſertatione Ill. *Bernoullii* ſermo fuerit, anguli iſtas aequationes ingredientes ſemper ſpectari poſſunt tanquam infinite parui adeoque ſinus angulorum ipſis angulis, coſinus vero vnitati aequantur; quo compendio iſtae aequationes ad formas multo ſimpliciores reducuntur; ex quarum euolutione Ill. Auctor plenam problematis reſolutionem elicit. Inprimis vero in eo haud exiguum vtriusque methodi, Eulerianae et Bernoullianae, diſcrimen cernitur, quod quaeſtionem de oſcillationibus *finitis* methodo Bernoulliana ne tentare quidem liceat; cum prima motus principia Ill. *Eulero* iam initio huius diſquiſitionis tres ſuppeditauerint aequationes, quibus plena huius quaeſtionis reſolutio continetur; quarum euolutio ſi minus ſuccedat, id Analyſeos, non mechanicae, defectibus erit tribuendum. Quanquam igitur plena huius problematis ſolutio adhuc deſideratur: examinare tamen licuit Ill. Auctori, quantum minimae huius generis oſcillationes a motu pendulorum ſimplicium diſcrepare poſſint; quod diſcrimen etiam in prae-

praecedente diſſertatione fuerat exploratum; ex his itaque calculis colligi poteſt, oſcillationes minimas penduli flexilis tam parum ab oſcillationibus eiusdem penduli, ſi foret rigidum, differre poſſe, vt tempore 1028 oſcillationum vnica tantum oſcillatione aberret; vnde porro perſpicitur, in aeſtimatione initii ſiue finis cuiusque oſcillationis errari poſſe parte circiter ſeptuageſima vnius minuti ſecundi; quare cum huiusmodi tantilli errores ne percipi quidem queant, ob hanc rationem ne minima quidem motus oſcillatorii perturbatio erit pertimeſcenda, idque eo minus, ſi, vti in eiusmodi experimentis fieri aſſolet, fili longitudo ad magnitudinem globi rationem notabilem v. c. 3 : 1 teneat.

III.

De preſſione ponderis in planum, cui incumbit.

Auctore L. Eulero pag. 289.

Argumentum, quod Ill. Auctor in hac diſſertatione pertractat, etſi iam in elementis phyſico-mathematicis paſſim occurrere videtur; tantum tamen abeſt, vt obuium et ab omni difficultate liberum ſit, vt potius plena huius quaeſtionis reſolutio omni Geometrarum attentione ſit digniſſima; in elementis ſcilicet de tota tantum preſſione, quam planum

planum a pondere incumbente ſuſtinet, agitur; intacta vero relinquitur quaeſtio, quantis viribus ſingula plani puncta vrgeantur; atque in illo quidem caſu notum eſt, preſſionem, ſi planum fuerit horizontale, ipſi ponderi eſſe aequalem; ſin vero planum ad horizontem inclinetur, tum preſſionem in ratione ſinus totius ad coſinum inclinationis eſſe minuendam; vtroque vero caſu preſſionis directionem ad planum eſſe normalem et per centrum grauitatis corporis tranſire. Ill. Auctor in hac diſſertatione orditur a caſu ſimpliciſſimo, quo pondus ternis pedibus plano inſiſtit, quem ſatis concinne expedire licet; ſi vero quatuor ſint pedes, quibus pondus plano inſiſtit; quaeſtio iam euadit maxime ardua; immo prorſus lubrica et incerta; quae difficultas augetur, ſi maior ſtatuatur pedum numerus; ſtatim enim ac iſti pedes non ſunt exactiſſime inter ſe aequales, manifeſtum eſt, eos, qui ſunt ceteris breviores, eſſe ſuperfluos; vti et, ſi corpus baſi quadam continua incumbat plano, et leuiſſimae promineant aſperitates, corpus plerumque in tribus tantum punctis ſuſtentari facile perſpicitur. Haec igitur perfectiſſima pedum aequalitas ne faceſſat negotium, Ill. Auctor planum ſupponit non ita durum, ſed panno quaſi obductum, vt pedes ponderis ipſi ſe immergere queant et impreſſionem aliquam efficere proportionalem vi, qua ſinguli ſolo innituntur. Quo tanquam principio conceſſo, quemadmodum pro omnibus caſibus preſſionem in ſingulis baſis punctis definire oporteat, Ill. Auctor in hac diſſerta-

 tione

tione exponit. Solutio generalis ad formulas deducit duplicatis integralibus intricatas; qualibus vero integrationibus tum tantum opus eſt, quando corpus baſin habet per ſpatium aliquod continuum extenſam; quo quidem caſu ſaepenumero calculi ob baſin figurae irregularem euadere poſſunt inextricabiles; quando autem corpus aliquot pedibus plano inſiſtit, plane nulla integratione opus eſt, dum formulae ad terminos ſingulorum pedum, tanquam ad totidem puncta, ſunt adcommodandae. Hanc ob cauſſam hic caſus poſterior primo reſoluitur atque preſſiones definiuntur in ſingulis plani punctis, ſi pondus ipſi inſiſtat in tribus, quatuor vel octo punctis. His euolutis Auctor ad caſus progreditur, vbi pondus plano incumbit baſi per ſpatium aliquod continuum extenſa; ante vero, quam hanc inueſtigationem ſuſcipit, caſus quaſi intermedios examinat, quibus corpus deorſum deſinit in limbum quempiam linearem ſiue rectilineum ſiue curuilineum; veluti ſi hic limbus fuerit perimeter trianguli vel parallelogrammi rectanguli vel circuli; et tum demum eos contemplatur caſus, quibus iſta baſis duas habet dimenſiones, veluti ſi fuerit triangulum vel parallelogrammum vel circulus; atque ex tot caſibus ſpecialibus hactenus euolutis ſolutionem maxime generalem elicit, qua, qualemcunque figuram habeat baſis ponderis prementis, preſſiones in ſingulis plani punctis definiuntur.

IV.

De Harmoniae veris principiis per ſpeculum muſicum repraeſentatis.

Auctore L. Eulero pag. 330.

Vniuerſa muſica quatuor conſonantiis innititur; *Vniſono*, *Octauae*, *Quintae*, et *Tertiae maiori*; quibus conſuetudo recentiorum nouam, *Septimae* titulo inſignitam addidiſſe videtur. Has quinque conſonantias, tanquam totidem vniuerſae harmoniae columnas, ad examen exactius, quam communiter fieri ſolet, reuocat Ill. Auctor huius diſſertationis. Vniſonus conſtat perfecta duorum pluriumue tonorum muſicorum aequalitate, qui ſcilicet vno minuto ſecundo eundem vibrationum numerum edunt; dum contra, qui eodem tempore vibrationes peragunt frequentiores, ſoni vocantur aliis acutiores; qui vero pauciores, ſoni aliis grauiores adpellantur. Vniſoni perceptio non iucunda ſolum auditui eſt, ſed ita quoque nobis a natura videtur ingenita, vt eum et agnoſcere et efficere facillime queamus. Numeri vibrationum a ſonis interuallo octauae diſtantibus editarum inter ſe rationem duplam tenent, ita, vt, dum grauior centum, acutior ducentas vibrationes peragat; quae ratio cum ab intellectu facillime percipiatur, auditum inſigni ſuauitate permulcet. Ratio inter numeros vibrationum eodem

 tem-

tempore editarum tripla tertiam conſonantiam principalem ſeu *Quintam* progenerat; quae, cum ratio 1 : 3 poſt duplam facillime percipiatur, etiam poſt *Octauam* eſt ſuauiſſima. *Tertia* denique *maior* continetur ratione minus ſimplici 4 : 5 et vltimo loco conſonantia a recentioribus adoptata ſeu *Septima* ratione 4 : 7. His conſtitutis Auctor examinat, cuiusmodi ſonos in inſtrumenta muſica recipere conveniat, ſiquidem ſoni diuerſi, quos Muſica, ars variationi amica, poſtulat, non niſi per vera harmoniae principia ſunt definiendi, quae harmonia in perceptione conſonantiarum principalium, de quibus modo diximus, eſt quaerenda. Atque hanc ob cauſſam a quolibet ſono ad quemlibet alium in muſica tranſilire non licet, ſed ad eos tantum, qui a priori remoti ſunt vel Octauae, vel Quintae vel Tertiae maioris interuallo; atque in his ſaltibus, quos ſimplices adpellare licet, prima vtique compoſitionis regula continetur; quando autem a quopiam ſono per aliud quodcunque interuallum fuerit vel aſcendendum vel deſcendendum; id ſimplici ſaltu exſequi non licet; vnde ſaltuum compoſitorum neceſſitas reſultat; quos tranſitus ab vno ſono ad alium III. Auctor compluribus exemplis egregie illuſtrat. Conſtruxit hunc in finem peculiarem ſchematiſmum quendam, quem adpellat *ſpeculum muſicum*, quoniam ſcilicet hoc ſpeculum inſpicienti ſtatim patet, quinam ſaltus a quolibet ſono ad quemlibet alium perducant ſimulque quot modis quilibet tranſitus inſtitui poſſit. Eius ope quaeſtio etiam haud parum in

muſicis

muſicis curioſa poteſt reſolui, quemadmodum ſcilicet omnes duodecim ſonos ſcalae muſicae percurri oporteat per ſaltus ſimplices, Quintam nempe et Tertiam maiorem, vt ſingulis ſemel tantum impulſis reuerſio fiat ad primum ſonum, a quo curſus fuit inceptus; porro pro quibusnam ſcalae ſonis trias detur harmonica, ſiue duri ſiue mollis modi; et quae ſunt egregia huius generis alia.

V.

Noua methodus motus planetarum principalium ad tabulas aſtronomicas reducendi.

Auctore L. Eulero pag. 354.

Methodus, qua Ill. Auctor in hac diſſertatione ad motus planetarum principalium tabulis aſtronomicis comprehendendos vtitur, ea ipſa eſt, quam principio cum praeclarum opus ſuum: Theoria motuum Lunae noua methodo pertractata; haud ita pridem elaboraret, vni motuum lunarium theoriae adplicauerat; quam cum cerneret ad reliquorum quoque planetarum motus feliciſſimo ſucceſſu adhiberi poſſe; omnem eius indolem et ſingularia calculi artificia in eius adplicatione adhibenda hic iam diſtincte ob oculos ponit. In eclipticae plano concipiatur linea recta e centro Solis ad punctum aequi-

noctii vernalis directa quae pro linea abſciſſarum aſſumatur; a planeta autem extra eclipticam verſante demittatur ad hanc perpendiculum, atque ab hoc in ipſo plano ordinata ad lineam abſciſſarum normalis; quo fit, vt locus planetae tribut coordinatis inter ſe normalibus definiatur. His conſtitutis, cum vis, qua planeta ad ſolem vrgetur, ſit cognita, ſtatim mechanicae principia tres ſuppeditant aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus, quicquid ad motus determinationem pertinet, contineri eſt cenſendum. Totum itaque negotium eo iam eſt deductum, vt ad quoduis tempus propoſitum harum trium coordinatarum quantitas ex iſtis aequationibus determinetur; his enim cognitis, facile perſpicitur, ſi ordinata illa modo memorata per ſuam abſciſſam diuidatur, prodire tangentem anguli verae planetae longitudini aequalis; ſi vero perpendiculum, a planeta ad planum eclipticae dimiſſum, per diſtantiam eius a ſole curtatam, quae pariter iſtis coordinatis exprimitur, diuidatur; haberi tangentem anguli latitudinem planetae definientis. Cum vero ſuperiorum aequationum reſolutio ad calculos quam maxime complicatos deduceret; huic difficultati Ill. Auctor egregio artificio medelam attulit, introducendis nouis coordinatis, commodioribus et in priorum locum ſubſtituendis; ducta ſcilicet concipiatur linea, quae cum aſſumta linea abſciſſarum angulum conſtitueret mediae longitudini planetae aequalem; et in hac ſumatur portio diſtantiae planetae mediae a ſole aequalis; vnde ſi ad hanc

hanc lineam agatur coordinata normalis; haec et reſpondens ipſi abſciſſa ſemper futura eſt ſatis exigua; ita, vt altiores vtriusque poteſtates in ſeriebus convergentibus tuto queant negligi. Primo itaque Ill. Auctor omnes terminos duas pluresue dimenſiones trium iſtarum coordinatarum continentes reiicit ſicque tres aequationes adipiſcitur multo concinniores, et facile integrabiles. Euoluto hoc caſu, quo termini duarum pluriumue dimenſionum negliguntur, ſi iis admiſſis inuenti valores pro binis coordinatis ſubſtituantur, et producta ſinuum et coſinuum ad ſimplices ſinus et coſinus reuocentur; ex vna aequationum propoſitarum ſeries naſcetur certorum coſinuum; ex altera ſeries ſimilis certorum ſinuum; propter quos terminos tam vnius, quam alterius coordinatae, expreſſio ſimiles ſinus et coſinus complectatur neceſſe eſt, qui quomodo facile definiri queant Ill. Auctor generatim oſtendit, et ſingulare pro hac reſolutione ac ingenioſum artificium, integrationis quaſi vicem ſuſtinens, explicat. His expeditis Ill. Auctor primo iſtum caſum contemplatur, quo planeta in ipſo plano eclipticae verſatur; vbi cum perpendiculum a planeta ad eclipticam ductum ſit nullum, duae tantum habentur coordinatae; ſit igitur prior

$$= k\mathfrak{P} + k^2\mathfrak{Q} + k^3\mathfrak{R} + k^4\mathfrak{S} \text{ etc. atque altera}$$

$$kP + k^2 Q + k^3 R + k^4 S \text{ etc.}$$

deſignante littera k excentricitatem orbitae, quae adcurate cognita ſupponitur; atque nunc Ill. Auctor

artifi-

artificii modo memorati ope ex aequationibus differentialibus valores litterarum 𝔓, 𝔔, ℜ etc. et P, Q, R etc. determinat; ita, vt, definitis hiſce valoribus, facile ſit tabulas conſtruere, quae ad quamvis planetae anomaliam mediam valores vtriusque coordinatae exhibeant; quibus cognitis ſtatim innoteſcit tangens aequationis centri planetae ad longitudinem mediam adplicandae; innoteſcit quoque ſtatim diſtantia planetae a ſole, ſi modo cognita fuerit media eius diſtantia. Hoc caſu abſoluto Auctor ad alium, quo planetae orbita parumper ad eclipticam inclinatur, progreditur eumque ſeorſim et omni cura euoluit; neque tamen, monente ipſo Auctore, erit conſultum, planetarum motus ſecundum hunc poſteriorem caſum exigere, praecipue ſi orbitae inclinatio haud fuerit ita parua; quandoquidem terminorum multitudo nimiis ambagibus calculum eſſet intricatura, quibus feliciſſime obuiam itur, ſi cuiusque planetae motum ſtatim ad ipſum planum, in quo mouetur, referatur, ſicque tota motus determinatio ad priorem caſum reducatur.

VI.

VI.

Diſquiſitio de lentibus obiectiuis triplicatis, quae vel nullam confuſionem pariant vel etiam datam confuſionem a reliquis lentibus ortam deſtruere valeant.

Auctore L. Eulero pag. 377.

Iam paſſim et inprimis in praeclaro de Dioptrica opere Ill. *Eulerus* id ipſum argumentum, cuius titulum praeſens prae ſe fert diſſertatio, ſummo ſtudio pertractauit; plerumque vero ternas lentes ſibi iungendas ita proxime inter ſe adaptari aſſumſit, vt earum diſtantia pro nulla in calculo haberi poſſet; id quod in ipſa praxi locum habere neutiquam poteſt, cum lentium centra ad minimum interuallo craſſitiei ipſarum remota inter ſe eſſe debeant. Tanti vero haec vna res in toto hoc negotio eſt momenti, vt ob hanc vnam praxis a thoria aberrationem lentes compoſitae, deſtruendae confuſioni deſtinatae, eam multo maiorem efficere poſſint, quam ſi earum loco lentes ſimplices adhiberentur. Id intuens Ill. Auctor hoc inprimis in hac diſquiſitione ſibi proponit, vt in determinatione huiusmodi lentium triplicatarum etiam craſſitiei vitri rationem habeat, iisque ſimul aperturam quam maximam conciliet,

 quan-

quandoquidem per hanc minima longitudo, quae in tubis dioptricis tantopere ſolet deſiderari, determinatur. Aſſumitur autem lens triplicata ita ex tribus aliis componi, vt prima et tertia ex vitro coronario, pro quo eſt ratio refractionis 153 ad 100, media vero ex vitro chryſtallino ab Anglis Flint-Glaſſ vocato, cui reſpondet ratio refractionis 158 ad 100 parari debeant; vbi diſtantia inter lentem primam et ſecundam vel ſecundam et tertiam vni parti duodecimae diſtantiae focalis lentis mediae, vtpote quae maximam aperturam habere cenſetur, aequalem ſtatuere oportebit. Hoc itaque conſtituto Ill. Auctor ſecundum praecepta dioptrica formulas, quae diſpoſitionem lentium in genere reſpiciunt, huic caſui accommodat et tum ad confuſionem a radiorum diuerſa refractione oriundam e medio tollendam progreditur; totamque calculi euolutionem ob oculos ponit. In fine diſſertationis ſubiungitur deſcriptio lentis obiectiuae triplicatae perfectiſſimae, quae etiam confuſionem a reliquis lentibus natam deſtruere valeat. Accedit appendix de lentibus duplicatis, quarum duae deſcribuntur ſpecies: vna, vbi prior lens ex vitro coronario, poſterior ex cryſtallino eſt parata; altera pro qua prior lens eſt cryſtallina; poſterior coronaria; quanquam poſtremum hoc lentium duplicatarum genus nullius vſus eſſe videtur, niſi praegrandem diſtantiam focalem admittere quis velit, quod vero a Dioptricae ſcopo maxime eſt alienum.

VII.

VII.

De adplicatione lentium obiectiuarum compoſitarum ad omnis generis teleſcopia.

Auctore L. Eulero pag. 415.

In calculis pro conſtructione teleſcopiorum ſecundum methodum Ill. *Euleri* inſtituendis ſingulae lentes, ex quibus inſtrumentum componitur, ſeparatim ad computum ſunt reuocandae. Fieri itaque non poteſt, quin formularum, quibus ſatisfieri oportet, multitudo, praeſertim ſi lentes compoſitae adhibeantur, ita increſcat et formulae ipſae tam euadant intricatae, vt omnibus conditionibus ad teleſcopii perfectionem requiſitis ſatisfacere moleſtiſſimum ſit. Huic incommodo ſine dubio poſſet occurri, ſi lentis compoſitae loco adhiberi poſſet lens ſimplex, quae omni reſpectu vicem illius gereret eundemque prorſus effectum produceret. Qua quam vero manifeſtum eſt, talem lentem ſimplicem eſſe impoſſibilem: ſiquidem ipſa haec impoſſibilitas lentibus compoſitis originem dedit; cenſet tamen Ill. *Eulerus*, lentem eiusmodi ſimplicem etſi imaginariam, tamen vtiliſſime in calculo poſſe admitti, quandoquidem, calculo abſoluto, quicquid erat imaginarium, ex eo prorſus eliditur. Hunc in finem ſequens problema reſoluendum ſuſcipit: Propoſita lente obiectiua du-

 plicata

plicata ſiue triplicata, inuenire lentem ſimplicem, in ſe quidem imaginariam, ex data vitri ſpecie confectam, quae omni reſpectu in compoſitione teleſcopii eundem plane effectum eſſet praeſtitura, et quam idcirco tanquam lentem vicariam ſpectare liceret. Inuentis omnibus eiusmodi lentis determinationibus Ill. Auctor generatim pro quouis teleſcopiorum genere lentem triplicatam loco obiectiuae adhibendam ita determinare docet, vt omnis plane confuſio ab apertura lentium oriunda penitus deſtruatur; et quae hactenus in genere expoſuit, ea tam ad lentes triplicatas in priori diſſertatione, quam ad duplicatas in appendice deſcriptas adplicat, et quomodo omnis generis teleſcopia ope talium lentium obiectiuarum ad ſummum perfectionis gradum poſſint perduci, ordine exponit; vbi vero ea tantum teleſcopiorum genera, in quibus lens obiectiua ſimplex eſt, adhiberi conuenit, quandoquidem hic fuit oſtenſum, quomodo lentes compoſitae ad ſimplicem vicariam ſint reducendae.

Hiſce generatim expoſitis Ill. Auctor ſingula teleſcopiorum genera ſeparatim meditationibus ſuis ſubiicit; poſuit vero in dioptrica ſua fundamentum diuiſionis teleſcopiorum in numero imaginum realium in iis occurrentium; quare in theoriae hic propoſitae generalis adplicatione iam ſpeciatim agit

I. De

I. De perfectione Teleſcopiorum primi generis, nullam imaginem realem continentium. pag. 432.

Vbi poſt euolutos caſus aliquot ſpeciales traditur conſtructio generalis horum teleſcopiorum pro quacunque multiplicatione. Duplici autem defectu, etſi lens obiectiua fuerit perfecta, haec teleſcopia laborant; primo enim lens ocularis non poteſt non quantumuis exiguam aliquam confuſionem ob diuerſam radiorum refrangibilitatem producere: deinde campus nimis eſt exiguus, quam vt pro maioribus multiplicationibus conſultum ſit, eiusmodi teleſcopia conficere.

II. De perfectione teleſcopiorum ſecundi generis ſeu aſtronomicorum, vnicam imaginem realem continentium. pag. 448.

Vbi ſimili ordine aliquot exemplis datae multiplicationis ſubiunguntur formulae generales pro conſtructione horum teleſcopiorum ad quamcunque multiplicationem adplicabiles; vnde tandem conſtructio generalis tuborum aſtronomicorum *perfectiſſimorum*, ſex lentibus inſtructorum et ad quamlibet multiplicationem extenſa deducitur.

III. De perfectione teleſcopiorum tertii generis, duas imagines reales continentium pag. 472.

Haec teleſcopia vocantur *terreſtria* et ad minimum quatuor lentibus inſtruuntur. Species aliquot huius

huius generis notatu prae ceteris dignas Ill. Auctor vberius pertractat et calculos pro teleſcopio eiusmodi ſex lentibus conſtante et obiecta centies multiplicante in omni ſuo ambitu ob oculos ponit, cuius tubi longitudo erit 32 digitorum; ſemidiameter campi apparentis 23 minutorum, qui inſtar ſpatii circularis in coelo ſpectabitur, cuius ſemidiameter eſt 34 graduum 10 minut.

Additamenti huius diſſertationis occaſionem praebuit Celeb. *Jeaurat*, qui nouiſſimo Commentar. Pariſinorum volumini amplam lentium obiectiuarum compoſitarum deſcriptionem inſeruit, quibus vero non, niſi confuſioni a diuerſa radiorum refrangibilitate oriundae occurritur. Attulit idem egregia experimenta pro definienda tam refractione, quam diſperſione radiorum pro vitro tam coronario, quam cryſtallino; pro hoc poſteriori inuenit rationem refractionis 160 : 100, et diſperſionem vitri coronarii ad cryſtallum vt 18 : 31. Operae itaque pretium Ill. *Eulero* viſum eſt, calculos ſuos circa conſtructionem lentium triplicatarum etiam ad hanc vitri ſpeciem in hoc additamento accommodare.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

Deſcriptio Piſcis, e Coregonorum genere, ruſſice Riapucha dicti, hiſtorico-anatomica.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 503.

Deſcriptionem in hac Diſſertatione Cl. Auctor exhibet piſcis, in Ruſſia haud rari, nec tamen hactenus ſatis deſcripti, ad genus Coregonorum pertinentis, cui etiam internarum partium, praecipue abdominalium, zootomica deſcriptio adiungitur. Maior hepatis pars in hypochondrio ſiniſtro, minor in dextro, comparuit, quod pylori appendices potius occupabant. Ventriculus in medio abdomine ſitus; lien huic non modo et duodeno, ſed etiam peculiari tractui pinguedineo vaſorum et membranarum ope annexus erat. Cl. Auctor ſingularem obſeruationem addit. In tunica externa ventriculi nonnullorum indiuiduorum tubercula apparebant lentiformia ſubrubella, quae diſſecta totidem habitacula oſtenderunt vermis *Gordii marini*, in ſpiram conuoluti. Et radiis quoque branchiarum ſimilia tubercula, Gordium fouentia, innata Cl Auctor vidit.

II.

II.

Deſcriptio Piſcis e Gadorum genere Ruſſis Saida dicti p. 512. nec non.

III.

Deſcriptio Cyclopteri Lineati p. 522.

Auctore I. Lepechin.

Piſces duos in hac diſſertatione proponit Auctor, quos in itinere ſuo per mare album obſeruauit. Horum alter eſt *Gadus dorſo tripterygio ore cirro minimo, cauda bifurca, radio ventralium ſecundo in longam ſetam producto, linea laterali recta*; alter vero: *Cyclopterus corpore nudo caſtanco, lineis longitudinalibus trium parium pallidioribus, pinnis dorſali, anali caudali que vnitis.* Prioris non modo partes externae, ad ſtabiliendum characterem neceſſariae, verbis delineantur, ſed internae etiam concinne deſcribuntur, et denique ſubiunguntur partium externarum dimenſiones. In nota ad hunc piſcem oſtendit Auctor *Gadum Callariam* Illuſtr. LINNAEI, vel *Callariam* V. Clariſſ. KLEINII male confundi cum *Gado Nauaga*, quem Clariſſ. KOELREVTER in Nouor. Comment. Acad. Scient. Petrop. T. XIV. p. 484. deſcripſit et icone Tab. XII. expreſſit, quem que nouam ſpeciem conſtituere noſter putat. *Cyclopteri Lineati* ob vnicum indiuiduum, quod Auctor obtinere potuit, habitus atque dimenſio modo partium externarum proponitur.

III.

IV.

Deſcriptionum plantarum ſibiricarum continuatio.

Auctore Erico Laxmanno p. 526.

Initium harum deſcriptionum in Tomo Commentariorum noſtrorum XV. iam occurrit Quae in praeſenti diſſertatione traduntur plantae, alpinis omnino annumerandae ſunt. Prima earum eſt Gentiana *grandiflora* corolla quinquefida, foliis radicalibus plurimis, lanceolatis, compactis horizontalibus, ſummorum tantum cacuminum altaienſium eximium ornamentum. Secunda eſt Sibbaldia *altaica* foliorum radicalium apicibus tripartitis, calycibus quinquefidis, petalis retuſis, in monticulis praedictarum alpium inferioribus occurrens. Tertia Illuſtr. a *Linne* nomen debet Ornithogalum ſcilicet *vniflorum* foliis caulinis alternis, vaginantibus, pedunculo vnifloro, ſummorum montium *Sinie Sopka*, *Reunoua* aliorumque incola. Quarta eiusdem eſt generis Ornithogalum puta *altaicum* ſcapo tereti, quadriphyllo, petalis ouatis, trinervibus, ſtaminibus ſubulatis, nusquam niſi in altiſſimus montibus altaicis inuentum. Quinta eſt Polygonum *ſibiricum* floribus octandris, foliis haſtatis caule inermi, per totam auſtraliorem Sibiriam in alpinis haud infrequens. Sexta numeroſum Ranunculorum gregem auget foliis lobatis, radicalibus petiolatis, caulinis ſeſſilibus, calyce hirſuto, longitudine fere petalorum, in fiſſuris praedictarum alpium vmbroſis habitans.

ASTRONOMICA.

I.

Comparatio inter Theoriam Lunae Illuſtr. *Euleri* et Tabulas recentiores Celeb. *Mayeri.*

Auctore A. I. Lexell pag. 537.

Comparatio inter Theoriam Lunae *Euleri* et Tabulas *Mayeri* adornata heic habetur, ad exemplum eius quam ipſemet Illuſtr. *Eulerus* inſtituit inter ſuam Theoriam et Tabulas Lunares Cel. de *Clairaut* eo imprimis fine, vt inde valores ſaltem proxime veros pro excentricitate et inclinatione media Lunae eliceret. Vt vero haec comparatio eo commodius inſtitui poſſet, praeprimis neceſſum fuit argumenta Tabularum a *Mayero* adhibita ad denominationes conſimiles iis, quas Illuſtr. *Eulerus* in ſua Theoria in vſum vocauit, reuocare. Scilicet omnes aequationes ab *Eulero* allatae, hos quatuor angulos inuoluunt, elongationem mediam Lunae a Sole, anomaliam mediam Lunae, diſtantiam loci Lunae medii a loco nodi medio et anomaliam mediam Solis, qui anguli litteris p, q, r, t apud *Eulerum* deſignantur. In Tabulis vero *Mayeri* partim hi anguli, partim etiam eorum valores certis aequationibus correcti adhibentur, quos igitur litteris

ris p', p'', p''', q', r', r'' exprimendos cenſuit huius diſſertationis auctor; quo obſeruato omnes inaequalitates pro longitudine Lunae a *Mayero* allatae in quatuor ordines diſpeſci poſſunt, quorum primus complectitur aequationem annuam, euectionem et nonnullas alias minores inaequalitates, pro hoc ordine argumenta ex angulis t, p', r' et q componuntur, deſignante p' diſtantiam loci Lunae medii a loco vero Solis. Secundus ordo inuoluit aequationem orbitae Lunae et pro argumento habet angulum q', vbi q', deriuatur ex q, ſi huic adplicentur aequationes ordinis primi et aequatio quaedam pro argumento habens t. Tertius ordo inuoluit inaequalitatem, quae variatio Lunae dicitur, huiusque argumentum eſt angulus p'', vbi p'' deſignat diſtantiam loci Lunae medii per binos priores ordines correcti a loco vero Solis. Quartus denique ordo continet reductionem ad eclipticam, vbi occurrit angulus r'', ſiue diſtantia loci Lunae medii per tres priores ordines correcti a loco nodi correcto. Comparatio ipſa Theoriae Lunae cum Tabulis *Mayeri*, eum in modum inſtituta habetur, vt pro certis poſitionibus principalibus Lunae, vti ſi $p = 0$, $q = 0$, $r = 90°$, ex Tabulis *Mayeri* quaerantur valores elongationis loci Lunae medii a loco vero, et Latitudinis Lunae, qui valores comparantur cum ſimilibus ex Theoria Lunae deductis, in quibus tamen poſterioribus, valores excentricitatis et inclinationis mediae Lunae pro incognitis ſpectantur, qua ratione inueniuntur aequationes his incognitis determinandis inſerui-

ſeruientes. Poſitiones autem praecipue vtiles pro determinanda excentricitate eae ſunt, quibus ſtatuuntur

I°. $p = 0$; $r = 0$; $q = 90$; II°. $p = 0$; $r = 90$; $q = 90$
III°. $p = 90$; $r = 0$; $q = 90$; IV°. $p = 90$; $r = 90$; $q = 90$

pro ſingulis autem bini caſus ſpeciales conſiderari poſſunt, prouti ſtatuitur vel $t = 0$ vel $t = 180°$. Pro determinanda inclinatione, hae quatuor poſitiones inprimis cum vſu adhiberi poſſunt:

I°. $p = 0$; $q = 0$; $r = 90°$; II°. $p = 0$; $q = 90$; $r = 90°$
III. $p = 90°$; $q = 0$; $r = 90°$; IV. $p = 90$; $q = 90°$; $r = 90°$.

Huiusmodi igitur facta comparatione inuenit Clar. Auctor praeſentis diſſertationis pro excentricitate valorem 0,0545 proxime et pro inclinatione 0,08961, qui valores quidem egregie conſentiunt, cum iis, quos Illuſtr. *Eulerus* in conſtruendis ſuis Tabulis adhibuit, ibi enim excentricitas ſuppoſita fuit 0,05445 et inclinatio 0,08964, at haud parum diſcrepant ab iis quos *Mayerus* in vſum vocauit, cuius diſcrepantiae ratio inde ſine dubio potiſſimum prouenit, quod coefficientes aliarum atque aliarum aequationum apud *Eulerum*, multum ſint diuerſae ab iis, quos *Mayerus* partim ex Theoria, partim ex obſeruationibus collegit.

Vt vero vnicuique facile ſit iudicium de conſenſu vel diſſenſu Tabularum Lunae noſtro tempore celebratiſſimarum, Illuſtr. *Euleri*, *Mayeri* et de *Clairaut*, placet ſequentibus Schematibus huius rei ſpecimen exhi-

exhibere, ab Auctore praeſentis diſſertationis praecipuis quibusdam Lunae poſitionibus adcommodatum:

Elongatio loci Lunae medii a loco vero ex Tabulis

Pro poſitione		*Euleri*	*Mayeri*	*de Clairaut*
$p=0$; $q=90$ $r=0$	$t=0$	$-5°.\ 5'.32''$	$-5°.\ 5'.35''$	$-5°.\ 5'.20''$
	$t=180$	$-5.\ 0.\ 55$	$-5.\ 0.\ 44$	$-5.\ 1.\ 30$
$p=0$; $q=90$ $r=90$	$t=0$	$-5.\ 6.\ 14$	$-5.\ 5.\ 14$	$-5.\ 4.\ 51$
	$t=180$	$-5.\ 1.\ 32$	$-5.\ 0.\ 22$	$-5.\ 0.\ 59$
$p=90$; $q=90$ $r=0$	$t=0$	$-7.\ 28.\ 0$	$-7.\ 27.\ 20$	$-7.\ 26.\ 51$
	$t=180$	$-7.\ 34.\ 0$	$-7.\ 34.\ 0$	$-7.\ 33.\ 3$
$p=90$; $q=90$ $r=90$	$t=0$	$-7.\ 28.\ 6$	$-7.\ 28.\ 4$	$-7.\ 27.\ 29$
	$t=180$	$-7.\ 34.\ 9$	$-7.\ 34.\ 48$	$-7.\ 33.\ 44$

Latitudo Lunae ex Tabulis

Pro poſitione		*Euleri*	*Mayeri*	*de Clairaut*
$p=0$; $q=0$ $r=90$	$t=0$	$4°.59'.37''$	$4°.59'.31''$	$4°.59'.35''$
	$t=180$	$4.\ 58.\ 58$	$4.\ 59.\ 3$	$4.\ 59.\ 9$
$p=0$; $q=90$ $r=90$	$t=0$	$4.\ 59.\ 35$	$4.\ 59.\ 26$	$4.\ 59.\ 46$
	$t=180$	$4.\ 59.\ 11$	$4.\ 59.\ 2$	$4.\ 59.\ 20$
$p=90$; $q=0$ $r=90$	$t=0$	$5.\ 16.\ 58$	$5.\ 16.\ 59$	$5.\ 17.\ 23$
	$t=180$	$5.\ 17.\ 28$	$5.\ 17.\ 19$	$5.\ 17.\ 49$
$p=90$; $q=90$ $r=90$	$t=0$	$5.\ 15.\ 28$	$5.\ 15.\ 18$	$5.\ 15.\ 29$
	$t=180$	$5.\ 15.\ 46$	$5.\ 15.\ 34$	$5.\ 15.\ 49$

Ex hoc ſpecimine liquet pro Latitudine Lunae definienda tantum eſſe Tabularum conſenſum vt vix maior ſperari poſſit, pro Longitudine autem Lunae diſſenſus aliquanto maiores adſunt, vnde vix fieri

 poteſt,

poteſt , vt hae Tabulae ſaltem pro caſibus , quibus locus Lunae medius a vero aliquantum diſtat , aeque bene cum coelo conſentiant. Quare etiamſi vel maxime Tabulae *Mayeri* recentiores cum obſervationibus reperiantur conſentientes , tamen quia pro his Tabulis nonnullae aequationes theoriae ſuperſtructae, aliae ex obſeruationibus correctae , nonnullae quoque quas Theoriae praebuerat prorſus neglectae ſunt, optandum eſt vt Theoria adhuc magis excoli poſſet , quo maior acquireretur certitudo de iis aequationibus , quarum valores empirice quaſi hucusque determinati fuerunt.

II.

Eclipſis ſolaris d. $\frac{12}{23}$. Martii 1774. viſae obſeruatio Petropoli inſtituta.

Auctore W. L. Krafft pag. 568.

Quae recenſetur hic a Cl. Auctore , eclipſis ſolaris obſeruatio in priuatis aedibus , a ſpecula academica vix ad trium minutorum ſecundorum differentiam verſus occaſum remotis , ab ipſo eſt inſtituta ; praeſtantibus inſtrumentis , tubo inprimis achromatico decem pedum *Dollondiano* ; et fauente coelo. Aſtronomis in obſeruatorio huic ſolis eclipſi inuigilantibus ob inopina obſtacula initium eius cernere non licuit ; cuius momentum , cum Auctor , quantum quidem ſolis ad horizontem vicinia conceſſit , admo-

admodum praeciſe obſeruauerit; iſte defectus commode hac obſeruatione poterit ſuppleri. Accidit ſcilicet initium $18^h. 3'. 14''$ et finis $20^h. 19'. 28''$. Adiungit Auctor parallaxes tam longitudinis, quam latitudinis, pro vtroque momento ab ipſo computatas.

III.

Obſeruatio Eclipſis Solis facta Petropoli die $\frac{12}{23}$. Martii 1773.

Auctore A. I. Lexell pag. 571.

Continet haec diſſertatio expoſitionem obſeruationis circa Eclipſin Solis A. 1773. ab Auctore inſtitutae, vna cum adumbratione nouae Methodi obſeruationes Eclipſium Solis computandi et concluſionibus quae ex obſeruatione praeſentis Eclipſis, tam pro loco Lunae, quam Longitudinibus nonnullorum locorum deducere licuit. De ipſis obſeruationibus notare conuenit, quod initium Eclipſis a Cl. *Lexell* non fuerit obſeruatum, finem vero ſatis exacte obſeruauit Temp. vero $8^h. 19'. 23''$, praeter quam obſeruationem plurimas inſtituit menſuras tam partium lucidarum Solis, quam diſtantiae cornuum, quarum tamen non niſi praecipuas et quae ipſi prae reliquis certae videbantur, heic attulit. Noua methodus, quam heic adhibuit Cl. Auctor huius diſſertationis pro computandis obſeruationibus Eclipſium Solis,

lis, in eo conſiſtit vt pro certis interuallis temporum intra quae Eclipſis cadit, computentur Latitudo, Aſcenſio recta, declinatio et angulus poſitionis pro Luna, nec non aſcenſio recta Solis, quo facto ex tempore obſeruationis et differentia aſcenſionum rectarum Solis atque Lunae cognoſcetur angulus horarius Lunae. Porro ſi in meridiano concipiatur punctum quod cum loco obſeruatoris et centro telluris in directum iacet, ex cognita telluris figura habebitur diſtantia huius puncti a Polo aequatoris, tum vero ſi breuitatis gratia hoc punctum nomine zenith indicetur, reſoluendum eſt triangulum cuius duo latera cognita ſunt, diſtantia zenith a Polo, complementum declinationis Lunae et angulus eius horarius, quaerendo nimirum diſtantiam Lunae veram a zenith et angulum parallacticum Lunae pro Polo aequatoris, quare ex cognito angulo poſitionis Lunae dabitur etiam angulus parallacticus pro Polo eclipticae. Haec autem duo elementa, diſtantia nimirum Lunae a zenith et angulus parallacticus ſufficiunt pro adornandis formulis, quae parallaxes Longitudinis et Latitudinis exprimunt, ſcilicet ſi parallaxis diſtantiae a zenith quaeſita fuerit, eaque per p exprimatur, angulus autem parallacticus per α, Latitudo autem apparens Lunae per l erit:

$$\text{Parall. Latit} = p \operatorname{coſ.} \alpha \quad \text{et} \quad \text{Parall. Longit.} = \frac{p \operatorname{ſin.} \alpha}{\operatorname{coſ.} l}.$$

Hae autem formulae licet rigore Geometrico verae non ſunt, tamen pro obſeruationibus imprimis eclipſium Solis non magis quam vna vel altera parte decima

decima ſcrupuli ſecundi a vero aberrabunt. Caetera quae ad hanc Methodum pertinent ſimilia ſunt iis, quae de hoc argumento in Tomo XV. docuit Cl. Auctor. Concluſiones ex obſeruatione Eclipſis An. 1774. deductae eo redeunt, vt verum tempus coniunctionis Solis et Lunae fuerit pro Petropoli Temp. Aſtron. d. 22 Martii $19^h. 22'. 4''$, exiſtente Longitudine Lunae $0^s. 2^\circ. 54'. 33''$ et Latitudine $42'. 35'', 1$. Quod Longitudinem attinet, illa ſiquidem Longitudo Solis recte eſt definita, non multum incerta eſſe poteſt, nam in tempore coniunctionis vix plusquam $5''$ error ineſſe poterit, at Latitudo Lunae magis eſt dubia. Correctionem Latitudinis Cl. Auctor definiuit potiſſimum ex obſeruationibus circa partes lucidas tempore maximae Eclipſeos, ex quibus eam collegit $15''$, ob incertitudinem vero circa diametrum Lunae et Parallaxin non niſi $10''$ correctionem adhibendam iudicauit. In ipſis quidem obſervationibus hunc in finem adhibitis vix plusquam $5''$ error ineſſe poterit, vti ex earum conſenſu facile perſpicitur, ſi autem in Eclipſibus Solis contingat, vt imago Lunae obſcura augeatur, vti nonnullis viſum eſt, vel ſi ex vitio quodam in conſtructione inſtrumenti valores partium lucidarum iuſto minores exhibiti fuerunt, fieri poteſt vt correctio Latitudinis nequidem ad 5 ſcrupula ſecunda pro hac obſeruatione aſſurgat, quod valde probabile redditur ex obſeruatione circa initium et finem huius Eclipſis Pekini Sinarum inſtituta. Comparatio obſeruationum circa finem Petropoli et Wiennae inſtituta-

 rum

rum praebet differentiam Longitudinum inter haec loca 55'. 46'' haud multum diuerſam ab ea, quam iam aliunde cognitam eſſe conſtat; at ex comparatione obſeruationis Schwezingenſis circa finem cum prius commemoratis fit Longitudo Schwezingae a Lutetia Pariſiorum 25'. 0'' circiter, quam hucusque ſuppoſuerunt 25'. 15''.

IV.

Obſeruationes Aſtronomicas ab Aſtronomis Academiae Imperialis Scientiarum *Stephano Rumovski* et *Andr. I. Lexell*, A. 1773. inſtitutas, recenſuit.

A. I. Lexell pag. 602.

In hac diſſertatione obſeruationes Aſtronomicae Ao. 1773. Petropoli inſtitutae recenſentur. Praecipuae autem harum ſunt. I°. Eclipſis Solis die $\frac{12}{23}$. Martii, cuius finem Cel. *Rumovski* obſeruauit Temp. vero $8^h. 19'. 19''$. II°. Eclipſis Lunae partialis die $\frac{19}{30}$. Sept. pro qua momenta initii et finis ſequentia aſſignata habentur

	Initium		Finis
D. *Lexell*	$6^h. 31'. 51''$	. . . .	$9^h. 33'. 28''$
D. *Rumovski*	34. 27	. . . .	35. 27
D. *Schröter*	34. 36	. . . .	34. 58.

III°.

III°. Occultationes fixarum a Luna ſequentes:

Occult. ſtellae fixae quintae magnit. in Capric. die	$\frac{14}{25}$. Sept.	$7^h.19'.\ 3''$	
Stellae ζ in conſtellatione arietis immerſio	$\frac{21.}{2.}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$	11. 53. 56	dub.
Emerſio		13. 10. 30½	
Stellae ϱ Sagittarii immerſio	$\frac{10}{21}$. Oct.	7. 52. 16½	
Emerſio Palilicii	$\frac{21.}{1.}$ $\frac{Oct.}{Nou.}$	12. 56. 47.	

His obſeruationibus accedunt immerſiones et emerſiones Satellitum Iouis. Quum praeter emerſionem Palilicii Cl. huius diſſertationis Auctor diſtantias quoque eiusdem a limbo Lunae lucido menſurauerit, operae pretium iudicauit inquirere quid de loco Lunae ex his obſeruationibus cum emerſione collatis colligi poſſet, ſaltem vt inde perſpiceret quousque diſtantiarum menſurae huic fini aptae et accommodatae haberi queant. Inuenit autem coniunctionem Palilicii cum Luna contigiſſe die 1 Nov. $10^h.\ 24'.\ 29''$ Temp. med. Pariſ. exiſtente Longitudine Lunae $2^s.\ 6^{\circ}.\ 38'.\ 3'', 9$ et Latitudine Lunae Auſtrali $4^{\circ}.\ 42'.\ 9''$. Methodus qua in computandis his obſeruationibus vſus eſt, quum diuerſa ſit ab antea cognitis immo ab ea, quam in priori diſſertatione pro Eclipſi Solis vſus eſt, nonnulla de eius indole monuiſſe haud praeter rem erit. Si igitur concipiamus triangulum Sphaericum cuius vertices ſint Polus aequatoris, Polus Eclipticae et punctum iſtud quod ſupra zenith adpellauimus, pro hoc triangulo ex datis obliquitate eclipticae, et diſtantia zenith a Polo aequatoris, nec non angulo hos arcus interiacente, quaeratur diſtantia Poli Eclipticae a zenith et angu-

lus qui hunc arcum et arcum binos Polos iungentem interiacet. Hoc facto, ſi arcus per Polum Eclipticae et zenith productus occurrat Eclipticae in puncto, quod Nonageſimum adpellare licebit, dabitur diſtantia Nonageſimi a zenith, et Longitudo Nonageſimi, ex quo cognoſcetur etiam differentia inter Longitudines Lunae et Nonageſimi. Tum vero ſi denotaverit Π parallaxin horizontalem Lunae aequatoream, ε rationem inter ſemidiametrum telluris pro loco ſpectatoris et ſemidiametrum aequatoris, D diſtantiam Nonageſimi a zenith, *d* differentiam inter Longitudines Lunae et Nonageſimi, L latitudinem Lunae veram et *l* Latitudinem apparentem, parallaxis autem Longitudinis indigitetur per *p*, ſequentes obtinebuntur formulae

$$\text{Tang.}\, p = \frac{\varepsilon\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{coſ.}\, D.\, \text{ſin.}\, d}{\text{coſ.}\, L - \varepsilon\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{coſ.}\, D.\, \text{coſ.}\, d};\ \text{Tang.}\, l = \frac{\text{ſin}\,(d + p)}{\text{ſin.}\, d}\, \text{Tang.}\, L\left(1 - \frac{\varepsilon\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{ſin.}\, D}{\text{ſin.}\, L}\right)$$

quarum vtraque exacte vera eſt, et rigori Geometrico plane conformis. Neque computus harum formularum vllo modo pro moleſto haberi poteſt, ſaltem aeque commodae ſunt ac formulae ab aliis Auctoribus adhibitae, quae non niſi valores approximatos exhibent, imprimis vero vſum habent ſingularem, dum in computo verae figurae telluris ratio habenda eſt, quem in finem correctiones minus commodas hucusque adhibitas fuiſſe conſtat; dum hae formulae pro figura telluris Sphaeroidica maiorem non faceſſunt moleſtiam, quam ſi eadem ſupponatur ſphaerica.

V.

V.

Determinatio Longitudinis et Latitudinis quorundam Moldauiae et Walachiae locorum deducta ex obſeruationibus a *Iohanne Islenieff* inſtitutis.

Auctore Stephano Rumovski p. 631.

Cum victricia Ruſſiae arma tutum in Moldauiam et Walachiam aditum aperuiſſent, e re eſſe iudicauit Academia Scientiarum ablegare in illas regiones Virum Cl. *Iohannem Islenieff*, vt ibi vacaret obſeruationibus Aſtronomicis, poſitioni praecipuarum vrbium definiendae idoneis. Ille egregie munere ſibi demandato functus anſam praebuit diſſertationi, de qua hic ſermo eſt.

Vt autem illa incompendium redigatur, ſufficiet apponere tabulam, quae exhibeat poſitionem Geographicam eorum locorum, in quibus obſeruationes inſtitutae ſunt.

	Latitudo	Longit. a merid. Partis. in temp.	in grad.
Bender	46°. 50'. 24''	1h. 49'. 3½''	27°. 15'. 52''
Akerman	46. 12. 0	1. 53. 35	28. 23. 45
Kilia Noua	45. 26. 23		
Ismail	45. 21. 0	1. 46. 0	26. 30 0
Bukoreſt	44. 26. 45	1. 35. 12	23. 28 0
Foktzani	45. 38. 50	1. 38. 50	24. 42. 30
Iaſſi	47. 8. 30	1. 40. 39	25. 9. 45

His determinationibus menſuriſque a Caſtrametatoribus captis ſuperſtructa eſt mappa horum principatuum nuper euulgata, quae omnibus, quae hucusque prodiere, plenior et exactior eſſe videtur.

Pag. 640. vltima linea. loco $10^h. 39'. 39''$ legendum eſt $10^h. 58'. 2''$.

VI.

Obſeruationes Pekini Chinarum inſtitutae exceptae ex litteris a Rev. Patr. *Collas* ad *Stephanum Rumovski* anno 1772. die 5. Maii datis p. 647.

In ipſo initio litterarum occurrit nota, quam R. P. *Collas* de obſeruatione vltimi tranſitus Veneris per diſcum Solis Pekini habita, et iam diuerſis in ſcriptis prolata communicat; ea ſcilicet non omnimodam fidem meretur, quippe qui in pendulo aſtronomico, cuius motum R. P. *Dollieres* per multas altitudines Solis indagauerat, fato quodam ſubita perturbatio eſt deprehenſa, cauſam que huius perturbationis illis ignotam fuiſſe perhibet.

Poſt modum indicat inſtrumenta et cautelas, quibus in obſeruationibus vſi ſunt: Obſeruationes quae hic referuntur ſunt ſequentes; Quinque occultationes ſtellarum fixarum a Luna Anno 1772. Dein momenta quaedam Eclipſis Lunae, quae contigit die

23.

23 Octobr. Anno 1771. hanc excipit finis Eclipſeos Solis Anno 1770. die 25 Maii, et denique obſeruationes a R. P. *Dollieres* ſuper cometam inſtitutae, qui viſibilis fuit Anno 1769.

Sollicite R. P. *Collas* enumerat circumſtantias, quae quamuis obſeruationem concomitabantur, eoque ipſo pretium earum extollit; Enumeratione enim iſta, quanta cuique obſeruationi praeciſio ſit adiudicanda indigitat.

VII.

Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno MDCCLXXIII. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum.

Auctore I. A. Euler pag. 656.

Obſeruationes meteorologicae, quas Cel. Auctor ſingulis annis Commentariis noſtris inſerit, methodo iam in praecedentibus deſcripta ſunt inſtitutae. Primo loco deſcribuntur altitudines barometricae, quas Cel. Auctor ad morem *Muſchenbroeckii* ſub ſchematismo lineae curuae, cuius adplicatae ipſis altitudinibus, abſciſſae temporibus obſeruationum reſpondent, contemplari aſſolet. Fuit hoc anno maxima Mercurii altitudo 28. 88; minima autem

26. 85

26. 85 poll. quorum duodecim conſtituunt pedem regium pariſinum. Comparatione facta patuit, ſtatum Mercurii hoc anno generatim multo altiorem fuiſſe illo anni praeteriti. Adiunguntur quoque obſeruationes aliquot aſcenſuum et deſcenſuum Mercurii ſubitaneorum. In obſeruationibus thermometricis Cel. Auctor vtitur thermometro mercuriali delisliano verſus boream ſito et a radiis ſolaribus prorſus libero; minima altitudo fuit 203; maxima 104 graduum; et comparatione cum anni praeterlapſi obſeruationibus facta adparuit, praeſente et frigoris et caloris gradum fuiſſe illo minores. Sequuntur porro tabulae ventorum vim et directionem et reliquam coeli conſtitutionem ob oculum ponentes, vt et recenſio phaenomenorum praecipuorum. Sub finem adiungit Cel. Auctor tres tabulas, quarum vna reductionem graduum deslislianorum ad Reaumurianos, altera comparationem pollicum pariſinorum cum Londinenſibus, tertia denique reductionem partium pollicis centeſimarum ad partes duodecimales ſeu lineas complectitur.

INDEX
DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Dan. Bernoulli, Theoria Elementaris ſerierum, ex ſinibus atque coſinibus arcuum arithmetice progredientium diuerſimode compoſitarum, dilucidata pag. 3.

L. Euler, Summatio progreſſionum
$\text{ſin.}\,\Phi^{\lambda} + \text{ſin.}\,2\Phi^{\lambda} + \text{ſin.}\,3\Phi^{\lambda} \ldots\ldots + \text{ſin.}\,n\Phi^{\lambda}$
$\text{coſ.}\,\Phi^{\lambda} + \text{coſ.}\,2\Phi^{\lambda} + \text{coſ.}\,3\Phi^{\lambda} \ldots\ldots + \text{coſ.}\,n\Phi^{\lambda}$
pag. 24.

A. I. Lexell, Obſeruationes variae circa ſeries, ex ſinibus vel coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatas pag. 37.

L. Euler, Noua ſeries infinita maxime conuergens perimetrum Ellipſis exhibens pag. 71.

Eiusdem, Demonſtrationes circa reſidua ex diuiſione poteſtatum per numeros primos reſultantia pag. 85.

Eiusdem, Noua ratio quantitates irrationales proxime exprimendi pag. 136.

Eiusdem, Solutio problematis de inueniendo triangulo, in quo rectae ex ſingulis angulis latera oppoſita biſecantes ſint rationales pag. 171.

Eiusdem, Reſolutio aequationis $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ per numeros tam rationales, quam integros pag. 185.

Eiusdem, Inſignes proprietates ſerierum ſub hoc termino generali contentarum: $x=\frac{1}{2}(a+\frac{b}{\sqrt{k}})(p+q\sqrt{k})^n+\frac{1}{2}(a-\frac{b}{\sqrt{k}})(p-q\sqrt{k})^n$. pag. 198.

Eiusdem, De reſolutione irrationalium per fractiones continuas, vbi ſimul noua quaedam ſingularis ſpeciis minimi exponitur p. 218.

Phyſico-Mathematica.

Dan. Bernoulli, Noua Determinatio Centri oſcillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili ſuſpenſis, eiusque a regula communi diſcrepantia pag. 245.

L. Euler, Determinatio motus oſcillatorii in praecedente diſſertatione pertractati, ex primis mechanicae principiis petita p. 268.

Eiusdem, De preſſione ponderis in planum, cui incumbit pag. 289.

Eiusdem, De Harmoniae veris principiis per ſpeculum muſicum repraeſentatis pag. 330.

Eiusdem, Noua methodus motus planetarum principalium ad tabulas aſtronomicas reducendi pag. 354.

Eiusdem, Diſquiſitio de lentibus obiectiuis triplicatis, quae vel nullam confuſionem pariant vel etiam datam confuſionem a reliquis

liquis lentibus ortam deſtruere valeant pag. 377.

Eiusdem, De adplicatione lentium obiectiuarum compoſitarum ad omnis generis teleſcopia pag. 415. vbi agitur

I. De perfectione Teleſcopiorum primi generis, nullam imaginem realem continentium pag. 432.

II. De perfectione Teleſcopiorum ſecundi generis ſeu Aſtronomicorum, vnicam imaginem realem continentium p. 448.

III. De perfectione Teleſcopiorum tertii generis, duas imagines reales continentium pag. 472.

Phyſica.

I. T. Koelreuter, Deſcriptio Piſcis, e Coregonorum genere, ruſſice Riapucha dicti, hiſtorico-anatomica pag. 503.

I. Lepechin, Deſcriptio Piſcis e Gadorum genere Ruſſis Saida dicti pag. 512. nec non. Deſcriptio Cyclopteri Lineati p. 522. (572)

Erici Laxmann, Deſcriptionum plantarum ſibiricarum continuatio pag. 526.

Aſtronomica.

A. I. Lexell, Comparatio inter Theoriam Lunae Illuſtr. *Euleri* et Tabulas recentiores Cel. *Mayeri* pag. 537.

W. L.

W. L. Krafft, Eclipſis ſolaris d. $\frac{12}{23}$. Martii 1774. viſae obſeruatio Petropoli inſtituta p. 568.

A. I. Lexell, Obſeruatio Eclipſis Solis facta Petropoli die $\frac{12}{23}$. Martii 1773. pag. 571.

A. I. Lexell Recenſio Obſeruationum Aſtronomicarum ab Aſtronomis Academiae Imperialis Scientiarum *Stephano Rumovski* et *Andr. I. Lexell*, Anno 1773. inſtitutarum, p. 602.

Steph. Rumovski, Determinatio Longitudinis et Latitudinis quorundam Moldauiae et Walachiae locorum deducta ex obſeruationibus a *Iohanne Islenieff* inſtitutis p. 631.

Eiusdem, Obſeruationes Pekini Chinarum inſtitutae excerptae ex litteris a Rev. Patr. *Collas* ad *Stephanum Rumovski* anno 1772. die 5. Maii datis pag. 647.

I. A. Euler, Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno MDCCLXXIII. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum pag. 656.

MATHE-

MATHEMATICA.

THEORIA ELEMENTARIA
SERIERVM, EX SINIBVS ATQVE COSINIBVS
ARCVVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM DIVERSIMODE COMPOSITARVM, DILVCIDATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Ab eo tempore, quo duo Academiae transmiſi ſchediasmata, alterum de ſummationibus ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque vſu, alterum de indole ſingulari ſerierum infinitarum, quas ſinus vel coſinus angulorum arithmetice progredientium formant earumque ſummatione et vſu; ab eo, inquam, tempore, peruenit ad manus meas nouum volumen Commentariorum Academiae ſcientiarum Pariſinae A. 1769. inde poſt triennium publici iuris factum. Egregiam in hoc volumine D. Abb. *Boſſut* pag. 453. nobiſcum communicauit methodum

determinandae ſummae, pro quocunque numero terminorum dato, ſerierum, quas ſinus vel coſinus arcuum arithmetice progredientium eorumue potentiae ſimiles exhibent. Quae hac de re protulit ſagaciſſimus Geometra, mihi anſam dederunt de argumento, quod in ambobus ſchediasmatis meis ſecundum vera principia, ſed metaphyſica potius quam geometrica, pertractaui, nouas non nullas ſuperaddendi obſeruationes easque, ni fallor, nec ſteriles nec iniucundas.

§. 2. Ea eſt ſinuum atque coſinuum indoles, vt vna eademque quantitas ex illis compoſita plures admittat expreſſiones ſub alia atque alia facie, quae inter ſe comparatae totidem ſubminiſtrant theoremata plus minus elegantia, aliquando etiam faſtidioſa, ſi velimus in diuerſis expreſſionibus identitatem valoris demonſtrare, quia non aliter differunt, quam forma, quae arbitraria eſt multiplicique modo diuerſa eſſe poteſt: oportet itaque omnes et ſingulas quantitates ad eandem denominationem reducere, ſi id fieri poſſit, priusquam de aequalitate vel inaequalitate quantitatum ſigno *Sinus* vel *Coſinus* inuolutarum iudicium ferre liceat, niſi ea de re per theoremata iam demonſtrata conſtet. Hoc ideo in anteceſſum monendum eſſe duxi, ne huiusmodi diſcuſſiones, quae ſolis principiis pure geometricis atque analyſi vulgari conficiuntur, ad communem referantur cenſum cum illis, de quibus mox ſermo erit et quae neceſſario requirere videntur principium illud quaſi metaphyſicum, cuius vſum feci in ſchediasmate de

ſumma-

ſummationibus ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione, nec proprie differt principium iſtud a decantato *principio* metaphyſico *ſufficientis rationis.* Meminerimus autem, ſeries noſtras pertinere ad ſeries recurrentes ſuasque habere periodos, post quas ſingulas perfecte recurrunt eaedem, ſimulque ipſos periodi terminos, modo affirmatiuos modo negatiuos, ſe ipſos deſtruere, quae circuli proprietas eſt, ita vt integra periodus ad nihilum reducatur; ſi porro vnaquaeuis periodus compoſita ſit ex dato numero terminorum, manifeſtum eſt, fore, vt ſumma totidem terminorum ſe inuicem in ſerie ſubſequentium ſit ſemper $= 0$, vbicunque horum terminorum primus accipiatur.

§. 3. His praemonitis iam propius ad praeſens inſtitutum meum accedo: Poſtquam nimirum in allegatis ſchediasmatis meis ſummam ſerierum noſtrarum, ſi hae infinitae ponantur, exhibui atque abunde demonſtraui, quam incongrua ſit ſumma, etſi legitime inuenta pluribusque methodis longe a ſe inuicem diuerſis conſtanter confirmata; in memoriam reuocaui veram totius myſterii explicationem, quam olim, cum Petropoli agerem, obſeruatam habueram eaque arrepta occaſione argumentum iſtud metaphyſicum, meaque ſententia in geometria pura haud demonſtrabile, vberius aperui: Poſt haec omnia incidi in nouas formulas Boſſutianas, §. 1. allegatas, easque noua methodo erutas pro quocunque terminorum numero determinato, quem vocat Auctor n, quas cum inſpicerem, protinus me cupido inceſſit

 explo-

explorandi, quid formulae iſtae indicent, ſi numerus terminorum n infinitus ſtatuatur, vt Boſſutiana cum meis conferre liceret, inflammataque cupido fuit, cum viderem ſubeſſe aliquid, in hoc examine, quod omnem ſolutionem pure geometricam eludat, rurſusque ad principia noſtra metaphyſica, ſed alio modo, recurrendum eſſe. En nunc quod res eſt.

§. 4. Primum, quod Cel. *Boſſut* ſoluit problema, conſiſtit in ſummanda ſerie ſinuum, quorum arcus arithmeticam formant progreſſionem, nimirum ſerie

$$\text{ſin.}\, q + \text{ſin.}\, 2q + \text{ſin.}\, 3q + \text{ſin.}\, 4q + \text{ſin.}\, 5q + \ldots \text{ſin.}\, nq$$

in qua numerus n, qui ſemper integer eſt, exprimit determinatum terminorum ſummandorum numerum. Inuenit autem laudatus Author quaeſitam ſeriei ſummam

$$ſ = \frac{\text{ſin.}\, q\, [1 + \text{coſ.}\, q - \text{coſ.}\, nq - \text{coſ.}\, (n+1)\, q]}{1 - \text{coſ.}\, 2q}$$

vbi litera q denotat datum arcum in circulo, cuius radius vnitate exprimitur; haec autem formula ſummatoria toto coelo differt ab ea, quam theoria ſerierum recurrentium ſubminiſtrat, quamuis vtriusque valor perfecte ſit vnus idemque, nec vnquam vlla laborant amphibolia hae formulae, qualiscunque numerus accipiatur integer pro litera n: ſemper enim termini ſummatorii valorem exhibent perfecte eundem, qui ab additione reali terminorum oritur, qualiscunque pro n accipiatur numerus integer et qualiscunque ſit arcus q. Sic itaque dubium non eſt, quin etiam vera ſit ſummatio Boſſutiana in caſu,

quo

quo ſeries in infinitum continuatur, quem ego ſolum caſum in primo ſchediasmate §. 1. allegato *de ſummationibus ſerierum quarundam incongrue veris* ſcrupuloſe examinaui, quia ſolus mirabili illa ambiguitate inuolutus eſt, cuius veram interpretationem nemo adhuc, quantum quidem ſcio, expoſuerat.

§. 5. Notetur vera formula ſeriei, quam pro ſummatione eius dedi in praefato ſchediasmate in fine §. 13. pro theoria ſerierum recurrentium atque vt conſenſus tandem formulae noſtrae cum Boſſutiana tanto clarius pateſcat, ſubſtituatur litera q literae x a nobis adhibitae; ſic dabit formula noſtra ſummam ſeriei infinitae

$$\text{ſin.}q+\text{ſin.}2q+\text{ſin.}3q+\text{ſin.}4q+\text{ſin.}5q \ldots\ldots +\text{ſin.}\,\infty q=\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}q}{\text{ſin. verſ.}q}.$$

At vero inſignis Geometra noſter hanc eandem ſummam facit aequalem

$$\frac{\text{ſin.}q[1+\text{coſ.}q-\text{coſ.}\,\infty q-\text{coſ.}(\infty+1)q]}{1-\text{coſ.}\,2q}.$$

Igitur requirit vtriusque methodi conſenſus, vt ſtatuatur

$$\frac{\text{ſin.}q[1+\text{coſ.}q-\text{coſ.}\,\infty q-\text{coſ.}(\infty+1)q]}{1-\text{coſ.}\,2q}=\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.verſ.}q}.$$

Equidem formula mea ad dextram poſita ab omni aequiuocatione libera eſt: at vero Boſſutiana prima fronte aenigma videtur inſolubile: Quid enim, quaeſo, ponendum erit pro coſ.nq vel pro coſ.$(n+1)q$, ſi per n intelligatur numerus abſolute infinitus?

hoc

hoc viderint illi, qui noluerint mecum ad principium metaphyſicum ſufficientis rationis confugere. Ego vero in hoc examine eandem valere methodum, quam adhibui in ſchediasmate meo primo §. 8. non potui non primo quaeſtionis intuitu cognoſcere.

§. 6. Si ſcilicet (in quacunque periodo id demum fieri mente concipias) terminum numero n indicatum conſideres, perſpicuum eſt, hunc terminum non variari a numero periodorum variato; ſit numerus omnium periodorum praecedentium $= m$, numerus omnium terminorum in quauis periodo $= f$, erit generaliter $n = mf + g$, vbi nunc g exprimit indicem termini quaeſiti, ſi hunc terminum numeres ab initio periodi, in qua eum exiſtere fingis; ergo terminus ipſe idem erit pro indice n et pro indice g et cum id conſtantiſſime ita ſe habeat, verum manebit, etiamſi numeros n et m vere infinitos áſſumas. Videamus nunc, quis in abſtracto valor ponendus ſit in vna eademque periodo pro termino, cuius index eſt g; is vero valor vnice deducendus eſt ex natura infiniti, quae poſtulat, ſecundum ſana axiomata metaphyſica, vt aequum ius cadat in ſingulos eiusdem periodi terminos; vnde ſequitur, quod verus valor quaeſitus in abſtracto ſtatuendus ſit aequalis ſummae omnium eiusdem periodi terminorum diuiſae per numerum horum terminorum; ſed in ſeriebus noſtris ſumma omnium terminorum eiusdem periodi $= 0$; ergo *in abſtracto* erit etiam coſ. nq vel coſ. $\infty q = 0$. Eodem modo demon-

demonſtratur, quod in formula Boſſutiana valor termini coſ. $(\infty + 1) q$ ſit $= 0$; fateor tamen hic aliquid ſubeſſe, quod vlteriori explicatione opus habet: etenim formula haec proprie indicat duos ſeriei terminos ſe inuicem ſubſequentes, ſimulque exigit theoria noſtra, vt ambo termini eidem periodo ſint incluſi. Vt ambo momenta inter ſe conſiſtere posſint, res hunc in modum pertractanda erit. Sit rurſus n numerus infinitus ponaturque quaeuis ſeriei propoſitae periodus compoſita ex terminis

$$A + B + C + D \ldots\ldots + M + N + P + Q = 0.$$

Sit iterum numerus horum terminorum $= f$; inquiramus iam in omnes valores poſſibiles quantitatis compoſitae coſ. $n q$ + coſ. $(n + 1) q$ combinando terminos, donec perfecte recurrant. Sic obtinebimus

$$A + B; B + C; C + D \ldots\ldots M + N; N + P; P + Q; Q + A$$

poſt quos tota periodus perfecte recurrit; ſic numerus horum terminorum coniugatorum fit iterum $= f$ ſimulque eorum ſumma

$$= 2A + 2B + 2C \ldots\ldots 2N + 2P + 2Q,$$

quae cum adhuc ſit $= 0$, ſequitur, ambos terminos combinatos in formula Boſſutiana, nempe coſ. $n q$ + coſ. $(n + 1) q$ eſſe $= 0$, poſito pro n numero vere infinito, eodem iure, quo idem demonſtrauimus pro vnico termino coſ. $n q$: haec metaphyſice vera ſunt, non geometrice, quia numerus n non eſt ſpecifice determinatus.

§. 7. Praemiſſa hacce noſtra theoria, cuius principia plane eadem ſunt, quibus vſus ſum in ſchedias-

mate de ſummationibus incongrue veris, facile nunc nobis erit inuenire verum valorem formulae Boſſutianae § 4. recenſitae pro caſu, quo ponitur numerus n vere infinitus, eiusque aequalitatem cum formula noſtra $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin. vers.}\,q}$ demonſtrare, facto enim $\text{coſ.}\,nq + \text{coſ.}\,(n+1)\,q = 0$, formula ſummatoria Boſſutiana §. 4. expoſita mutatur in hanc ſimpliciorem absque vlla amphibolia

$$f = \frac{\text{ſin.}\,q\,[1 + \text{coſ.}\,q]}{1 - \text{coſ.}\,2\,q}.$$

Igitur nunc aliud non ſupereſt, quam vt demonſtremus quod ſit

$$\frac{\text{ſin}\,q\,[1+\text{coſ.}\,q]}{1. - \text{coſ.}\,2\,q} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin. vers.}\,q} \text{ ſiue } \frac{1+\text{coſ.}\,q}{1 - \text{coſ.}\,2q} = \frac{1}{2\,\text{ſin. vers.}\,q}.$$

Eſt vero ſinus verſus $q = 1 - \text{coſ.}\,q$ ſimulque $\text{coſ.}\,2\,q = (\text{coſ}\,q)^2 - (\text{ſin.}\,q)^2$, hisque ſubſtitutis valoribus aequiualentibus factaque multiplicatione per crucem, prodit $2 - 2\,(\text{coſ.}\,q)^2 = 1 - (\text{coſ.}\,q)^2 + (\text{ſin.}\,q)^2$ ſiue $1 = (\text{coſ.}\,q)^2 + (\text{ſin}\,q)^2$ aut denique $1 = 1$. Ergo ambae nunc formulae perfecte inter ſe conueniunt.

§. 8. Ex principio, quod §. 6. explicui, facillimum nunc erit deducere quoque ſummam ſeriei in infinitum continuatae pro coſinibus arcuum arithmetice progredientium, quam Auctor noſter (§. 3.) problemate ſecundo pertractat, vbi noua et eleganti ſua methodo demonſtrat, quod ſit

$$\text{coſ.}\,q + \text{coſ.}\,2\,q + \text{coſ.}\,3\,q + \text{coſ.}\,4\,q + \ldots\ldots + \text{coſ.}\,nq = \frac{\text{coſ.}\,q\,[\text{ſin.}\,n\,q + \text{ſin.}\,(n+1)\,q - \text{ſin.}\,q]}{\text{ſin.}\,2\,q}.$$

Notiſſi-

Notiſſimum autem eſt theorema, quod ſeries propoſita, ſi pro n ſumatur numerus vere infinitus, fiat $= -\frac{1}{2}$, quamuis theorema iſtud longe diuerſo ſenſu accipiendum ſit, quam communiter accipitur, nec tamen vnquam aliquid falſi ſiue directe ſiue indirecte inde deduci poſſit. Cum vero ſolutio Boſſutiana ſit pure geometrica pro omni numero terminorum finito, res iterum erit Geometrarum attentione digna, ſi inquiratur, quid iſta ſolutio indicet, cum pro n numerus vere infinitus ſupponitur, praeſertim quod iſta inquiſitio argumento noſtro propria ſit nec eius modus alias locum habere poſſit.

§. 9. Patet autem, hanc ſeriem coſinuum, cuius modo mentio facta fuit, iterum pertinere ad illas ſeries recurrentes, quae ſuis periodis perpetuo regeneratis, perfecte iisdem, gaudeant, et aggregatum ex omnibus vniuscuiusuis periodi terminis ſemper ad nihilum reduci; igitur idem adhuc ſubſiſtet principium, cuius ope, pro ſerie ſinuum in infinitum continuata, inuenimus §. 6. quod ſtatuendum ſit $\text{coſ.}\, n q + \text{coſ.}\, (n+1) q = 0$. Quodſi nunc pro ſummanda ſerie coſinuum in infinitum continuata iisdem veſtigiis inſiſtamus, reperiemus pariter $\text{ſin.}\, n q + \text{ſin.}\, (n+1) q = 0$. His vero ſubſtitutis valoribus in aequatione Boſſutiana inuenimus pro ſerie in infinitum continuata, vocatis in ſubſidium noſtris principiis, ſequentem

$$\text{coſ.}\, q + \text{coſ.}\, 2q + \text{coſ.}\, 3q + \text{coſ.}\, 4q + \text{etc.} = \frac{-\text{coſ.}\, q \times \text{ſin.}\, q}{\text{ſin.}\, 2q}$$

 notum

notum autem eſt, quod ſit coſ. $q \times$ ſin. $q = \frac{1}{2}$ ſin. $2q$ ergo habemus

$$\text{coſ.}\,q + \text{coſ.}\,2q + \text{coſ.}\,3q + \text{coſ.}\,4q + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

plane vt a Geometris haec ſeries definiri ſolet, vtcunque paradoxa haec determinatio videri debeat.

§. 10. Eodem plane modo, quo vſi ſumus, licebit formulas ſummatorias reliquas, quas Geometra gallus exhibuit pro numero terminorum determinato n, ita reſtringere, vt ſummam ſerierum earundem ſed ſine fine continuatarum indicent, nec, ſi recte iudico, id alio modo praeſtari poterit: totum negotium in eo ſimpliciter conſiſtit, vt deleantur ſinguli termini ſigno ſin. ∞q vel coſ. ∞q affecti; Ego vero aliud non intendi, quam vt principii metaphyſici, quod nos eo perduxit, veritatem et vſum tanto magis manifeſtarem atque amplificarem. In primo ſchediaſmate, ante aliquot abhinc annos communicato, principium iſtud vberius explicui atque adhibui pro ſummandis ſeriebus noſtris infinitis iisque ſummationibus prorſus heteroclitis genuine interpretandis: nunc vero oſtendere volui, quid de ipſo termino infiniteſimo ad mentem eiusdem principii ſtatui et quomodo in abſtracto determinari debeat, quo demum facto liceat formulas Boſſutianas a finito perfecte determinato ad infinitum quodammodo indeterminatum extendere. Si habeatur quantitas $\frac{1}{m}$, haec vtique perfecte erit determinata, ſi m fuerit numerus determinatus qualiscunque; quid vero ſtatuendum erit, ſi ponatur $m = 0$ et $\frac{1}{m} = \infty$? an tunc valor

valor emergens pariter erit perfecte determinatus? mihi non videtur in abſtracto. Attamen requirit argumentum noſtrum, vt pro numero n accipiatur numerus infinitus ſimulque exacte determinatus nec meo iudicio, huic poſtulato ſatisfieri poteſt, quam cum pro n ſumantur omnes numeri in vna eademque periodo et pro quouis numero n determinetur valor termino conueniens ac denique inter omnes hos valores ſumatur medius: hac operatione metaphyſice obtinetur, quod geometrice fieri non poteſt, perinde ac ſi ſorti res committeretur, quisnam valor ponendus ſit pro formulis ſin. nq, coſ nq, ſin. $(n+1)q$, coſ. $(n+1)q$ etc. quando ſupponitur $n=\infty$; erit nimirum valor expectationis pariter medius inter omnes valores poſſibiles eosdemque aeque probabiles, atque in hoc ſolo valore conſiſtit *ſufficiens ratio*, quam natura non poteſt non ſequi.

§. 11. Patet ex praemiſſis, theoriam noſtram duobus inniti principiis; *primum* eſt, vt propoſita ſeries infinita compoſita ſit ex periodis, quae perfecte ſine fine recurrant eaedem, *ſecundum* vt ſumma omnium terminorum vnam eandemque periodum conſtituentium ſit $=0$; Primo principio ſubiiciuntur omnes ſeries ſinuum vel coſinuum, vel eorundem quadratorum, cuborum aliarumue dignitatum, ſi modo arcus arithmetice progrediantur, quod quidem non apparet in ſeriebus analytice expreſſis, qualis, verbi gratia, eſt

$$\text{ſin.}\,q+\text{ſin.}\,2q+\text{ſin.}\,3q+\text{ſin}\,4q\ldots\ldots+\text{ſin.}\,nq,$$

ſed quod manifeſtum ſit pro ſingulis exemplis, quia ſemper fit, vt arcus aliquoties repetitus tandem expleat peripheriam ſiue ſemel ſiue pluries ſumtam, quo facto termini iidem eodem ordine neceſſario recurrunt, hinc numerus terminorum ſingulis periodis communis eorumque ſumma conſtanter eadem.

Quod attinet ad ſecundum principium, quo hanc ſummam terminorum in quauis periodo aequalem nihilo ſtatuimus, id quidem obtinet in ſeriebus ſinuum atque coſinuum, at vero ſi eorum dignitates accipiantur, quod Academicus Pariſinus acute fecit, non ſine modificatione principium accipiendum erit. De vtroque principio pauca quaedam ſuperaddam.

§. 12. Sit integra circuli peripheria $= p$ atque per f et g intelligantur duo numeri qualescunque inter ſe primi; tum in propoſito exemplo numerico ponatur $f q = g p$; hoc modo recurret ſeries poſt quosuis terminos, qui vnam efficient periodum. Denotentur hi tetmini literis $a, b, c \ldots d, e$, quorum aliqui erunt affirmatiui caeteri negatiui; His poſitis docet theoria noſtra, fore ſummam ſeriei propoſitae in infinitum continuatae

$$= \frac{f a + (f-1) b + (f-2) c \ldots \ldots 2 d + e}{f}.$$

Quamuis autem haec ſumma appareat incongrua, attamen egregie conſpirat cum ſummatione ex quibuscunque aliis principiis legitime deducta, quod plus ſatis demonſtraui. Mirabilis iſta proprietas ex vera infiniti abſoluti natura deducitur.

Quod

Quod ſi iam arcus q et peripheria p incommenſurabiles ponantur, erit numerus f ſimul infinitus et vnica periodus ex infinitis terminis conſtabit: verum hoc non obſtante ſeries propoſita cenſenda eſt compoſita ex infinitis periodis, quia eſt abſolute infinita et nullo modo a numero terminorum vniuscuiusque periodi limitatur. Ita fit vt ſumma ſeriei infinitae coſ. q + coſ 2 q + coſ. 3 q + coſ. 4 q + etc. ſit conſtanter $= -\frac{1}{2}$, etiamſi ponatur v. gr. $q\sqrt{7} = p$, quo in caſu nunquam ſatis continuari poteſt ſeries, vt perfecte reſurgat periodosque formet: nihil tamen impedit, quo minus mente periodos concipiamus easque infinities repetitas putemus.

§. 13. Sunt et non nulla de periodis euaneſcentibus monenda. Proprietas eſt ſerierum noſtrarum, quae a ſinibus vel coſinibus formantur, vt omnes termini affirmatiui in quauis periodo deſtruant omnes negatiuos atque adeo ſummam terminorum ad nihilum reducant, haeque ſeries ſolae proprie ad inſtitutum noſtrum pertinent. At D. Abb. *Boſſut* alias ſuperaddit ſeries ſummabiles, ſi modo numerus terminorum fuerit finitus; hae vero nouae ſeries non ſunt ſine grano ſalis accipiendae; ſuasque periodos quidem formant easdem, ſed non euaneſcentes; ſumma harum ſerierum infinitarum neceſſario ſimul infinita eſt nec adeoque ad cenſum noſtrum pertinent: huiusmodi ſeries formantur a quadratis aliisue dignitatibus paribus ſinuum coſinuumue ad arcus arithmetice progredientes pertinentium, quia ſcilicet omnes termini in ſerie fiunt

poſi-

poſitiui; videantur problemata Boſſutiana 3. 4. 7 et 8, quae ipſa tamen ſub alia facie cum theoria noſtra egregie conſpirant. Aliter ſe res habet in ſeriebus, quae a dignitatibus formantur imparibus: hae enim periodis gaudent, quae certa cum reſtrictione iterum annihilantur; huc pertinent problemata Boſſutiana 5 et 6, quibus alia ſimilia ſuperaddi poſſent. Ipſa vero annihilatio plerumque ex ſola terminorum geneſi per ſe patet. Ita in ſerie ſinuum, nempe ſin. q + ſin. 2 q + ſin. 3 q + etc., quiuis terminus eiusdem periodi in omni exemplo numerico ſuum habet terminum ſocium ſub ſigno contrario, ſiue numerus termiorum *ſ* fuerit par ſiue impar, et quoniam ſi impar eſt, terminus ſocio orbus ſemper fit = 0, patet neceſſario quamuis periodum ad nihilum reduci. Imo etiamnum annihilabitur periodus, ſi cuiusuis termini ſimilis functio accipiatur, quae ſignum termino praefixum non mutet; Ergo et annihilantur periodi in ſerie (ſin. $q)^3$ + (ſin. 2 $q)^3$ + (ſin. 3 $q)^3$ + etc. Aliter ſe res habet, ſi dimenſionibus imparibus ſubſtituantur pares, quia tunc omnes termini neceſſario fiunt affirmatiui, vnde periodi, quamuis eaedem recurrant, non annihilantur ſed potius eandem vbique ſummam formant; ergo hae ſeries in infinitum continuatae, ſummam faciunt infinitam, nec porro ad argumentum noſtrum pertinent. Sic in problemate 3 et 7 authoris noſtri, in quorum altero ſumuntur quadrata terminorum in altero biquadrata, ſummae indicatae fiunt infinitae, ſi pro n ponatur numerus infinitus.

§. 14.

§. 14. Quae modo monui de ſeriebus ſinuum, pertinent etiam ad ſeries coſinuum, ſiue per ſe conſiderentur ſiue vt ſeries generatrices aliarum ſerierum, modo numerus f ſit par.; verum quoties pro f ſumitur numerus impar, recedit exemplum a norma praeſcripta atque termini eiusdem periodi equidem ſe deſtruunt, at non contraria identitate repetitorum terminorum, ſed valore extincto terminorum collectorum ſignis contrariis affectorum. Non immorabor hiſce extricationibus, quia iſtud negotii facilius ex ipſis formulis Boſſutianis conficitur, etiamſi Auctor nullam harum periodorum earumque annihilationum mentionem faciat: tanto praeſtantior videbitur methodus geometrica, qua vſus eſt, tantoque magis natura ſerierum noſtrarum eluceſſit.

§. 15. Quoniam ſingulae periodi perfecte reſurgunt eaedem, ſufficiet primam indicaſſe periodum; haec ſemper ex formulis ſummatoriis Auctoris noſtri deducetur, ſi ponatur $n = f$; tum vero erit vbique (ob $fq = gp$ §. 12) ſin. nq ſiue ſin. $fq = 0$; coſ. $nq = 1$; ſin. $(n+1)q =$ ſin q; coſ. $(n+1)q =$ coſ. q; ſin. $3nq = 0$; coſ. $3nq = 1$; ſin. $3(n+1)q =$ ſin. $3q$ etc. Quod ſi iam per n intelligatur numerus terminorum vnamquamuis periodum conſtituentium atque per $ſ$ ſumma cuiusuis periodi, facile erit hanc ſummam ex formulis Auctoris noſtri deducere. Percurram praecipua eius problemata ponendo vbique $n = f$.

I. $ſ = \text{ſin.}\,q + \text{ſin.}\,2q + \text{ſin.}\,3q \ldots + \text{ſin.}\,nq = \frac{\text{ſin.}\,q[1 + \text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,nq - \text{coſ.}\,(n+1)q]}{1 - \text{coſ.}\,2q} =$
$\frac{\text{ſin.}\,q[1 + \text{coſ.}\,q - 1 - \text{coſ.}\,q]}{1 - \text{coſ.}\,2q} = 0.$

II. $ſ = \text{coſ.}\,q + \text{coſ.}\,2q + \text{coſ.}\,3q \ldots + \text{coſ.}\,nq = \frac{\text{coſ.}\,q[\text{ſin.}\,nq + \text{ſin.}\,(n+1)q - \text{ſin.}\,q]}{\text{ſin.}\,2q} = 0.$

III. $ſ = (\text{ſin.}\,q)^2 + (\text{ſin.}\,2q)^2 + (\text{ſin.}\,3q)^2 \ldots\ldots + (\text{ſin.}\,nq)^2 = \frac{1}{2}n$
$- \frac{1}{2}\text{coſ.}\,2q\left(\frac{\text{ſin.}\,2nq + \text{ſin.}\,(n+1)2q - \text{ſin.}\,2q}{\text{ſin.}\,4q}\right) = \frac{1}{2}n - 0 = \frac{1}{2}f.$

Ergo ſumma periodi, cuius ſinguli termini per conſtructionem hic ſunt affirmatiui, in quauis periodo ſemper eſt aequalis dimidio numero terminorum.

IV. $ſ = (\text{coſ.}\,q)^2 + (\text{coſ.}\,2q)^2 + (\text{coſ.}\,3q)^2 \ldots\ldots (\text{coſ.}\,nq)^2 = \frac{1}{2}n$
$+ \frac{1}{2}\text{coſ.}\,2q\left(\frac{\text{ſin.}\,2nq + \text{ſin.}\,(n+1)2q - \text{ſin.}\,2q}{\text{ſin.}\,4q}\right) = \frac{1}{2}n + 0 = \frac{1}{2}f.$

Ergo ſumma periodi eadem, quae in articulo praecedente.

V. $ſ = (\text{ſin.}\,q)^3 + (\text{ſin.}\,2q)^3 + (\text{ſin.}\,3q)^3 \ldots\ldots + (\text{ſin.}\,nq)^3 = \frac{3}{4}\text{ſin.}\,q$
$\left(\frac{1 + \text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,nq - \text{coſ.}\,(n+1)q}{1 - \text{coſ.}\,2q}\right) - \frac{1}{4}\text{ſin.}\,3q\left(\frac{1 + \text{coſ.}\,3q - \text{coſ.}\,3nq - \text{coſ.}\,3(n+1)q}{1 - \text{coſ.}\,6q}\right) = 0.$

VI. $ſ = (\text{coſ.}\,q)^3 + (\text{coſ.}\,2q)^3 + (\text{coſ.}\,3q)^3 \ldots\ldots + (\text{coſ.}\,nq)^3 = \frac{3}{4}\text{coſ.}\,q$
$\left(\frac{\text{ſin.}\,nq + \text{ſin.}\,(n+1)q - \text{ſin.}\,q}{\text{ſin.}\,2q}\right) + \frac{1}{4}\text{coſ.}\,3q\left(\frac{\text{ſin.}\,3nq + \text{ſin.}\,3(n+1)q - \text{ſin.}\,3q}{\text{ſin.}\,6q}\right) = 0.$

Eodem modo demonſtratur annihilatio periodorum in reliquis problematibus ab Auctore ſolutis, ſi modo ſigna conſeruentur, qualia ſunt in ſimplici ſerie generatrice; ſecus fiunt ſeries ſine fine continuatae valore ſuo infinitae, quia periodos habent numero infinitas easque omnes inter ſe aequales. Haec de natura periodorum; quod ad ſummam ſerierum ſine fine progredientium attinet, hanc determinaui §. 12. Equidem problema tertium et quartum proprie ad argumentum noſtrum non pertinent, quia ſummam obti-

obtinent infinitam: nil tamen impedit, quo minus omne id, quod indeterminati habent, in ſolam periodum, quam vt vltimam quodam modo conſiderare licet, reiiciamus, quia ſi in genere numerus periodorum integrarum dicatur m, ſumma ſeriei ſemper cenſeri poteſt

$$= \frac{1}{2} m f + \frac{fa + (f-1)b + (f-2)c \ldots\ldots + 2d + e}{f}.$$

§. 16. Notetur denique, fieri in caſu peculiari poſſe, vt periodi reuera non annihilentur, etiamſi in genere annihilatio earum locum habeat. Id contingere poteſt in ſeriebus, quae ex dignitatibus coſinuum formantur, cum numerus f eſt impar ſimulque formula denominatorem habet aequalem nihilo, ſic, vt fractio habeatur, in qua tam denominator quam numerator ſit nihilo aequalis. Dabo huius obſeruationis exemplum. In problematibus praecedentis paragraphi accipiatur ſextum, in quo feries ſupponitur, quae conflatur ex cubis coſinuum. Ponatur in hac ſerie generali $q = \frac{1}{3} p$ ſiue $q = 120°$ habebitur pro hoc caſu $f = 3$ et quaeuis periodus formabitur ex terminis $- \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 1$, qui ſunt cubi ex coſinibus 120°, 240° et 360°. Eſt vero ſumma horum trium terminorum, ex quibus periodus quaevis componitur $= \frac{3}{4}$ nec adeoque annihilatur. Attamen hic caſus minime contradicit formulae problematis ſexti, quia denominator ſecundi membri, nempe ſin. $6\,q$, ſiue ſin. 720°. ſimul etiam euaneſcit, vnde aliqua ſuboritur amphibolia in membro poſteriori formulae ſextae, dum prius membrum aperte

manet

manet $= 0$. Verus valor poſterioris membri eruitur, ſi in fractione

$$\frac{\text{ſin.}\,3nq + \text{ſin.}\,3(n+1)q - \text{ſin.}\,3q}{\text{ſin.}\,6q}$$

ſubſtituatur loco arcus q alius arcus a priori infinite parum diuerſus, nempe arcus $q + \alpha$, retento valore $n = f = 3$, quia valor verus q mox reſtituitur: hoc poſito mutatur praefata fractio in hanc alteram

$$\frac{\text{ſin.}\,9(q+\alpha) + \text{ſin.}\,12(q+\alpha) - \text{ſin.}\,3(q+\alpha)}{\text{ſin.}\,6(q+\alpha)} = (\text{ob } 3q = p)\ \frac{\text{ſin.}\,9\alpha + \text{ſin.}\,12\alpha - \text{ſin.}\,3\alpha}{\text{ſin.}\,6\alpha}.$$

Quia vero arculus α eſt infinite paruus, non differt ſinus ab arcu; ergo habebitur

$$\frac{9\alpha + 12\alpha - 3\alpha}{6\alpha} \text{ ſiue } 3.$$

vnde fit pro noſtro exemplo

$$\frac{\text{ſin.}\,3nq + \text{ſin.}\,3(n+1)q - \text{ſin.}\,3q}{\text{ſin.}\,6q} = 3,$$

atque hic valor multiplicandus erit per $\frac{1}{4}\text{coſ.}(3q + 3\alpha)$ ſiue ſimpliciter per $\frac{1}{4}$; vnde tandem verus periodi valor fit $= \frac{3}{4}$ plane vt res ipſa poſtulat. Atque ſic in hoc caſu ſpeciali contingit, vt ſeries iſta in infinitum continuata veram ſummam habeat infinitam, quae tamen in genere ſpectata eſſe deberet finita, haec contradictio apparens exinde oritur, quod in hoc exemplo ſpeciali periodi non annihilentur nec adeoque hypotheſes noſtrae locum habere poſſint; taceo alia huiuscemodi corollaria ſiue aequiuoca ſiue minus clara.

§. 17. Praeter praememoratum caſum, quo formulae ſummatoriae Boſſutianae ſimul numeratorem ac denominatorem ad nihilum reducunt, non

video

video alios, qui vlla laborent difficultate; minus obvia haec eſt proprietas, quando numerus f eſt impar atque ſeries formatur ex coſinibus eorumue dignitatibus imparibus, vtpote in quibus non ſunt bini atque bini termini, qui ſe mutuo deſtruant, ſed demum omnes termini collecti in vnoquouis cyclo vel periodo ſe deſtruunt, quod patet ex paragrapho decimo quinto. Totam hanc rem vnico illuſtrabo exemplo. Sit ſeries formata ex cubis coſinuum, nempe $(\text{coſ.}\,q)^3 + (\text{coſ.}\,2q)^3 + (\text{coſ.}\,3q)^3 +$ etc. Ponatur in hac ſerie $q = \frac{1}{5}p$ atque adeo $f = 5$; habebitur ſeries numerica $(\text{coſ.}\,72^\circ)^3 + (\text{coſ.}\,144^\circ)^3 + (\text{coſ.}\,216^\circ)^3 +$ etc. in qua periodus quaeuis conſtat ex quinque terminis, poſt quos vsque recurrit eadem: radices cubicae iſtorum terminorum ſiue ipſi coſinus in tabulis habentur

$$0,30901 - 0,80901 - 0,80901 + 0,30901 + 1,00000$$

ergo radices in quauis periodo perfecte annihilantur. Egregia eſt haec proprietas iam diu cognita, quia generalis eſt pro omni numero f; ſed et cubi horum terminorum, ſi aggregantur, ad nihilum reducuntur; quod §. 15. expoſui atque ex formulis ſummatoriis Boſſutianis deduxi. Sunt autem cubi fractionibus decimalibus expreſſi

$$0,02951 - 0,52951 - 0,52941 + 0,02951 + 1,00000,$$

quorum aggregatum rurſus $= 0$, quod exemplum confirmat annihilationem periodorum in propoſita ſerie ex cubis coſinuum, qui arcubus arithmetice progredientibus reſpondent, formata. Supereſt vt

 oſten-

oſtendam modum, quo ſumma ſeriei propoſitae in infinitum continuatae definiatur. Dico autem id obtineri, ſi in formula ſexta §. 15. ab D. *Abbate Boſſut* demonſtrata termini ſin. nq; ſin. $(n+1)q$; ſin. $3nq$ et ſin. $3(n+1)q$ deleantur (§. §. 9 et 10.), quo facto inuenitur ſumma modo dicta

$$ſ = \tfrac{3}{4}\,\text{coſ.}\,q \times \frac{-\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.}\,2q} + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3q \times \frac{-\text{ſin.}\,3q}{\text{ſin.}\,6q} = -\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8} = -\tfrac{1}{2}:$$

Ergo eadem eſt ſumma pro ſerie coſinuum et pro ſerie eorundem cuborum.

Iam vero imprimis notatu dignum puto, quod plane eadem ſumma proueniat, ſi ad ductum §. 12. determinetur; poſito enim

$$f = 5;\ a = 0{,}02951;\ b = -0{,}52951;\ c = -0{,}52951;$$
$$d = 0{,}02951 \text{ et } e = 1{,}00000 \text{ fit } \frac{5a+4b+3c+2d+e}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

Mirabilem iſtum conſenſum, methodum inter geometricam et metaphyſicam, equidem iam abunde manifeſtaui in ſchediaſmate de ſummatoribus ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione, nunc autem amplificaui dum oſtendi interpretationem, quae ſecundum eadem principia noſtra facienda ſit de ſinubus aut coſinubus arcuum infinities ſumtorum pro ratione circumſtantiarum.

§. 18. Denique notari meretur diſcrimen inter poſitionem $fq = p$ et poſitionem generaliorem $fq = gp$ intelligendo per f et g numeros integros qualescunque inter ſe primos; totum nempe diſcrimen in eo conſiſtit, quod termini iidem ordinem ſaltem varient in ſingulis periodis: ſic ſi, verbi gratia

tia ponatur $5q = 3p$ ſiue $q = \frac{3}{5}p$, dabit ſeries $(\text{coſ.}\, q)^3 + (\text{coſ.}\, 2q)^3 + (\text{coſ.}\, 3q)^3 +$ etc. ſeriem numericam, cuius periodi ſunt

$$0{,}52951 + 0{,}02951 + 0{,}02951 - 0{,}52951 + 1{,}00000,$$

vbi termini non aliter quam ordine locationis differunt a terminis in praecedente paragrapho expoſitis; Equidem in his exemplis eadem oritur ſumma pro ſerie in infinitum continuata, quae antea; attamen, ſi generalius res examinatur, fieri poteſt, vt a ſolo terminorum ordine mutato, alia atque alia exoriatur ſumma, etiamſi quaeuis periodus ex iisdem terminis ſit compoſita. Poteſt etiam theoria noſtra de ſeriebus ex ſinibus vel coſinibus aut eorum dignitatibus, applicari ad quasuis ſeries recurrentes, in quibus periodi annihilantur atque ſic ſub facie infinities generaliori vſui venire.

SVM-

SVMMATIO
PROGRESSIONVM

$\text{ſin.}\,\Phi^\lambda + \text{ſin.}\,2\,\Phi^\lambda + \text{ſin.}\,3\,\Phi^\lambda + \ldots\ldots + \text{ſin.}\,n\,\Phi^\lambda$

$\text{coſ.}\,\Phi^\lambda + \text{coſ.}\,2\,\Phi^\lambda + \text{coſ.}\,3\,\Phi^\lambda + \ldots\ldots + \text{coſ.}\,n\,\Phi^\lambda.$

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Poſito $\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = p$ et $\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin}\,\Phi = q$ notum eſt fore

$$\text{coſ.}\,n\,\Phi = \frac{p^n + q^n}{2} \text{ et } \text{ſin.}\,n\,\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}$$

tum vero etiam eſſe $pq = 1$. His poſitis euidens eſt, ſummationem harum ſerierum ſemper reduci poſſe ad has duas ſeries vel progreſſiones geometricas

$$p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \ldots\ldots + p^{n\alpha} = \frac{p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha}{p^\alpha - 1} = \frac{p^\alpha(1 - p^{n\alpha})}{1 - p^\alpha}$$

$$q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} + \ldots\ldots + q^{n\alpha} = \frac{q^{(n+1)\alpha} - q^\alpha}{q^\alpha - 1} = \frac{q^\alpha(1 - q^{n\alpha})}{1 - q^\alpha}$$

§ 2. Quod ſi iam hae duae progreſſiones invicem addantur, vt prodeat iſta

$$\begin{matrix} p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \ldots\ldots + p^{n\alpha} \\ + q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} + \ldots\ldots + q^{n\alpha} \end{matrix} \text{ eius ſumma erit } \begin{matrix} \dfrac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha} \\ + \dfrac{q^\alpha - q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha} \end{matrix}$$

=

$$= \frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^\alpha q^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha}$$

quae expreſſio ob $pq = 1$ transformatur in hanc

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - 1 + q^{n\alpha}}{2 - p^\alpha - q^\alpha}$$

quae porro ob

$p^\alpha + q^\alpha = 2\,\mathrm{coſ.}\,\alpha\Phi$ et $p^{(n+1)\alpha} + q^{(n+1)\alpha} = 2\,\mathrm{coſ.}\,(n+1)\alpha\Phi$ et $p^{n\alpha} + q^{n\alpha} = 2\,\mathrm{coſ.}\,n\alpha\Phi$

reducitur ad hanc formam:

$$\frac{\mathrm{coſ.}\,\alpha\Phi - \mathrm{coſ.}\,(n+1)\alpha\Phi - 1 + \mathrm{coſ.}\,n\alpha\Phi}{1 - \mathrm{coſ.}\,\alpha\Phi} = -1 + \frac{\mathrm{coſ.}\,(n\alpha\Phi) - \mathrm{coſ.}\,(n+1)\alpha\Phi}{1 - \mathrm{coſ.}\,\alpha\Phi}$$

quae ergo eſt ſumma ſeriei propoſitae.

§. 3. Sin autem altera noſtrarum progreſſionum ab altera ſubtrahatur, vt habeatur iſta

$$\begin{matrix} +p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \ldots\ldots + p^{n\alpha} \\ -q^\alpha - q^{2\alpha} - q^{3\alpha} + \ldots\ldots - q^{n\alpha} \end{matrix} \quad \text{eius ſumma erit} \quad \begin{matrix} \dfrac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha} \\ \dfrac{-q^\alpha + q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha} \end{matrix}$$

quae partes ad eundem denominatorem reductae producent

$$\left\{\begin{matrix} +p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha \\ -q^\alpha + q^{(n+1)\alpha} + p^\alpha q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} p^\alpha \end{matrix}\right\} : 1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha$$

ob $pq = 1$ vero haec expreſſio ad hanc reducitur

$$\begin{matrix} p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} \\ -q^\alpha + q^{(n+1)\alpha} + 1 - q^{n\alpha} \end{matrix} : 2 - p^\alpha - q^\alpha$$

et porro ob

$$p^{\alpha}-q^{\alpha}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi \text{ et } p^{(n+1)\alpha}-q^{(n+1)\alpha}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(n+1)\alpha\Phi$$
$$\text{et } p^{n\alpha}-q^{n\alpha}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\alpha\Phi$$

in hanc transformatur expreſſionem

$$\frac{(\text{ſin.}\,\alpha\Phi-\text{ſin.}\,(n+1)\alpha\Phi)+\text{ſin.}\,(n\alpha\Phi)}{1-\text{coſ.}\,\alpha\Phi}\sqrt{-1}.$$

§. 4. Deſignemus breuitatis gratia ſummas harum ſerierum, vltimo termino ſeu generali praefigendo ſignum ſummationis $\int$, ita vt bini caſus euoluti praebeant ſequentes ſummationes

$$\int(p^{n\alpha}+q^{n\alpha})=-1+\frac{\text{coſ.}\,(n\alpha\Phi)-\text{coſ.}\,(n+1)\alpha\Phi}{1-\text{coſ.}\,\alpha\Phi}, \text{ et}$$
$$\int(p^{n\alpha}-q^{n\alpha})=\frac{(\text{ſin.}\,\alpha\Phi+\text{ſin.}\,(n\alpha\Phi)-\text{ſin.}\,(n+1)\alpha\Phi)}{1-\text{coſ.}\,\alpha\Phi}(\sqrt{-1})$$

ex quibus formulis facile erit omnes caſus propoſitos deducere.

§. 5. Sit igitur primo $\lambda=1$, vt habeantur hae duae ſeries ſummandae:

$$s=\text{ſin.}\,\Phi+\text{ſin.}\,2\Phi+\text{ſin.}\,3\Phi+\ldots\ldots+\text{ſin.}\,n\Phi \text{ ſiue } s=\int\text{ſin.}\,n\Phi \text{ et}$$
$$t=\text{coſ.}\,\Phi+\text{coſ.}\,2\Phi+\text{coſ.}\,3\Phi+\ldots\ldots+\text{coſ.}\,n\Phi \text{ ſiue } t=\int\text{coſ.}\,n\Phi$$

cum igitur ſit

$$\text{ſin.}\,n\Phi=\frac{p^n-q^n}{2\sqrt{-1}} \text{ et } \text{coſ.}\,n\Phi=\frac{p^n+q^n}{2}$$

habebimus

$$2s\sqrt{-1}=\int(p^n-q^n) \text{ et } 2t=\int(p^n+q^n)$$

vnde ex paragrapho praecedente ſtatim nanciſcimur ob $\alpha=1$

$$2s\sqrt{-1}=\frac{(\text{ſin.}\,\Phi+\text{ſin.}\,n\Phi-\text{ſin.}\,(n+1)\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi}\sqrt{-1} \text{ et}$$
$$2t=-1+\frac{\text{coſ.}\,n\Phi-\text{coſ.}\,(n+1)\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi} \text{ ideoque}$$

$s=$

$s = \frac{ſin.\,\Phi + ſin.\,n\Phi - ſin.\,(n+1)\Phi}{2(1 - coſ.\,\Phi)}$ et $t = -\frac{1}{2} + \frac{coſ.\,n\Phi - coſ.\,(n+1)\Phi}{2(1 - coſ.\,\Phi)}$.

§. 6. Sit nunc $\lambda = 2$ et ſtatuamus iterum

$s = ſin.\,\Phi^2 + ſin.\,2\Phi^2 + \ldots\ldots + ſin.\,n\Phi^2$ ſiue $s = \int ſin.\,n\Phi^2$ et

$t = coſ.\,\Phi^2 + coſ.\,2\Phi^2 + \ldots\ldots + coſ.\,n\Phi^2$ ſiue $t = \int coſ.\,n\Phi^2$

cum nunc ſit

$$ſin.\,n\Phi^2 = \frac{p^{2n} - 2p^n q^n + q^{2n}}{-4} = \tfrac{1}{2} - \frac{p^{2n} - q^{2n}}{4} \text{ et}$$

$$coſ.\,n\Phi^2 = \frac{p^{2n} + 2p^n q^n + q^{2n}}{4} = +\tfrac{1}{2} + \frac{p^{2n} + q^{2n}}{4}$$

habebimus has formulas

$$4s = 2\int 1 - \int (p^{2n} + q^{2n}) \text{ et } 4t = 2\int 1 + \int (p^{2n} + q^{2n})$$

vbi cum numerus terminorum ſit n, manifeſtum eſt fore $\int 1 = n$; hinc quia $\alpha = 2$, ex ſuperioribus erit

$$\int (p^{2n} + q^{2n}) = -1 + \frac{coſ.\,2n\Phi - coſ.\,2(n+1)\Phi}{1 - coſ.\,2\Phi}$$

quibus valoribus ſubſtitutis, facta diuiſione per 4 obtinebimus

$$s = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{coſ.\,2n\Phi + coſ.\,2(n+1)\Phi}{4(1 - coſ.\,2\Phi)} \text{ et } t = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{coſ.\,2n\Phi - coſ.\,2(n+1)\Phi}{4(1 - coſ.\,2\Phi)}$$

atque hinc ſtatim liquet fore

$s + t = n$, prorſus vti rei natura poſtulat.

§. 7. Statuamus nunc $\lambda = 3$ et ſeries ſummandas ita repraeſentemus

$s = ſin.\,\Phi^3 + ſin.\,2\Phi^3 + \ldots\ldots + ſin.\,n\Phi^3$ ſiue $s = \int ſin.\,n\Phi^3$ et

$t = coſ.\,\Phi^3 + coſ.\,2\Phi^3 + \ldots\ldots + coſ.\,n\Phi^3$ ſiue $t = \int coſ.\,n\Phi^3$.

 Cum

Cum nunc ſit

$$\text{ſin.}\, n\Phi^3 = \frac{p^{3n} - 3p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} - q^{3n}}{-8\sqrt{-1}} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, n\Phi^3 = \frac{p^{3n} + 3p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} + q^{3n}}{8}$$

vnde ob $pq = 1$ conſequimur

$$s = \frac{-1}{8\sqrt{-1}} \int (p^{3n} - q^{3n}) \frac{-3p^n + 3q^n}{-8\sqrt{-1}} = \frac{-1}{-8\sqrt{-1}} \int (p^{3n} - q^{3n}) + \frac{3}{8\sqrt{-1}} \int (p^n - q^n)$$

tum vero

$$t = +\tfrac{1}{8} \int (p^{3n} + q^{3n}) + \tfrac{3}{8} \int (p^n + q^n)$$

quod ſi nunc valores ſupra inuentos hic ſubſtituamus, ambae ſummae quaeſitae ita prodibunt expreſſae

$$s = -\frac{\text{ſin.}\,\Phi - \text{ſin.}\,3n\Phi + \text{ſin.}\,(3n+1)\Phi)}{8(1 - \text{coſ.}\,3\Phi)} + \frac{3\,\text{ſin.}\,\Phi + 3\,\text{ſin.}\,n\Phi - 3\,\text{ſin.}\,(n+1)\Phi}{8(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$$

$$t = -\tfrac{1}{2} + \frac{\text{coſ.}\,3n\Phi - \text{coſ.}\,3(n+1)\Phi}{8(1 - \text{coſ.}\,3\Phi)} + \frac{3\,\text{coſ.}\,n\Phi - 3\,\text{coſ.}\,(n+1)\Phi}{8(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}.$$

§. 8. Sit nunc $\lambda = 4$ ita vt quaerantur hae ſummae

$s = \text{ſin.}\,\Phi^4 + \text{ſin.}\,2\Phi^4 + \ldots\ldots + \text{ſin.}\,n\Phi^4$ ſiue $s = \int \text{ſin.}\,n\Phi^4$ et
$t = \text{coſ.}\,\Phi^4 + \text{coſ.}\,2\Phi^4 + \ldots\ldots + \text{coſ.}\,n\Phi^4$ ſiue $t = \int \text{coſ.}\,n\Phi^4$.

Cum igitur ſit

$$\text{ſin.}\, n\Phi^4 = \frac{p^{4n} - 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} - 4p^nq^{3n} + q^{4n}}{+16}$$

$$\text{et coſ.}\, n\Phi^4 = \frac{p^{4n} + 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} + 4p^nq^{3n} + q^{4n}}{16}$$

ob $pq = 1$ ſequuntur hi valores

$$s = \tfrac{1}{16} \int (p^{4n} + q^{4n}) - \tfrac{1}{4} \int (p^{2n} + q^{2n}) + \tfrac{3}{8} \int 1 \text{ et}$$
$$t = \tfrac{1}{16} \int (p^{4n} + q^{4n}) + \tfrac{1}{4} \int (p^{2n} + q^{2n}) + \tfrac{3}{8} \int 1$$

valo-

valoribus igitur quos ſupra dedimus ſubſtitutis erit

$$s = \frac{3n}{8} + \frac{3}{16} + \frac{\text{coſ.}\,4n\Phi - \text{coſ.}\,4(n+1)\Phi}{16(1-\text{coſ.}\,4\Phi)} - \frac{\text{coſ.}\,2n\Phi + \text{coſ.}\,2(n+1)\Phi}{4(1-\text{coſ.}\,2\Phi)} \text{ et}$$

$$t = \frac{3n}{8} - \frac{5}{16} + \frac{\text{coſ.}\,4n\Phi - \text{coſ.}\,4(n+1)\Phi}{16(1-\text{coſ.}\,2\Phi)} + \frac{\text{coſ.}\,2n\Phi - \text{coſ.}\,2(n+1)\Phi}{4(1-\text{coſ.}\,2\Phi)}$$

ſicque facile erit etiam maiores valores exponentis λ euoluere.

§. 9. Quod ſi iam quaeratur, cuiusmodi ſummae hinc ſint proditurae, ſi iſtae ſeries in infinitum continuentur, non exigua circumſpectione erit vtendum. Primo enim ſi exponens λ fuerit numerus par, euidens eſt, ſumto pro n numero infinito, ſummas harum ſerierum etiam fore infinite magnas; verum ſi λ fuerit numerus impar, tum nihil eſt, quod has ſummas in infinitum augere poſſit, tota autem quaeſtio huc redigitur, vt valores formularum ſinus $n\alpha\Phi$ et coſ. $n\alpha\Phi$ aſſignentur quando pro n numeri infinite magni accipiuntur, perſpicuum autem eſt hos valores hoc caſu aeque a termino vsque ad terminum -1 variari poſſe, ac ſi n eſſet numerus finitus, vnde ſi res in ſe ſpectetur, nihil certi de his ſummis affirmari licet, cum quaecunque ſumma proferretur, ſi inſuper vnus pluresue termini adderentur, prorſus alia ſumma eſſet proditura; Interim tamen ab illuſtri Auctore precedentis diſſertrtionis ſummae hoc caſu per rationes metaphycas perquam ingenioſe aſſignantur, quibus in analyſi perfecte acquieſcere queamus.

§ 10. Cum autem in his ſeriebus aeque ac in omnibus aliis non conuergentibus, notio ſummae

 pro-

proprie locum inuenire nequeat, quandoquidem quotcunque etiam termini actu addantur tamen nunquam ad ſummam determinatam peruenitur; Iam pridem validiſſimis rationibus innixus admonui his caſibus voci ſummae alium ſignificatum ad analyſin magis accommodatum tribui debere, quam nouam notionem ita conſtitui debere cenſeo, vt ſumma cuiusque ſeriei infinitae, ſiue fuerit conuergens ſiue divergens, vocetur ea formula analytica, ex cuius euolutione eae ſeries naſcantur, hacque admiſſa definitione omnia dubia circa huiusmodi ſummationes ſponte euaneſcunt.

§. 11. Quod quo clarius appareat, conſideremus primam ſeriem ſupra exhibitam

$$s = \text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,2\,\Phi + \text{ſin.}\,3\,\Phi + \ldots\ldots + \text{ſin.}\,n\,\Phi$$

pro qua inuenimus

$$\frac{\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,n\,\Phi - \text{ſin.}\,(n+1)\,\Phi}{2\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$$

in quam expreſſionem formulae $\text{ſin.}\,n\,\Phi$ et $\text{ſin.}\,(n+1)\,\Phi$ propter vltimum terminum ingrediuntur, quod ſi ergo ſeries reuera in infinitum continuetur; ob nullum terminum vltimum etiam hae formulae ſponte excedunt, ita vt hoc caſu fiat $s = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{2\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$, quae etiam ea ipſa eſt formula, ex cuius euolutione iſta ſeries elicitur, vnde vi meae definitionis haec formula in analyſi recte pro ſumma iſtius ſeriei haberi poteſt, quod idem de altera ſerie

$$s = \text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\Phi + 3\,\Phi + \ldots\ldots + \text{coſ.}\,n\,\Phi$$

eſt

eſt tenendum, pro qua inuenimus

$$t = -\tfrac{1}{2} + \frac{\text{coſ.}\, n\Phi - \text{coſ.}\,(n+1)\Phi}{2(1-\text{coſ.}\,\Phi)}$$

omiſſo enim poſtremo membro vtpote a termino vltimo pendente, ſumma per meam definitionem vtique erit $t = -\frac{1}{2}$ quod cum non tam facile pateat, notandum eſt, hunc valorem natum eſſe ex formula $t = \frac{\text{coſ.}\,\Phi - 1}{2(1-\text{coſ.}\,\Phi)}$, quem valorem ſeriei propoſitae eſſe aequalem ita oſtendi poteſt: Multiplicetur vtrinque per $2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi$ fierique debebit

$$\text{coſ.}\,\Phi - 1 = \begin{cases} 2\,\text{coſ.}\,\Phi + 2\,\text{coſ.}\,2\Phi + 2\,\text{coſ.}\,3\Phi + 2\,\text{coſ.}\,4\Phi \\ -2\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi - 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,3\Phi \end{cases}$$

cum nunc ſit in genere

$$2\,\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b = \text{coſ.}\,(a-b) + \text{coſ.}\,(a+b) \text{ erit}$$

$$\begin{array}{ll} 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2 = 1 + \text{coſ.}\,2\Phi & 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,4\Phi = \text{coſ.}\,3\Phi + \text{coſ.}\,5\Phi \\ 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi = \text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,3\Phi & 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,5\Phi = \text{coſ.}\,4\Phi + \text{coſ.}\,6\Phi \\ 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,3\Phi = \text{coſ.}\,2\Phi + \text{coſ.}\,4\Phi & 2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,6\Phi = \text{coſ.}\,5\Phi + \text{coſ.}\,7\Phi \\ & \text{etc.} \end{array}$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequalitas manifeſto in oculos incurrit, prodibit enim

$$\begin{aligned} \text{coſ.}\,\Phi - 1 = {} & 2\,\text{coſ.}\,\Phi + 2\,\text{coſ.}\,2\Phi + 2\,\text{coſ.}\,3\Phi + 2\,\text{coſ.}\,4\Phi \\ & -1 - \text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,2\Phi - \text{coſ.}\,3\Phi - \text{coſ.}\,4\Phi \text{ etc.} \\ & - \text{coſ.}\,2\Phi - \text{coſ.}\,3\Phi - \text{coſ.}\,4\Phi \end{aligned}$$

§. 12. Iisdem obſeruatis cautelis etiam pro caſu $\lambda = 3$ quo poſueramus

$$s = \text{ſin.}\,\Phi^3 + \text{ſin.}\,2\Phi^3 + \text{ſin.}\,3\Phi^3 + \text{etc. in infinitum}$$

et $t = \text{coſ.}\,\Phi^3 + \text{coſ.}\,2\Phi^3 + \text{coſ.}\,3\Phi^3 + \text{coſ.}\,4\Phi^3 + \text{etc. in infinitum}$

ſum-

ſumma harum ſerierum infinitarum ita erunt expreſſae

$$s = -\frac{\sin. 3\Phi}{8(1-\cos. 3\Phi)} + \frac{3\sin. \Phi}{8(1-\cos. \Phi)} \text{ et } t = -\frac{1}{2}$$

hic quidem non tam facile apparet, harum formularum euolutionem ad ipſas has ſeries perducere, nihilo vero minus certum eſt, perfectam aequalitatem locum habere, id quod, qui in hoc calculi genere ſatis ſunt exercitati, perſpicient. Interim tamen veritatem poſterioris ſummationis hoc modo oſtendiſſe iuuabit, cum ſit

$$\cos. a^3 = \tfrac{3}{4}\cos. a + \tfrac{1}{4}\cos. 3a$$

ſeries haec in duas ſequentes reſoluitur

$$t = \tfrac{3}{4}(\cos. \Phi + \cos. 2\Phi + \cos. 4\Phi \text{ etc.})$$
$$+ \tfrac{1}{4}(\cos. 3\Phi + \cos. 6\Phi + \cos. 9\Phi \text{ etc.})$$

prioris autem ſeriei ſumma ex precedentibus eſt $\frac{3}{4}. -\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ poſterioris vero ob eandem rationem ſumma eſt $\frac{1}{4}. -\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$ vnde ambae coniunctim faciunt ſummam $-\frac{1}{2}$.

SVMMATIO GENERALIS

INFINITARVM ALIARVM PROGRESSIONVM AD HOC GENVS REFERENDARVM.

Theorema.

Si cognita fuerit ſummatio huius progreſſionis

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots\ldots + Nz^n$$

tum

tum ſemper etiam has progreſſiones ſummare licebit

$$S = A x \text{ſin.}\, \Phi + B x^2 \text{ſin.}\, 2\Phi + C x^3 \text{ſin.}\, 3\Phi + \ldots\ldots N x^n \text{ſin.}\, n\Phi$$

et $$T = A x \text{coſ.}\, \Phi + B x^2 \text{coſ.}\, 2\Phi + C x^3 \text{coſ.}\, 3\Phi + \ldots\ldots N x^n \text{coſ.}\, n\Phi.$$

Demonſtratio.

Cum ſumma progreſſionis

$$A z + B z^2 + C z^3 \ldots\ldots + N z^n$$

ſit certa quaedam functio quantitatis variabilis z, deſignetur ea hac formula $\Delta : z$; tum vero ponendo vt ante

$$p = \text{coſ.}\, \Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \Phi \quad \text{et} \quad q = \text{coſ.}\, \Phi - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \Phi,$$

vt fiat

$$\text{ſin.}\, n\Phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(p^n - q^n) \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\, n\Phi = \tfrac{1}{2}(p^n + q^n);$$

ſi hae formulae in propoſitis ſeriebus ſubſtituantur, earum ſummae ita expreſſae obtinebuntur

$$2S\sqrt{-1} = \Delta : px - \Delta : qx \quad \text{et} \quad 2T = \Delta : px + \Delta : qx$$

vbi notandum, in vtraque formula quantitates imaginarias litteris p et q inuolutas ſponte ſe deſtruere, ita, vt pro ſummis S et T valores reales ſint proditur; atque haec ſummatio perinde ſuccedet, ſiue propoſitae ſeries in infinitum progrediantur, ſiue alicubi terminentur.

Exempl. 1.

Sint omnes coëfficientes A, B, C .. = 1 et ſeries in infinitum continuetur; eritque $\Delta : z = \frac{z}{1-z}$; hinc ergo pro ſerie priore

$S = x\, \text{ſin.}\, \Phi + x^2\, \text{ſin.}\, 2\Phi + x^3\, \text{ſin.}\, 3\Phi + x^4\, \text{ſin.}\, 4\Phi + \ldots$ in infi-

 habe-

habebitur

$$2 S \sqrt{-1} = \frac{px}{1-px} - \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p-q)x}{1-(p+q)x+pqx^2}$$

quae expreſſio ob $p-q=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $p+q=2\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $pq=1$ praebebit

$$S = \frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-2x\,\text{coſ.}\,\Phi+x^2}.$$

Pro altera vero ſerie

$$T = x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2\,\text{coſ.}\,2\Phi + x^3\,\text{coſ.}\,3\Phi + \ldots\ldots \text{ in infinit.}$$

fiet $2T = \frac{px}{1-px} + \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p+q)x-2pq.x^2}{1-(p+q)x+pq.x^2}$

ſiue $T = \frac{x\,\text{coſ.}\,\Phi - x^2}{1-2x\,\text{coſ.}\,\Phi+x^2}.$

Coroll. 1.

Hinc igitur ſi $x=1$, oriuntur ſummationes ſupra datae, ſcilicet

$$S = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{2(1-\text{coſ.}\,\Phi)} = \tfrac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$$

et $T = -\frac{1}{2}$

qui caſus eo magis eſt notatu dignus, quod ſinguli termini ſunt quantitates variabiles, cum tamen ſumma ſit quantitas conſtans.

Coroll. 2.

Semper autem in genere quantitatem x ita aſſumere licebit, vt ſumma ſeriei datae quantitati a fiat aequalis; pro priore ſerie ſinuum autem erit

$$\frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-2x\,\text{coſ.}\,\Phi+x^2} = a;$$

ac ſi hinc littera x determinetur, certo erit

$$a = x\,\text{ſin.}\,\Phi + x^2\,\text{ſin.}\,2\Phi + x^3\,\text{ſin.}\,3\Phi + \ldots\ldots$$

ſimi-

ſimilique modo ſi ſtatuatur

$$\frac{x\,\text{coſ.}\,\Phi - x^2}{1 - 2x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2} = a$$

ex eaque valor litterae x eruatur; etiam erit

$$a = x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2\,\text{coſ.}\,2\Phi + x^3\,\text{coſ.}\,3\Phi + \ldots\ldots$$

Exempl. 2.

Sit nunc

$$\Delta : z = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots\ldots \text{ in infinit.}$$

$= \log.\frac{1}{1-z}$; ita, vt ſeries propoſitae iam ſint

$$S = x\,\text{ſin.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}x^2\,\text{ſin.}\,2\Phi + \tfrac{1}{3}x^3\,\text{ſin.}\,3\Phi + \ldots\ldots$$

et $T = x\,\text{coſ.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}x^2\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{1}{3}x^3\,\text{coſ.}\,3\Phi + \ldots\ldots$

habebimus

$$2S\sqrt{-1} = \log.\frac{1}{1-px} - \log.\frac{1}{1-qx} = \log.\frac{1-qx}{1-px}$$

ſiue

$$2S\sqrt{-1} = \frac{1 - x\,\text{coſ.}\,\Phi + x\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 - x\,\text{coſ.}\,\Phi - x\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

pro cuius formulae reductione conſideretur haec forma

$$\log.\frac{f + g\sqrt{-1}}{f - g.\sqrt{-1}}$$

de qua conſtat, ſi ponatur $\frac{g}{f} = \text{tang.}\,\omega$, hunc logarithmum fore $= 2\omega.\sqrt{-1}$; hinc ergo quaeratur angulus ω, vt ſit

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 - x\,\text{coſ.}\,\Phi};$$

vnde protenus ſequitur $S = \omega$; pro altera progreſſione cum ſit

$$2T = \log.\frac{1}{1-px} + \log.\frac{1}{1-qx} = -\log.(1 - 2x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2)$$

 habe-

habetur

$$T = -\frac{1}{2} \log. (1 - 2x \operatorname{coſ}. \Phi + x^2).$$

Coroll.

Pro priore ergo progreſſione cum ſit

$$\frac{x \operatorname{ſin}. \Phi}{1 - x \operatorname{coſ}. \Phi} = \operatorname{tang}. \omega$$

hinc elicitur

$$x = \frac{\operatorname{tang}. \omega}{\operatorname{ſin}. \Phi + \operatorname{coſ}. \Phi \operatorname{tang}. \omega} = \frac{\operatorname{ſin}. \omega}{\operatorname{ſin}. (\Phi + \omega)}$$

qua valore ſubſtituto nanciſcimur hanc ſummationem attentione maxime dignam

$$\omega = \frac{\operatorname{ſin}. \omega \operatorname{ſin}. \Phi}{\operatorname{ſin}. (\Phi + \omega)} + \frac{\operatorname{ſin}. \omega^2 \operatorname{ſin}. 2\Phi}{2 \operatorname{ſin}. (\Phi + \omega)^2} + \frac{\operatorname{ſin}. \omega^3 \operatorname{ſin}. 3\Phi}{3. \operatorname{ſin}. (\Phi + \omega)^3}$$
$$+ \frac{\operatorname{ſin}. \omega^4 \operatorname{ſin}. 4\Phi}{4. \operatorname{ſin}. (\Phi + \omega)^4} + \ldots\ldots\ldots$$

vbi ſi $\omega = \frac{\pi}{2}$, vt ſit $\operatorname{ſin}. \omega = 1$; et $\operatorname{ſin}. (\Phi + \omega) = \operatorname{coſ}. \Phi$ oritur haec ſummatio maxime concinna

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\operatorname{ſin}. \Phi}{1. \operatorname{coſ}. \Phi} + \frac{\operatorname{ſin}. 2\Phi}{2. \operatorname{coſ}. \Phi^2} + \frac{\operatorname{ſin}. 3\Phi}{3. \operatorname{coſ}. \Phi^3} + \ldots\ldots\ldots$$

quam ſeriem iam olim in calculo differentiali ex diuerſiſſimis principiis ſum adeptus; quae eo magis memorabilis erat viſa, quod vtcunque angulus Φ accipiatur, ſumma feriei ſemper maneat eadem $= \frac{\pi}{2}$.

OBSER-

OBSERVATIONES VARIAE CIRCA SERIES, EX SINIBVS VEL COSINIBVS ARCVVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM FORMATAS.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Quae ab Illuſtr. *Bernoulli* in Commentariis noſtris nuper commentata inuenimus, de ſummatione ſerierum quas ſinus vel coſinus arcuum arithmetice progredientium formant, meditationibus hiſce meis occaſionem ſuppeditarunt, quas quidem primum penitus ſupprimere decreui, quum non ſolum non ſatis digeſtae mihi viderentur, ſed etiam particulares tantum quasdam continere obſeruationes ſuper argumento, quod latiſſimam habere extenſionem videtur. At tamen quum ex vltima diſſertatione Illuſtr. *Bernoulli* certior factus ſim, Celeb. *de Boſſut* in Actis Academiae Scientiarum Pariſinae pro Anno 1769. varia propoſuiſſe Theoremata iis analoga, quae ipſe inueneram, et Illuſtr. *Eulerus* in Diſſertatione cum Illuſtr. Academia noſtra nuper communicata, elegantiſſimam propoſuerit Methodum ſummandi ſeries, quae ex quibuscunque ſinuum vel coſinuum arcuum arith-

arithmetice progredientium, conflantur; veniam me facile impetraturum exiſtimaui, ſi ea quae de hoc argumento meditata habui euulgauerim, licet cum inuentis tantorum virorum vix comparari mereantur.

2. Theorema 1. *Propoſita progreſſione ſinuum, pro arcubus arithmeticam progreſſionem conſtituentibus*

$$\text{ſin.}\,z+\text{ſin.}(z+v)+\text{ſin}\,(z+2v)+\text{ſin.}(z+3v)+\ldots+\text{ſin.}(z+nv),$$

eius ſumma erit

$$=\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,v}=\frac{\text{ſin.}(z+\frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}\,v}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,v}.$$

Demonſtratio.

Ponatur ſumma progreſſionis propoſitae $=S$ et multiplicando vtrinque per 2 coſ. v prodibit:

$$2S\,\text{coſ.}\,v=2\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,v+2\,\text{ſin.}(z+v)\,\text{coſ.}\,v+2\,\text{ſin}\,(z+2v)\,\text{coſ.}\,v\ldots$$
$$+2\,\text{ſin}\,(z+nv)\,\text{coſ.}\,v=$$
$$=\text{ſin.}(z-v)+\text{ſin}\,z+2\,\text{ſin}\,(z+v)+2\,\text{ſin}\,(z+2v)\ldots.$$
$$+2\,\text{ſin.}(z+(n-1)v)+\text{ſin.}(z+nv)+\text{ſin.}(z+(n+1)v),$$

ex quo deducitur

$$2S(1-\text{coſ}\,v)=\text{ſin.}\,z-\text{ſin.}(z-v)+\text{ſin.}(z+nv)-\text{ſin}\,(z+(n+1)v),$$

hincque

$$S=\frac{\text{coſ}\,(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,v}=\frac{\text{ſin.}(z+\frac{1}{2}n\,v)\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(n+1)\,v}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,v}.$$

Idem vero et hoc modo demonſtrari poteſt, multiplicetur progreſſio noſtra per 2 ſin. v, vt prodeat

$$2S\,\text{ſin.}\,v=2\,\text{ſin.}\,z\,\text{ſin.}\,v+2\,\text{ſin.}(z+v)\,\text{ſin.}\,v+2\,\text{ſin.}(z+2v)\,\text{ſin}\,v$$
$$\ldots+2\,\text{ſin.}(z+nv)\,\text{ſin.}\,v$$
$$=\text{coſ.}(z-v)+\text{coſ.}\,z-\text{coſ.}(z+nv)-\text{coſ.}(z+(n+1)v).$$

Hinc

Hinc igitur fiet

$$S = \frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v} \text{ vti ſupra, ob}$$

$\text{ſin.}v = 2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v$; $\text{coſ.}(z-v)+\text{coſ}\,z = 2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v\,\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)$ et $\text{coſ.}(z+nv)+\text{coſ.}(z+(n+1)v) = 2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v\,\text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)$.

Omnium autem facillima merito habenda eſt ſequens demonſtratio. Multiplicetur progreſſio propoſita per $2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v$, fietque

$$2\,S\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v = 2\,\text{ſin.}z\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v + 2\,\text{ſin.}(z+v)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v + 2\,\text{ſin.}(z+2v)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v \ldots + 2\,\text{ſin.}(z+nv)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v$$

$$= \text{coſ.}(z-\tfrac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+\tfrac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots + \text{coſ.}(z+\tfrac{1}{2}v) + \text{coſ.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots - \text{coſ.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

ideoque

$$S = \frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v} = \frac{\text{ſin.}(z+\frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(n+1)v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

3. Cel. *Boſſut* ſequentem exhibet ſummam progreſſionis noſtrae

$$S = \frac{\text{ſin.}\,v\,(\text{coſ.}(z-v) + \text{coſ.}\,z - \text{coſ.}(z+nv) - \text{coſ.}(z+(n+1)v))}{1 - \text{coſ.}\,2v}$$

at ob $1 - \text{coſ.}\,2v = 2\,\text{ſin.}\,v^2$, ea redire inuenitur ad hanc

$$S = \frac{\text{coſ.}(z-v) + \text{coſ.}\,z - \text{coſ.}(z+nv) - \text{coſ.}(z+(n+1)v)}{2\,\text{ſin.}\,v},$$

quam in ſecunda demonſtratione exhibuimus. Et conſenſus quidem binarum harum expreſſionum

$$\frac{\text{ſin.}\,z - \text{ſin.}(z-v) + \text{ſin.}(z+nv) - \text{ſin.}(z+(n+1)v)}{2(1-\text{coſ.}\,v)} = S \text{ et}$$

$$S = \frac{\text{coſ.}(z-v) + \text{coſ.}\,z - \text{coſ.}(z+nv) - \text{coſ.}(z+(n+1)v)}{2\,\text{ſin.}\,v},$$

tam

tam perſpicuus eſt, vt eidem explicando, immorari non ſit neceſſe.

4. Ex Theoremate noſtro iam quidem intelligitur, quaenam ſit ſumma progreſſionis noſtrae, ſi ea cum termino aliquo ſin. $(z + n v)$ deſinere ſupponatur, at ſi haec progreſſio ex infinito terminorum numero conflata intelligatur, ita vt ſit $n = \infty$, ſtatui quidem poſſet

$$S = \frac{\text{coſ.}(z - \frac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z + (\infty + \frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v},$$

quum vero $z + (\infty + \frac{1}{2})v$ plurimos valores, immo nonnunquam infinitos recipere poſſit, proprie quidem loquendo ſumma progreſſionis noſtrae pro numero terminorum infinito manebit indeterminata; at ſi per ſummam intelligamus cum Illuſtr. *Bernoulli* valorem, qui inter omnes poſſibiles valores ſummae medium tenet, pro caſu noſtro propoſito ſumma progreſſionis

$$\text{Sin.}\, z + \text{ſin.}\,(z + v) + \text{ſin.}\,(z + 2v)$$

in infinitum continuatae ſtatuenda erit $\frac{\text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v}$, vnde ſi $v = z$ fiet ſumma progreſſionis

$$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,4z \text{ etc.} = \tfrac{1}{2}\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}z,$$

cui valor prorſus coincidit cum eo, quem Illuſtr. *Bernoulli* in ſuis Diſſertationibus exhibet. Quoties arcus v ad circumferentiam circuli rationem habuerit rationalem, ita vt ſit $(n + 1)v = 2m\pi$ deſignante π ſemiperipheriam circuli, toties progreſſio noſtra

$$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,(z + v) + \text{ſin.}\,(z + 2v) \text{ etc.}$$

ſuas

ſuas habebit periodos poſt quas iidem termini denuo recurrunt, cum enim peruentum fuerit ad $\text{ſin.}(z+nv)$ hunc inſequentes coincident cum terminis $\text{ſin.}\,z$, $\text{ſin.}(z+v)$ etc., erit enim

$$\text{ſin.}(z+(n+1)v) = \text{ſin.}(2m\pi+z) = \text{ſin.}\,z$$
$$\text{ſin.}(z+(n+2)v) = \text{ſin.}(2m\pi+z+v) = \text{ſin}\,(z+v) \text{ etc.}$$

Hoc autem caſu facile demonſtrari poterit, ſummam pro vnaquaque periodo, ſenſu ab Illuſtr. *Bernoulli* adoptato, ſtatui debere $\frac{\text{coſ.}\,(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v}$, ſcilicet vt habeatur valor medius ſummarum pro periodo quavis, eae omnes in vnam colligi debent ſummam quam diuidendo per numerum terminorum periodi, reſultabit valor iſte medius. Habebuntur autem hinc ſequentes ſummae

1. $$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{1}{2}v)}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

2. $$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{3}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

3. $$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{5}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

$n+1$ $$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

quare valor medius quaeſitus erit

$$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v} - \frac{\text{coſ}(z+\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{3}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{5}{2}v)\ldots-\text{coſ.}(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2(n+1)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

At infra demonſtrabitur eſſe

$$\text{coſ.}(z+\tfrac{1}{2}v)+\text{coſ.}(z+\tfrac{3}{2}v)+\text{coſ.}(z+\tfrac{5}{2}v)\ldots+\text{coſ.}(z+\tfrac{2n+1}{2}v)$$

$$=\frac{\text{coſ.}(z+\frac{n+1}{2}v)\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v},$$

et quum pro noſtro caſu ſit $\frac{n+1}{2}v=m\pi$, erit ſin. $\frac{n+1}{2}v=0$; ex quo omnino liquet, ſummam progreſſionis in infinitum continuatae

$$\text{ſin.}z+\text{ſin.}(z+v)+\text{ſin.}(z+2v)+\text{ſin.}(z+3v)\,\text{etc.}=\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

Quamuis haec quae iam demonſtrata ſunt, valeant tantummodo pro caſu quo v ad circumferentiam circuli rationem habuerit rationalem, tamen rite quoque adplicari poterunt ad eum caſum, quo haec ratio ſit irrationalis, ſcilicet in iſto caſu periodus recurrens non niſi poſt infinitum terminorum numerum locum habere intelligitur, at per ſe quidem patet demonſtrationis noſtrae vim eandem manere ſiue numeri m et n ſtatuantur finiti, ſiue infiniti. Dum Illuſtr. *Bernoulli* ex valore

$$S=\frac{\text{ſin.}v(\text{coſ.}(z-v)+\text{coſ.}z-\text{coſ.}(z+nv)-\text{coſ.}(z+(n+1)v))}{1-\text{coſ.}2v}$$

qui progreſſioni noſtrae cum termino ſin. $(z+nv)$ deſinenti reſpondet, eum eruit qui pro valore numeri n infinito locum habet; dicit terminos coſ. $(z+nv)$ et coſ. $(z+(n+1)v)$ vel potius coſ. $(z+nv)$ $+$ coſ. $(z+(n+1)v)$ ponendos eſſe nihilo aequales. Facile autem perſpicitur hoc ſenſu proprio accipiendum non eſſe; nam poſito coſ. $(z+nv)=0$, ſimul coſ.

coſ. $(z+(n+1)v)$ non ſtatui debet $=0$, neque coſ. $(z+nv)$ + coſ $(z+(n+1)v)$ aequalis nihilo ſtatui poterit; ſed dictum Illuſtr. Viri ita interpretandum videtur, vt hi termini coſ. $(z+nv)$ + coſ. $(z+(n+1)v)$ negligi debeant, quia multifarios agnoſcunt valores, et de quibus inſuper iam demontum iuimus eorum ſummam nihilo aequalem eſſe cenſendam.

5. Ex Theoremate noſtro generali infinita alia particularia deduci poterunt, quorum tantum nonnulla quae attentionem potiſſimum merentur, heic adponam. Si igitur ponatur $v=mz$ ſumma progreſſionis

$$\text{ſin.}z+\text{ſin.}(m+1)z+\text{ſin.}(2m+1)z+\text{ſin.}(3m+1)z\ldots+\text{ſin.}(mn+1)z \text{ erit}$$

$$=\frac{\text{ſin.}\frac{nm+2}{2}.z\,\text{ſin.}\frac{m(n+1)}{2}z.}{\text{ſin.}\frac{m}{2}z}$$

Hinc ſi

$$m=1 \text{ erit } \text{ſin.}z+\text{ſin.}2z+\text{ſin.}3z+\text{ſin.}4z\ldots+\text{ſin.}(n+1)z=\frac{\text{ſin.}\frac{n+2}{2}.z\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}z}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}$$

$$m=2 \quad \text{ſin.}z+\text{ſin.}3z+\text{ſin.}5z+\text{ſin.}7z\ldots+\text{ſin.}(2n+1)z=\frac{\text{ſin.}\frac{2n+2}{2}z\,\text{ſin.}\frac{2(n+1)}{2}z}{\text{ſin.}\frac{2}{2}z}$$

$$m=3 \quad \text{ſin.}z+\text{ſin.}4z+\text{ſin.}7z+\ldots+\text{ſin.}(3n+1)z=\frac{\text{ſin.}\frac{3n+2}{2}.z\,\text{ſin.}\frac{3(n+1)}{2}z}{\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$$

$$m=4 \quad \text{ſin.}z+\text{ſin.}5z+\text{ſin.}9z+\ldots+\text{ſin.}(4n+1)z=\frac{\text{ſin.}\frac{4n+2}{2}.z\,\text{ſin.}\frac{4(n+1)}{2}z}{\text{ſin.}\frac{4}{2}z}.$$

Porro ſi ſtatuatur $z=\eta x$ et $v=\theta x$, erit quoque

$$\text{ſin.}\eta x+\text{ſin.}(\eta+\theta)x+\text{ſin.}(\eta+2\theta)x\ldots+\text{ſin}(\eta+n\theta)x=\frac{\text{ſin.}\frac{2\eta+n\theta}{2}.x\,\text{ſin.}\frac{\theta(n+1)}{2}x}{\text{ſin.}\frac{\theta}{2}x}$$

 quare

quare ſi $\eta = 2$, $\theta = 1$ fiet

$$\text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x \ldots + \text{ſin.}(2+n)x = \frac{\text{ſin.}\frac{4+n}{2}.x\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}.x}{\text{ſin}\,\frac{1}{2}x}$$

ſi $\eta = 2$; $\theta = 3$ erit

$$\text{ſin.}\,2x + \text{ſin}\,5x + \text{ſin.}\,8x \ldots + \text{ſin.}(3n+2)x = \frac{\text{ſin.}\frac{4+3n}{2}.x\,\text{ſin.}\frac{3(n+1)}{2}x}{\text{ſin.}\frac{3}{2}x}$$

ſi $\eta = 3$; $\theta = 1$ erit

$$\text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x + \text{ſin.}\,5x \ldots + \text{ſin.}(n+3)x = \frac{\text{ſin.}\frac{6+n}{2}.\,x\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}x}{\text{ſin.}\frac{1}{2}x}$$

ſi $\eta = 3$; $\theta = 2$ erit

$$\text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,5x + \text{ſin.}\,7x \ldots + \text{ſin.}(2n+3)x = \frac{\text{ſin.}\frac{6+2n}{2}x\,\text{ſin.}\frac{2(n+1)}{2}x}{\text{ſin.}\,x}.$$

6. Pro caſu quo numerus terminorum in progreſſione noſtra ſtatuitur infinitus, habebitur poſito $v = mz$

$$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}(m+1)z + \text{ſin.}(m+2)z + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\frac{2-m}{2}.z}{2\,\text{ſin.}\frac{m}{2}z}.$$

Hinc ſi $m = 1$

$$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,4z \text{ etc.} = \tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}z$$

ſi $m = 2$; $\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,5z + \text{etc.} = \dfrac{1}{2\,\text{ſin.}\,z}$

ſi $m = 3$; $\text{ſin}\,z + \text{ſin.}\,4z + \text{ſin.}\,7z + \text{etc.} = \dfrac{\text{coſ.}\frac{1}{2}z}{2\,\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$

ſi $m = 4$; $\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,5z + \text{ſin.}\,9z + \text{etc.} = \dfrac{\text{coſ.}\,z}{2\,\text{ſin.}\,2z} = \dfrac{1}{4\,\text{ſin.}\,z}$

Deinde ex combinatione harum progreſſionum, aliae pro-

proprietates pro huiusmodi progreſſionibus detegi poterunt, ſic quum ſit

$$\text{ſin.}\, z + \text{ſin.}\, 5z + \text{ſin.}\, 9z + \text{etc.} = \frac{1}{4\, \text{ſin.}\, z},$$

ſi ex huius progreſſionis duplo, ſubtrahatur

$$\text{ſin.}\, z + \text{ſin.}\, 3z + \text{ſin.}\, 5z + \text{etc.} = \frac{1}{2\, \text{ſin.}\, z},$$

patebit eſſe

$$\text{ſin.}\, z - \text{ſin.}\, 3z + \text{ſin.}\, 5z - \text{ſin.}\, 7z + \text{ſin.}\, 9z - \text{etc.} = 0,$$

quod etſi haud parum paradoxon videtur, tamen notioni ſummae ab Illuſtr. *Bernoulli* adhibitae optime conſentit. Porro ſi ponatur $z = \eta x$ et $v = \theta x$ generatim habebitur

$$\text{ſin.}\,\eta x + \text{ſin}\,(\eta+\theta)x + \text{ſin.}\,(\eta+2\theta)x + \text{ſin.}\,(\eta+3\theta)x + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{2\eta-\theta}{2}x}{2\,\text{ſin.}\,\frac{\theta}{2}x}$$

ſic ſi $\eta = 2$ et $\theta = 1$ fiet

$$\text{ſin.}\, 2x + \text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{3}{2}x}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}x}$$

ſi $\eta = 3$ et $\theta = 1$ habebitur

$$\text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 4x + \text{ſin.}\, 5x + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{5}{2}x}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}x}$$

ſi $\eta = 3$ et $\theta = 2$ erit

$$\text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 5x + \text{ſin.}\, 7x + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{4}{2}x}{2\,\text{ſin.}\,x} = \frac{\text{coſ.}\, 2x}{2\,\text{ſin.}\, x}$$

quibus plures huiusmodi expreſſiones addi poſſent, ſi opus foret.

7. Theorema II. *Propoſita progreſſione coſinuum pro arcubus arithmeticam progreſſionem conſtituentibus*

$$\text{coſ.}\,z+\text{coſ.}(z+v)+\text{coſ.}(z+2v)+\text{coſ.}(z+3v)\ldots+\text{coſ.}(z+nv);$$

eius ſumma erit $= \dfrac{\text{coſ.}(z+\frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\frac{(n+1)}{2}v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$

Demonſtratio.

Variae quidem demonſtrationes huius Theorematis adferri poſſent conſimiles iis, quas pro Theoremate primo in medium adduxi, breuitatis tamen gratia, ſimpliciſſimam tantum proponere licebit. Poſita igitur ſumma quaeſita S, ſi progreſſio noſtra multiplicetur per $2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v$, fiet

$$2S.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v = 2\,\text{coſ.}\,z\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v + 2\,\text{coſ.}(z+v)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v + 2\,\text{coſ.}(z+2v)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\ldots$$
$$+\,2\,\text{coſ.}(z+nv)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v$$
$$= -\text{ſin.}(z-\tfrac{1}{2}v)+\text{ſin.}(z+\tfrac{1}{2}v)+\text{ſin.}(z+\tfrac{3}{2}v)\ldots$$
$$-\,\text{ſin.}(z+\tfrac{1}{2}v)-\text{ſin.}(z+\tfrac{3}{2}v)\ldots+\text{ſin.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v),$$

ideoque

$$S = \frac{-\text{ſin.}(z-\frac{1}{2}v)+\text{ſin.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v} = \frac{\text{coſ.}(z+\frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(n+1)v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

Si in formula allata tam numerator quam denominator multiplicentur per $\text{ſin.}\frac{1}{2}v$ vel $\text{coſ.}\frac{1}{2}v$ ſequentes prodibunt expreſſiones:

$$S = \frac{\text{coſ.}\,z-\text{coſ.}(z-v)+\text{coſ.}(z+nv)-\text{coſ.}(z+(n+1)v)}{2(1-\text{coſ.}\,v)}$$

$$S = \frac{-\text{ſin.}(z-v)-\text{ſin.}\,z+\text{ſin.}(z+nv)+\text{ſin.}(z+(n+1)v)}{2\,\text{ſin.}\,v}$$

quarum poſterior in ſequentem transmutari poterit

$$S = \frac{\text{ſin.}\,v(-\text{ſin.}(z-v)-\text{ſin.}\,z+\text{ſin.}(z+nv)+\text{ſin.}(z+(n+1)v))}{1-\text{coſ.}\,2v}.$$

8. Pro

8. Pro caſu n infiniti, fiet ſumma progreſſionis noſtrae $S = -\frac{\text{ſin}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin}.\frac{1}{2}v}$, quae igitur ſi $z = v$, euadet $= -\frac{1}{2}$ omnino vti Illuſtr. *Bernoulli* hanc ſummam aſſignauit. Vt vero pateat, ſummam modo dictam veritati eſſe conſentaneam; ſimile ratiocinium adhibere licebit, ac id quo ſupra vſi ſumus ad demonſtrandum, quod ſumma progreſſionis ſin. z + ſin. $(z+v)$ etc. in infinitum continuatae ſit $= \frac{\text{coſ}.(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin}.\frac{1}{2}v}$. Scilicet ſi ponatur $(n+1)v = m\pi$, in ſerie noſtra coſinuum poſt terminum coſ. $(z+nv)$, recurrent iidem termini qui in Periodo coſ. z, coſ. $(z+v)$, coſ. $(z+2v)$ habebantur, erit enim

$$\text{coſ}.(z+(n+1)v) = \text{coſ}.(2m\pi+z) = \text{coſ}.\,z$$

$$\text{coſ}.(z+(n+2)v) = \text{coſ}.(2m\pi+z+v) = \text{coſ}.(z+v)$$

et ſic in ſequentibus. Pro hac autem Periodo valor generalis ſummae, qui medius erit inter omnes valores poſſibiles, inuenietur =

$$\frac{-\text{ſin}.(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin}.\frac{1}{2}v} + \frac{\text{ſin}.(z+\frac{1}{2}v)+\text{ſin}.(z+\frac{3}{2}v)+\text{ſin}.(z+\frac{5}{2}v)\ldots+\text{ſin}.(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2(n+1)\,\text{ſin}.\frac{1}{2}v}$$

Ex ſupra demonſtratis autem liquet eſſe

$$\text{ſin}.(z+\tfrac{1}{2}v)+\text{ſin}.(z+\tfrac{3}{2}v)+\text{ſin}.(z+\tfrac{5}{2}v)+\text{ſin}.(z+(n+\tfrac{1}{2})v) = \frac{\text{ſin}.(z+\frac{n+1}{2}v)\,\text{ſin}.\frac{n+1}{2}v}{\text{ſin}.\frac{1}{2}v}$$

quocirca quum ſit $(n+1)v = 2m\pi$, erit omnino ſin. $\frac{n+1}{2}.v =$ ſin. $m\pi = 0$, ita vt valor iſte medius ſummarum pro Periodo

coſ.

$$\cos. z + \cos.(z+v) + \cos.(z+2v) \ldots + \cos.(z+nv)$$

ſtatui debeat

$$= -\frac{\sin.(z - \frac{1}{2}v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

9. Ex Theoremate noſtro II^{do} generali, plurima particularia deduci poſſunt, quorum potiora quaedam heic recenſere iuuabit. Poſito itaque $v = mz$ erit ſumma progreſſionis

$$\cos.z + \cos.(m+1)z + \cos.(2m+1)z + \cos.(3m+1)z \ldots + \cos.(mn+1)z = \frac{\cos.\frac{nm+2}{2}.z\,\sin.\frac{m(n+1)z}{2}}{\sin.\frac{mz}{2}}.$$

Hinc ſi

$m=1$ erit $\cos.z + \cos.2z + \cos.3z + \cos.4z \ldots + \cos.(n+1)z$

$$= \frac{\cos.\frac{n+2}{2}z\,\sin.\frac{n+1}{2}.z}{\sin.\frac{1}{2}z}$$

$m=2$ $\cos.z + \cos.3z + \cos.5z + \cos.7z \ldots + \cos.(2n+1)z$

$$= \frac{\cos.\frac{2n+2}{2}.z\,\sin.\frac{2(n+1)}{2}.z}{\sin.\frac{2}{2}z}$$

$m=3$ $\cos.z + \cos.4z + \cos.7z + \cos.10z \ldots + \cos.(3n+1)z$

$$= \frac{\cos.\frac{3n+2}{2}.z\,\sin.\frac{3(n+1)}{2}.z}{\sin.\frac{3}{2}z}.$$

Deinde ſi ponatur $z = \eta x$ et $v = \theta x$, fiet

$$\cos.\eta x + \cos.(\eta+\theta)x + \cos.(\eta+2\theta)x \ldots + \cos.(\eta+n\theta)x = \frac{\cos.\frac{2\eta+n\theta}{2}x\,\sin.\frac{\theta(n+1)}{2}x}{\sin.\frac{\theta x}{2}}$$

quamobrem fiet

pro

$$\text{pro } \eta = 2;\ \theta = 1;\ \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x \ldots + \cos. (n+2)x = \frac{\cos. \frac{4+n}{2} x \sin. \frac{n+1}{2} x}{\sin. \frac{1}{2} x}$$

$$\eta = 2;\ \theta = 3;\ \cos. 2x + \cos. 5x + \cos. 8x + \ldots + \cos. (3n+2)x = \frac{\cos. \frac{4+3n}{2} x \sin. \frac{3(n+1)}{2} x}{\sin. \frac{3}{2} x}$$

$$\eta = 3;\ \theta = 1;\ \cos. 3x + \cos. 4x + \cos. 5x \ldots + \cos. (n+3)x = \frac{\cos. \frac{6+n}{2} x \sin. \frac{n+1}{2} x}{\sin. \frac{1}{2} x}$$

$$\eta = 3;\ \theta = 2;\ \cos. 3x + \cos. 5x + \cos. 7x \ldots + \cos. (2n+3)x = \frac{\cos. \frac{6+2n}{2} x \sin. \frac{2(n+1)}{2} x}{\sin. x},$$

Pro caſu autem n infiniti, ſequentes ſerierum infinitarum obtinebimus ſummationes

$$\cos. z + \cos. 2z + \cos. 3z + \cos. 4z \text{ etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\cos. z + \cos. 3z + \cos. 5z + \cos. 7z \text{ etc.} = 0$$

$$\cos. z + \cos. 4z + \cos. 7z + \cos. 10z \text{ etc.} = \frac{\sin. \frac{1}{2} z}{2 \sin. \frac{3}{2} z}$$

$$\cos. z + \cos. 5z + \cos. 9z + \cos. 13z \text{ etc.} = \frac{\sin. z}{2 \sin. 2z} = \frac{1}{4 \cos. z}.$$

10. Licet ex ſuperioribus perſpicue intelligatur ſerierum

$$\sin. z + \sin. (z+v) + \sin. (z+2v) + \sin. (z+3v) \text{ etc. et}$$
$$\cos. z + \cos. (z+v) + \cos. (z+2v) + \cos. (z+3v) \text{ etc.}$$

ſummas ſtatuendas eſſe

$$\frac{\cos. (z - \frac{1}{2} v)}{2 \sin. \frac{1}{2} v} \quad \text{et} \quad \frac{-\sin. (z - \frac{1}{2} v)}{2 \sin. \frac{1}{2} v},$$

quicunque valores angulis z et v tribuantur, memorabilis tamen heic locum habet exceptio, pro caſu quo ſtatuitur $v = 0$, pro iſto ſcilicet caſu nul-

 lum

lum eſt dubium, quin vtriusque ſeriei valor fiat infinitus, et prioris quidem $= \infty$ ſin. z, poſterioris vero $= \infty$ coſ. z. Vt vero pateat expreſſiones ſupra allatas, pro caſu $v = 0$ locum non habere, regrediendum eſt ad ea ratiocinia quorum ope easdem eruimus. Et in §. 4. primum inuenimus ſummam progreſſionis

$$\text{ſin.}z + \text{ſin.}(z+v) + \text{ſin.}(z+2v) + \text{ſin.}(z+3v) \text{ etc.}$$

ſtatuendam eſſe

$$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v} - \frac{\text{coſ.}(z+\frac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+\frac{3}{2}v) - \text{coſ.}(z+\frac{5}{2}v) \ldots - \text{coſ.}(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2(n+1)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

$$= \frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v} - \frac{\text{coſ.}(z+\frac{n+1}{2}v)\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}v}{2(n+1)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v^2}.$$

Quum igitur pro caſu praeſenti ob $v = 0$ et $(n+1)v = 2m\pi$ ſit tam ſin.$\frac{1}{2}v = 0$, quam ſin.$\frac{n+1}{2}v = 0$ expreſſio

$$\frac{\text{ſin.}\frac{n+1}{2}v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v} \text{ abibit in } (n+1)\frac{\text{coſ.}\frac{n+1}{2}v}{\text{coſ.}\frac{1}{2}v} = (n+1)\,\text{coſ.}\frac{n+1}{2}v,$$

quo valore ſupra ſubſtituto, prodibit ſumma noſtrae ſeriei

$$= \frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v) - \text{coſ.}(z+\frac{n+1}{2}v)\,\text{coſ.}\frac{n+1}{2}v}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v},$$

vbi quum iterum tam numerator, quam denominator euaneſcant, habebitur fractionis quaeſitae valor

$$= \frac{\text{ſin.}(z-\frac{1}{2}v) + (n+1)\,\text{ſin.}(z+(n+1)v)}{2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v} = \frac{n+2}{2}\text{ſin.}z = \infty\,\text{ſin.}z.$$

Caete-

Caeterum haec explicatio tantum locum habet pro notione ſummae ab Illuſtr. *Bernoulli* adhibitae, eoque reſpectu quod pro ſerie

$$\text{ſin.}z+\text{ſin.}(z+v)+\text{ſin.}(z+2v)+\text{ſin.}(z+3v)\text{ etc.}$$

dentur periodi poſt quas iidem termini recurrunt et quarum periodorum ſummae euaneſcunt, quod quidem pro caſu $v=0$ locum non habet, niſi ſimul ſit $z=0$. Quod ſi igitur retineamus generalem expreſſionem ſummae

$$S=\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

pro caſu $v=0$ et $n=\infty$ eadem in hanc abibit

$$S=\frac{\text{ſin.}(z-\frac{1}{2}v)+(2n+1)\text{ſin.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v}=(n+1)\,\text{ſin.}\,z=\infty\,\text{ſin.}\,z,$$

prorſus vti rei natura poſtulat. Similiter autem euinci poteſt, cur pro caſu $v=0$, expreſſio

$$\text{coſ.}z+\text{coſ.}(z+v)+\text{coſ.}(z+2v)+\text{coſ.}(z+3v)\text{etc.}=-\frac{\text{ſin.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$$

rite ſibi conſtare nequeat. Praeterea obſeruari quoque meretur, expreſſiones ſupra allatas pro ſeriebus infinitis ſinuum vel coſinuum, admittendas non eſſe pro caſibus $v=2m\pi$ denotante π circumferentiam circuli, per ſe enim patet ſeriem

$$\text{ſin.}z+\text{ſin.}(2m\pi+z)+\text{ſin.}(4m\pi+z)+\text{ſin.}(6m\pi+z)+\text{etc.}$$

prorſus congruere cum hac

$$\text{ſin.}\,z+\text{ſin.}\,z+\text{ſin.}\,z\text{ etc.}$$

11. Quoniam progreſſio ſinuum in Theoremate I^{mo} conſiderata, in has binas reſoluitur

$$\text{ſin.}\, z(1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots + \text{coſ.}\, nv)$$
$$+ \text{coſ.}\, z(\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv),$$

progreſſio autem coſinuum in Theoremate II^{do} exhibita ex his duabus componatur

$$\text{coſ.}\, z(1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots + \text{coſ.}\, nv)$$
$$- \text{ſin.}\, z(\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv),$$

euidens eſt, ſummam progreſſionum in binis noſtris Theorematibus conſideratarum ſponte innoteſcere, ſi cognitae fuerint ſummae harum progreſſionum

$$\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v + \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv \quad \text{et}$$
$$1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots\ldots + \text{coſ.}\, nv.$$

Quamuis autem in harum progreſſionum ſummis indagandis, eosdem ſequi liceat procedendi modos, quos in Theorematibus ſuperioribus adhibuimus, taman aliam haud parum elegantem adiiciam Methodum, illi analogam quam ab Illuſtr. *Eulero* adhibitam inueni. Primum igitur pro inueſtiganda ſumma

$$\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots + \text{ſin.}\, nv$$

notare conuenit eſſe;

$$\text{ſin.}\, v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2 - (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{coſ.}\, v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2 + (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2}{2}$$

$$\text{ſin.}\, 2v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4 - (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{coſ.}\, 2v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4 + (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4}{2}; \text{ et}$$

et in genere

$$\text{ſin.}\,nv = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n} - (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n}}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{coſ.}\,nv = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n} + (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n}}{2}.$$

Hinc ſi ſtatuatur

$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1}) = p \text{ et } (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1}) = q,$$

habebimus

$$\text{ſin.}\,v + \text{ſin.}\,2v + \text{ſin.}\,3v \ldots + \text{ſin.}\,nv =$$
$$\frac{p^2 + p^4 + p^6 \ldots + p^{2n}}{2\sqrt{-1}} - \frac{q^2 + q^4 + q^6 \ldots + q^{2n}}{2\sqrt{-1}}$$

harum prior pars ſic exprimi poterit:

$$\frac{p^{n+1}}{2\sqrt{-1}}(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 \ldots + q^{n-1}), \text{ ob } pq = 1$$

poſterior autem ad hanc redibit formam:

$$-\frac{q^{n+1}}{2\sqrt{-1}}(q^{n-1} + q^{n-2}p + q^{n-3}p^2 \ldots + p^{n-1})$$

vtramque autem multiplicando per $(p-q)$, obtinebimus

$$\frac{(p^{n+1} - q^{n+1})(p^n - q^n)}{2\sqrt{-1}(p-q)} = \frac{\text{ſin.}\frac{n+1}{2}v\,\text{ſin.}\frac{n}{2}v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

Hinc vero ſimul perſpicitur, ſi loco v ſubſtituatur quodcunque eius multiplum mv, ſummationem huiusmodi progreſſionis

$$\text{ſin.}\,mv + \text{ſin.}\,2mv + \text{ſin.}\,3mv + \ldots + \text{ſin.}\,mnv$$

aeque facile inſtitui, inuenietur enim ſumma huius progreſſionis

$$= \frac{\text{ſin} \frac{m(n+1)}{2} v \, \text{ſin.} \frac{mn}{2} v}{\text{ſin.} \frac{m}{2} v}.$$

Deinde ſi propoſita fuerit progreſſio

$$\text{coſ.} v + \text{coſ.} 2v + \text{coſ.} 3v \ldots + \text{coſ.} nv,$$

ea ad hanc redibit

$$\frac{p^2 + p^4 + p^6 \ldots + p^{2n}}{2} + \frac{q^2 + q^4 + q^6 \ldots + q^{2n}}{2},$$

quae iterum ob $pq = 1$, in ſequentem transformatur

$$\frac{p^{n+1}}{2}(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 \ldots + q^{n-1})$$

$$+ \frac{q^{n+1}}{2}(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 \ldots + q^{n-1}).$$

Vnde ſi haec expreſſio multiplicetur per $(p-q)$ prodibit ſumma progreſſionis noſtrae

$$= \frac{(p^{n+1} + q^{n+1})(p^n - q^n)}{2(p-q)} = \frac{\text{coſ.} \frac{n+1}{2} v \, \text{ſin.} \frac{n}{2} v}{\text{ſin.} \frac{1}{2} v}.$$

At ſi proponatur progreſſio

$$1 + \text{coſ.} v + \text{coſ.} 2v + \text{coſ.} 3v \ldots + \text{coſ.} nv,$$

ea ſic exprimi poterit

$$\frac{1 + p^2 + p^4 + p^6 \ldots + p^{2n}}{2} + \frac{1 + q^2 + q^4 + q^6 \ldots + q^{2n}}{2},$$

quae ob $pq = 1$, in iſtam transformatur:

$$\frac{p^n}{2}(p^n + p^{n-1}q + p^{n-2}q^2 \ldots + q^n)$$

$$+ \frac{q^n}{2}(p^n + p^{n-1}q + p^{n-2}q^2 \ldots + q^n),$$

ex

ex quo obtinetur ſumma progreſſionis propoſitae

$$= \frac{(p^n + q^n)(p^{n+1} - q^{n+1})}{2(p-q)} = \frac{\text{coſ.}\frac{nv}{2}\,\text{ſin.}\frac{n+1}{2}v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

12. Eodem modo quo iam ſummas indagauimus ſerierum, quae ex ſinubus vel coſinubus arcuum arithmetice progredientium formantur, etiam inueſtigari poterunt ſummae progreſſionum, quae ex quadratis, cubis vel quibuscunque aliis poteſtatibus huiusmodi ſinuum vel coſinuum componuntur. Quum enim quaecunque poteſtas ſinus vel coſinus alicuius arcus, per ſinus vel coſinus huius arcus et eius multiplorum explicetur, ſummatio poteſtatum ex ſinubus et coſinubus, ad ſummationem ſinuum vel coſinuum ſponte reduci intelligitur. Si ſcilicet ponatur

$\text{coſ.}z + \text{ſin.}z\sqrt{-1} = p$ et $\text{coſ.}z - \text{ſin.}z\sqrt{-1} = q$ erit $\text{coſ.}z = \frac{p+q}{2}$ et $\text{ſin.}z = \frac{p-q}{2\sqrt{-1}}$, tumque in genere

$$\text{coſ.}nz = \frac{p^n + q^n}{2} \text{ et } \text{ſin.}nz = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Hinc igitur patet eſſe

$$\pm 2^{2n}\text{ſin.}z^{2n+1} = \frac{(p-q)^{2n+1}}{2\sqrt{-1}} = \frac{p^{2n+1} + (2n+1)p^{2n}q + \frac{(2n+1)(2n)}{1.2}p^{2n-2}q^2 \ldots - q^{2n-1}}{2\sqrt{-1}}$$

quae aequalitas ob $pq = 1$, ad hanc reduci poteſt

$$\pm 2^{2n}\text{ſin.}z^{2n+1} = \frac{p^{2n+1} - q^{2n+1}}{2\sqrt{-1}} - 2n+1\frac{(p^{2n-1} - q^{2n-1})}{2\sqrt{-1}} + \frac{(2n+1)(2n)}{1.2}\frac{(p^{2n-3} - q^{2n-3})}{2\sqrt{-1}}$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n}\frac{(p-q)}{2\sqrt{-1}}$$

Vnde

vnde deducitur

$$\pm 2^{2n} \text{ſin.}\, z^{2n+1} = \text{ſin.}(2n+1)z - (2n+1)\text{ſin.}(2n-1)z + \frac{(2n+1)2n}{1.2}\text{ſin.}(2n-3)z \ldots \pm \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3.n}\text{ſin.}\, z$$

quae aequalitas etiam hoc modo exprimi poterit:

$$2^{2n} \text{ſin.}\, z^{2n+1} = \frac{2n+1.2n.2n-1\ldots n+2}{1.2.3\ldots n}\text{ſin.}\, z - \frac{2n+1.2n.2n-1\ldots n+3}{1.2.3\ldots n-1}\text{ſin.}\, 3z + \frac{2n+1.2n.2n-1\ldots n+4}{1.2.3\ldots n-2}\text{ſin.}\, 5z \ldots \pm \text{ſin.}(2n+1)z,$$

vbi notare conuenit ſignum ſuperius pro vltimo termino locum habere, ſi n fuerit numerus par, inferius vero ſi n impar eſſe ſupponatur. Simili modo fiet

$$\pm 2^{2n-1} \text{ſin.}\, z^{2n} = \frac{(p-q)^{2n}}{2} = \frac{p^{2n} - 2np^{2n-1}q + \frac{2n(2n-1)}{1.2}p^{2n-2}q^2 \ldots + q^{2n}}{2}$$

quae aequatio ſequentem induit formam:

$$\pm 2^{2n-1} \text{ſin.}\, z^{2n} = \frac{p^{2n}+q^{2n}}{2} - \frac{2n(p^{2n-2}+q^{2n-2})}{2} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\frac{(p^{2n-4}+q^{2n-4})}{2} \ldots\ldots \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n}$$

et in hanc abit

$$\pm 2^{2n-1}\text{ſin.}\, z^{2n} = \text{coſ.}\, 2nz - 2n\,\text{coſ.}(2n-2)z + \frac{2n.2n-1}{1.2}\text{coſ.}(2n-4)z \ldots \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n.2}.$$

Vnde ordine terminorum immutato nanciſcimur

$$2^{2n-1}\text{ſin.}\, z^{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n.2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+2}{1.2.3\ldots n-1}\text{coſ.}\, 2z + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+3}{1.2.3\ldots n-2}\text{coſ.}\, 4z \ldots \pm \text{coſ.}\, 2nz$$

vbi ſiguum + valebit pro n pari, − vero pro n impari. Haec ſi ad caſus ſpeciales adplicemus, obtinebimus

2°. ſin.

$2^0.\,\text{ſin}.z = \text{ſin}.\,z$
$2.\,\text{ſin}.z^2 = 1 - \text{coſ}.\,2z$
$2^2.\,\text{ſin}.z^3 = 3\,\text{ſin}.\,z - \text{ſin}.\,3z$
$2^3.\,\text{ſin}.z^4 = 3 - 4\,\text{coſ}.\,2z + \text{coſ}\,4z$
$2^4.\,\text{ſin}.z^5 = 10\,\text{ſin}.\,z - 5\,\text{ſin}.\,3z + \text{ſin}.\,5z$
$2^5.\,\text{ſin}.z^6 = 10 - 15\,\text{coſ}.2z + 6\,\text{coſ}\,4z - \text{coſ}.6z$
$2^6.\,\text{ſin}.z^7 = 35\,\text{ſin}.\,z - 21\,\text{ſin}.3z + 7\,\text{ſin}.5z - \text{ſin}.7z$
$2^7.\,\text{ſin}.z^8 = 35 - 56\,\text{coſ}.\,2z + 28\,\text{coſ}.4z - 8\,\text{coſ}\,6z + \text{coſ}.8z$
$2^8.\,\text{ſin}.z^9 = 126\,\text{ſin}.z - 84\,\text{ſin}.3z + 36\,\text{ſin}.5z - 9\,\text{ſin}.7z + \text{ſin}.9z$
$2^9.\,\text{ſin}.z^{10} = 126 - 210\,\text{coſ}.2z + 120\,\text{coſ}.4z - 45\,\text{coſ}.6z + 10\,\text{coſ}.8z - \text{coſ}.10z.$

13. Simili modo procedere licebit, pro inueniendis valoribus $\text{coſ}.\,z^m$. Scilicet fiet

$$2^{2n}\text{coſ}.z^{2n+1} = \frac{(p+q)^{2n+1}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(p^{2n+1} + 2n+1.\,p^{2n}q + \frac{(2n+1)2n}{1.\,2}p^{2n-1}q^2 \ldots + q^{2n+1}\right)$$

$$= \frac{p^{2n+1}+q^{2n+1}}{2} + (2n+1)\frac{(p^{2n-1}+q^{2n-1})}{2} + \frac{(2n+1)2n}{1.\,2}\frac{(p^{2n-3}+q^{2n-3})}{2}$$

$$\ldots\ldots + \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.\,2.\,3\ldots n}\frac{(p+q)}{2}$$

$$= \text{coſ}.(2n+1)z + (2n+1)\text{coſ}.(2n-1)z + \frac{(2n+1)2n}{1.\,2}\text{coſ}.(2n-3)z$$

$$\ldots\ldots + \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.\,2.\,3\ldots n}\text{coſ}.\,z.$$

Quae aequalitas etiam ſic exprimi poteſt

$$2^{2n}\text{coſ}.z^{2n+1} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots n+2}{1.\,2.\,3\ldots n}\text{coſ}.\,z + \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots n+3}{1.\,2.\,3\ldots n-1}\text{coſ}.\,3z$$

$$+ \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots n+4}{1.\,2.\,3\ldots n-2}\text{coſ}.\,5z \ldots + \text{coſ}.(2n+1)z.$$

Denique fiet

$$2^{2n-1}\text{coſ}.z^{2n} = \frac{(p+q)^{2n}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(p^{2n} + 2np^{2n-1}q + \frac{2n.\,2n-1}{1.\,2}p^{2n-2}q^2 \ldots + q^{2n}\right)$$

$$= \frac{p^{2n}+q^{2n}}{2} + 2n\frac{(p^{2n-2}+q^{2n-2})}{2} + \frac{2n.2n-1}{1.2}(p^{2n-4}+q^{2n-4})$$

$$\ldots \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n.2}$$

$$= \text{coſ.}\,2nz + 2n\,\text{coſ.}(2n-2)z + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\text{coſ.}(2n-4)z \ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n.2}$$

vel mutato ordine terminorum

$$2^{2n-1}\,\text{coſ.}\,z^{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n.2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+2}{1.2.3\ldots n-1}\text{coſ.}\,2z$$
$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+3}{1.2.3\ldots n-2}\text{coſ.}\,4z \ldots + \text{coſ.}\,2nz.$$

Hinc pro caſibus ſpecialibus, ſequentes conſequemur expreſſiones

$2^0.\text{coſ.}\,z = \text{coſ}\,z$

$2\ \text{coſ.}\,z^2 = 1 + \text{coſ.}\,2z$

$2^2.\text{coſ}\,z^3 = 3\,\text{coſ.}\,z + \text{coſ.}\,3z$

$2^3.\text{coſ}\,z^4 = 3 + 4\,\text{coſ.}\,2z + \text{coſ.}\,4z$

$2^4.\text{coſ.}\,z^5 = 10\,\text{coſ.}\,z + 5\,\text{coſ.}\,3z + \text{coſ.}\,5z$

$2^5.\text{coſ.}\,z^6 = 10 + 15\,\text{coſ}\,2z + 6\,\text{coſ.}\,4z + \text{coſ.}\,6z$

$2^6.\text{coſ.}\,z^7 = 35\,\text{coſ.}\,z + 21\,\text{coſ.}\,3z + 7\,\text{coſ.}\,5z + \text{coſ.}\,7z$

$2^7.\text{coſ.}\,z^8 = 35 + 56\,\text{coſ.}\,2z + 28\,\text{coſ.}\,4z + 8\,\text{coſ.}\,6z + \text{coſ.}\,8z$

$2^8.\text{coſ.}\,z^9 = 126\,\text{coſ.}\,z + 84\,\text{coſ.}\,3z + 36\,\text{coſ.}\,5z + 9\,\text{coſ.}\,7z + \text{coſ.}\,9z$

$2^9.\text{coſ.}\,z^{10} = 126 + 210\,\text{coſ.}\,2z + 120\,\text{coſ.}\,4z + 45\,\text{coſ.}\,6z + 10\,\text{coſ.}\,8z + \text{coſ.}\,10z.$

14. Hiſce praeſuppoſitis facillimum erit aſſignare ſummas progreſſionum ex quibuscunque poteſtatibus ſinuum vel coſinuum pro arcubus arithmetice progredientibus. Sic ſi propoſita fuerit progreſſio:

$$\text{ſin.}\,z^2 + \text{ſin.}\,2z^2 + \text{ſin.}\,3z^2 + \text{ſin.}\,4z^2 \ldots + \text{ſin.}\,nz^2$$

ob $\text{ſin.}\,nz^2 = \frac{1-\text{coſ.}\,2nz}{2}$, progreſſio iſta in hanc mutabitur

$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}(\text{coſ.}\,2z + \text{coſ.}\,4z + \text{coſ.}\,6z + \ldots + \text{coſ.}\,2nz)$, cuius igitur ſumma ex praecedentibus deducitur $\frac{n}{2} - \frac{\text{coſ.}\,(n+1)z\,\text{ſin.}\,nz}{2\,\text{ſin.}\,z}$. Similiter ob $4\,\text{ſin.}\,nz^3 = 3\,\text{ſin.}\,nz - \text{ſin.}\,3nz$ progreſſio

$$\text{ſin.}\,z^3 + \text{ſin.}\,2z^3 + \text{ſin.}\,3z^3 + \text{ſin.}\,4z^3 \ldots + \text{ſin.}\,nz^3$$

in has binas reſoluetur

$$\tfrac{3}{4}(\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,4z \ldots + \text{ſin.}\,nz)$$
$$-\tfrac{1}{4}(\text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,6z + \text{ſin.}\,9z + \text{ſin.}\,12z \ldots + \text{ſin.}\,3nz)$$

quarum ſumma ex praecedentibus fit

$$\frac{3}{4}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{n+1}{2}z\,\text{ſin.}\,\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}z} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\,\frac{3n}{2}z}{\text{ſin.}\,\frac{3}{2}z}.$$

Tum vero et hinc colligitur

$$\text{ſin.}\,z^4 + \text{ſin.}\,2z^4 + \text{ſin.}\,3z^4 + \text{ſin.}\,4z^4 \ldots + \text{ſin.}\,nz^4 =$$
$$\frac{3n}{8} - \frac{4}{8}(\text{coſ.}\,2z + \text{coſ.}\,4z + \text{coſ.}\,6z + \text{coſ.}\,8z + \text{coſ.}\,2nz)$$
$$+ \frac{1}{8}(\text{coſ.}\,4z + \text{coſ.}\,8z + \text{coſ.}\,12z + \text{coſ.}\,16z + \text{coſ.}\,4nz)$$
$$= \frac{3}{8}n - \frac{4}{8}\,\frac{\text{coſ.}\,(n+1)z\,\text{ſin.}\,nz}{\text{ſin.}\,z} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{coſ.}\,2(n+1)z\,\text{ſin.}\,2nz}{\text{ſin.}\,2z}.$$

In genere vero erit

$$\text{ſin.}\,z^{2m+1} + \text{ſin.}\,2z^{2m+1} + \text{ſin.}\,3z^{2m+1} \ldots + \text{ſin.}\,nz^{2m+1} =$$
$$\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+2}{1.\ 2.\ 3\ldots m}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{n+1}{2}z\,\text{ſin.}\,\frac{n}{2}z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}z}$$
$$-\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+3}{1.\ 2.\ 3\ldots m-1}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\,\frac{3n}{2}z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\,\frac{3}{2}z}$$
$$+\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+4)}{1.\ 2.\ 3\ldots m-2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{5(n+1)}{2}z\,\text{ſin}\,\frac{5n}{2}z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\,\frac{5}{2}z}$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{\text{ſin.}\,\frac{(2m+1)(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\,\frac{n(2m+1)}{2}z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\,\frac{2m+1}{2}z}.$$

Nec non

$$\text{ſin.}\,z^{2m}+\text{ſin.}\,2\,z^{2m}+\text{ſin.}\,3\,z^{2m}+\text{ſin.}\,4\,z^{2m}\ldots+\text{ſin.}\,n\,z^{2m}=$$

$$\frac{2\,m(2\,m-1)(2\,m-2)\ldots.\,m+1}{1.\;2.\;3\ldots m}\cdot\frac{n}{2^{2m}}$$

$$-\frac{2\,m(2\,m-1)(2\,m-2)\ldots m+2}{1.\,2.\,3\ldots m-1}\cdot\frac{\text{coſ.}\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,n\,z}{2^{2m-1}\,\text{ſin.}\,z}$$

$$+\frac{2\,m(2\,m-1)(2\,m-2)\ldots m+3}{1.\,2.\,3\ldots m-2}\,\frac{\text{coſ.}\,2\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,2\,n\,z}{2^{2m-1}\,\text{ſin.}\,2\,z}$$

$$\ldots.\pm\frac{\text{coſ.}\,m\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,m\,n\,z}{2^{2m-1}\,\text{ſin.}\,m\,z}.$$

Deinde pro ſummis poteſtatum ex coſinubus habebimus

$$\text{coſ.}\,z^{2m+1}+\text{coſ.}\,2\,z^{2m+1}+\text{coſ.}\,3\,z^{2m+1}+\text{coſ.}\,4\,z^{2m+1}+\ldots\text{coſ.}\,n\,z^{2m+1}=$$

$$\frac{(2\,m+1)(2\,m)(2\,m-1)\ldots.\,m+2}{1.\;2.\;3\ldots m}\,\frac{\text{coſ.}\frac{n+1}{2}\,z\,\text{ſin.}\frac{n}{2}\,z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\frac{1}{2}\,z}$$

$$+\frac{(2m+1)\,2\,m(2m-1)\ldots m+3}{1.\;2.\;3\ldots m-1}\,\frac{\text{coſ.}\frac{3(n+1)}{2}\,z\,\text{ſin.}\frac{3n}{2}\,z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\frac{3}{2}\,z}$$

$$+\frac{(2\,m+1)(2\,m)(2\,m-1)\ldots(m+4)}{1.\;2.\;3\ldots m-2}\,\frac{\text{coſ.}\frac{5(n+1)}{2}\,z\,\text{ſin.}\frac{5n}{2}\,z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\frac{5}{2}\,z}$$

$$\ldots+\frac{\text{coſ.}\frac{(2m+1)(n+1)}{2}\,z\,\text{ſin.}\frac{n(2m+1)}{2}\,z}{2^{2m}\,\text{ſin.}\frac{2m+1}{2}\,z}$$

et

$$\text{coſ.}\,z^{2m}+\text{coſ.}\,2\,z^{2m}+\text{coſ.}\,3\,z^{2m}+\text{coſ.}\,4\,z^{2m}\ldots+\text{coſ.}\,n\,z^{2m}=$$

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+1}{1.\ 2.\ 3\ldots m}\cdot\frac{n}{2^{2m}}+\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+2}{1.\ 2.\ 3\ldots m-1}\,\frac{\text{coſ.}(n+1)z\,\text{ſin.}\,nz}{2^{2m-1}\,\text{ſin.}\,z}+$$

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+3}{1.\ 2.\ 3\ldots m-2}\,\frac{\text{coſ.}\,2(n+1)z\,\text{ſin.}\,2nz}{2^{2m-1}\,\text{ſin.}\,2z}\ldots+\frac{\text{coſ.}\,m(n+1)z\,\text{ſin.}\,mnz}{2^{2m-1}\,\text{ſin.}\,mz}.$$

Adplicatione igitur harum formularum ad caſus ſpeciales facta conſequemur

$$\text{ſin.}\,z\ldots+\text{ſin.}\,nz=\frac{\text{ſin.}\frac{n+1}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin}\,\frac{1}{2}z}$$

$$\text{ſin.}\,z^3\ldots+\text{ſin.}\,nz^3=\frac{3}{4}\frac{\text{ſin.}\frac{(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}-\frac{1}{4}\frac{\text{ſin.}\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$$

$$\text{ſin.}\,z^5\ldots+\text{ſin.}\,nz^5=\frac{10}{16}\frac{\text{ſin.}\frac{n+1}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}-\frac{5}{16}\frac{\text{ſin.}\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$$

$$+\frac{1}{16}\frac{\text{ſin.}\frac{5(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{5nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{5}{2}z}$$

$$\text{ſin.}\,z^7\ldots+\text{ſin.}\,nz^7=\frac{35}{64}\frac{\text{ſin.}\frac{(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}-\frac{21}{64}\frac{\text{ſin.}\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$$

$$+\frac{7}{64}\frac{\text{ſin.}\frac{5(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{5nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{5}{2}z}-\frac{1}{64}\frac{\text{ſin.}\frac{7(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{7nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{7}{2}z}$$

$$\text{ſin.}\,z^2\ldots+\text{ſin.}\,nz^2=\frac{n}{2}-\frac{\text{coſ.}(n+1)z\,\text{ſin.}\,nz}{2\,\text{ſin.}\,z}$$

$$\text{ſin.}\,z^4\ldots+\text{ſin.}\,nz^4=\frac{3n}{8}-\frac{4}{8}\frac{\text{coſ.}(n+1)z\,\text{ſin.}\,nz}{\text{ſin.}\,z}+\frac{1}{8}\frac{\text{coſ.}\,2(n+1)z\,\text{ſin.}\,2nz}{\text{ſin.}\,2z}$$

$$\text{ſin.}\,z^6\ldots+\text{ſin.}\,nz^6=\frac{10n}{32}-\frac{15}{32}\frac{\text{coſ.}(n+1)z\,\text{ſin.}\,nz}{\text{ſin.}\,z}+\frac{6}{32}\frac{\text{coſ.}\,2(n+1)z\,\text{ſin.}\,2nz}{\text{ſin.}\,2z}$$

$$-\frac{1}{32}\frac{\text{coſ.}\,3(n+1)z\,\text{ſin.}\,3nz}{\text{ſin.}\,3z}.$$

Pari modo

$$\text{coſ.}\, z \ldots + \text{coſ.}\, nz = \frac{\text{coſ.}\, \frac{n+1}{2} z\, \text{ſin.}\, \frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} z}$$

$$\text{coſ.}\, z^3 \ldots + \text{coſ.}\, nz^3 = \frac{3}{4} \frac{\text{coſ.}\, \frac{(n+1)}{2} z\, \text{ſin.}\, \frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} z} + \frac{1}{4} \frac{\text{coſ.}\, \frac{3(n+1)}{2} z\, \text{ſin.}\, \frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{3}{2} z}$$

$$\text{coſ.}\, z^5 \ldots + \text{coſ.}\, nz^5 = \frac{10}{16} \frac{\text{coſ.}\, \frac{(n+1)}{2} z\, \text{ſin.}\, \frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} z} + \frac{5}{16} \frac{\text{coſ.}\, \frac{3(n+1)}{2} z\, \text{ſin.}\, \frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{3}{2} z}$$
$$+ \frac{1}{16} \frac{\text{coſ.}\, \frac{5(n+1)}{2} z\, \text{ſin.}\, \frac{5nz}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{5}{2} z}$$

nec non

$$\text{coſ.}\, z^2 \ldots + \text{coſ.}\, nz^2 = \frac{n}{2} + \frac{\text{coſ.}\, (n+1) z\, \text{ſin.}\, nz}{2\, \text{ſin.}\, z}$$

$$\text{coſ.}\, z^4 \ldots + \text{coſ.}\, nz^4 = \frac{3n}{8} + \frac{4}{8} \frac{\text{coſ.}\, (n+1) z\, \text{ſin.}\, nz}{\text{ſin.}\, z} + \frac{1}{8} \frac{\text{coſ.}\, 2(n+1) z\, \text{ſin.}\, 2nz}{\text{ſin.}\, 2z}$$

$$\text{coſ.}\, z^6 \ldots + \text{coſ.}\, nz^6 = \frac{10n}{32} + \frac{15}{32} \frac{\text{coſ.}\, (n+1) z\, \text{ſin.}\, nz}{\text{ſin.}\, z} + \frac{6}{32} \frac{\text{coſ.}\, 2(n+1) z\, \text{ſin.}\, 2nz}{\text{ſin.}\, 2z}$$
$$+ \frac{1}{32} \frac{\text{coſ.}\, 3(n+1) z\, \text{ſin.}\, 3nz}{\text{ſin.}\, 3z}.$$

15. Ex iis quae iam docuimus, facile perſpicitur quales aſſignari debeant ſummae poteſtatum ex huiusmodi ſinubus vel coſinubus in infinitum continuatis. Pro poteſtatibus enim paribus nullum eſt dubium, quin hae ſummae reapſe euadant infinitae. Quod ſummas ex poteſtatibus imparibus ſinuum attinet, illae pro ratione exponentis qua poteſtates exprimuntur, alios atque alios recipient valores, erit enim

$$\int \text{ſin.}\, z = \tfrac{1}{2} \cot.\, \tfrac{z}{2}$$
$$\int \text{ſin.}\, z^3 = \tfrac{3}{8} \cot.\, \tfrac{z}{2} - \tfrac{1}{8} \cot.\, \tfrac{3}{2} z$$
$$\int \text{ſin.}\, z^5 = \tfrac{10}{32} \cot.\, \tfrac{z}{2} - \tfrac{5}{32} \cot.\, \tfrac{3}{2} z + \tfrac{1}{32} \cot.\, \tfrac{5}{2} z.$$

At

At aliter ſe res habet cum ſummis ex poteſtatibus imparibus coſinuum, quippe quae eundem continuo retinent valorem $= -\frac{1}{2}$, erit enim

$$\int \text{coſ.}\ z = -\tfrac{1}{2}$$
$$\int \text{coſ.}\ z^3 = -\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8} = -\tfrac{1}{2}$$
$$\int \text{coſ.}\ z^5 = -\tfrac{10}{32} - \tfrac{5}{32} - \tfrac{1}{32} = -\tfrac{1}{2}.$$

Sed hoc ipſum tamen *in abſtracto* tantum verum eſt, ſcilicet infinitae ab hac lege dantur exceptiones. Quemadmodum enim facile demonſtrari poteſt, ſummam ſeriei infinitae

$$\text{coſ.}\ z + \text{coſ.}\ 2z + \text{coſ.}\ 3z + \text{coſ.}\ 4z \text{ etc.}$$

non ſtatui debere $= -\frac{1}{2}$, ſi fuerit $z = 2m\pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli; ita pro

$$\text{coſ.}\ z^3 + \text{coſ.}\ 2z^3 + \text{coſ.}\ 3z^3 + \text{coſ.}\ 4z^3 \text{ etc.}$$

haec ſumma $-\frac{1}{2}$ non valebit, ſi fuerit vel $z = 2m\pi$, vel $3z = 2m\pi$, tum vero pro

$$\text{coſ.}\ z^5 + \text{coſ.}\ 2z^5 + \text{coſ.}\ 3z^5 + \text{coſ.}\ 4z^5 \text{ etc}$$

exceptio a regula allata ſtatui debet, ſi fuerit vel $z = 2m\pi$, vel $3z = 2m\pi$ vel $5z = 2m\pi$.

16. Eodem modo quo ſummas progreſſionum

$$\text{ſin.}\ z^m + \text{ſin.}\ 2z^m + \text{ſin.}\ 3z^m \ldots + \text{ſin.}\ nz^m$$
$$\text{coſ.}\ z^m + \text{coſ.}\ 2z^m + \text{coſ.}\ 3z^m \ldots + \text{coſ.}\ nz^m$$

indagauimus, erui poſſunt ſummae progreſſionibus aliquanto generalius expreſſis reſpondentes:

$$\text{ſin.}\ z^m + \text{ſin.}\ (z+v)^m + \text{ſin.}(z+2v)^m + \text{ſin.}(z+3v)^m \ldots + \text{ſin.}(z+nv)^m$$
$$\text{coſ.}\ z^m + \text{coſ.}\ (z+v)^m + \text{coſ.}(z+2v)^m + \text{coſ.}(z+3v)^m \ldots + \text{coſ.}(z+nv)^m.$$

Sic

Sic ſi quaeratur ſumma progreſſionis

$$\sin. z^2 + \sin.(z+v)^2 + \sin.(z+2v)^2 + \sin.(z+3v)^2 + \ldots + \sin.(z+nv)^2$$

ea inuenietur

$$\frac{n+1}{2} - \frac{\cos.(2z+nv)\sin.(n+1)v}{2\sin.v}\text{; tum vero erit}$$

$$\sin.z^3 + \sin.(z+v)^3 + \sin.(z+2v)^3 + \sin.(z+3v)^3 \ldots + \sin.(z+nv)^3 =$$

$$\tfrac{3}{4}\cdot\frac{\sin.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v} - \tfrac{1}{4}\frac{\sin.(3z+\frac{3}{2}nv)\sin.\frac{3}{2}(n+1)v}{\sin.\frac{3}{2}v}$$

In genere autem habebitur

$$\sin.z^{2m+1} + \sin.(z+v)^{2m+1} + \sin.(z+2v)^{2m+1} + \ldots + \sin.(z+nv)^{2m+1} =$$

$$A.\frac{\sin.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v} - B\frac{\sin.(3z+\frac{3}{2}nv)\sin.\frac{3(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{3}{2}v} + C\frac{\sin.(5z+\frac{5}{2}nv)\sin.\frac{5(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{5}{2}v}$$

$$\pm\frac{\sin.\left((2m+1)z+\frac{n(2m+1)}{2}v\right)\sin.\frac{(n+1)(2m+1)}{2}v}{2^{2m}\sin.\frac{2m+1}{2}v};$$

$$\sin.z^{2m} + \sin.(z+v)^{2m} + \sin.(z+2v)^{2m} + \sin.(z+3v)^{2m} \ldots + \sin.(z+nv)^{2m} =$$

$$\alpha.n - \beta\frac{\cos.(2z+nv)\sin.(n+1)v}{\sin.v} + \gamma\frac{\cos.(4z+2nv)\sin.2(n+1)v}{\sin.2v}$$

$$\ldots \pm \frac{\cos.(2mz+mnv)\sin.m(n+1)v}{2^{2m-1}\sin.mv};$$

$$\cos.z^{2m+1} + \cos.(z+v)^{2m+1} + \cos.(z+2v)^{2m+1} + \cos.(z+3v)^{2m+1} \ldots \cos.(z+nv)^{2m+1} =$$

$$A.\frac{\cos.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v} + B\frac{\cos.(3z+\frac{3}{2}nv)\sin.\frac{3(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{3}{2}v} + C\frac{\cos.(5z+\frac{5}{2}nv)\sin.\frac{5(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{5}{2}v}$$

$$+\frac{\cos.\left((2m+1)z+\frac{n(2m+1)}{2}v\right)\sin.\frac{(n+1)(2m+1)}{2}v}{2^{2m}\sin.\frac{2m+1}{2}v};$$

$$\cos.z^{2m} + \cos.(z+v)^{2m} + \cos.(z+2v)^{2m} + \cos.(z+3v)^{2m} \ldots + \cos.(z+nv)^{2m} =$$

$\alpha n + \beta$

$$\alpha n + \beta \frac{\cos.(2z+nv)\sin(n+1)v}{\sin. v} + \gamma \frac{\cos.(4z+2nv)\sin. 2(n+1)v}{\sin. 2v}$$
$$\ldots + \frac{\cos.(2mz+mnv)\sin m(n+1)v}{2^{2m-1}\sin. mv}.$$

Heic autem notandum eſt, valores coefficientium, A, B, C etc. α, β, γ ex §. 14. deſumendos eſſe. Ex generalibus vero his expreſſionibus nunc facile perſpicitur, quomodo aſſignari queant ſummae progreſſionum, quae formantur ex quibusuis poteſtatibus ſinuum vel coſinuum pro huiusmodi ſeriebus, quarum exempla attulimus in §§. 5 et 9. Superuacaneum autem eſſet, ad caſus huiusmodi ſpeciales heic deſcendere velle, id tantum obſeruare licebit, quod vti ſupra demonſtrauimus eſſe

$$\cos. z + \cos. 3z + \cos. 5z + \cos. 7z + \text{etc.} = 0,$$

etiam in genere eſſe debere

$$\cos. z^{2m+1} + \cos. 3z^{2m+1} + \cos. 5z^{2m+1} + \cos. 7z^{2m+1} \text{ etc.} = 0.$$

17. Ex principiis ſupra ſtabilitis etiam adornari poſſunt ſummationes huiusmodi ſerierum

$$\sin. z + 2\sin.(z+v) + 3\sin.(z+2v) + 4\sin.(z+3v) \ldots + (n+1)\sin.(z+nv)$$
$$\cos. z + 2\cos.(z+v) + 3\cos.(z+2v) + 4\cos.(z+3v) \ldots + (n+1)\cos.(z+nv).$$

Quod enim priorem attinet poſita eius ſumma S, totaque ſerie in $2\sin.\frac{1}{2}v$ ducta, prodibit

$$2S\sin.\tfrac{1}{2}v = \cos.(z-\tfrac{1}{2}v) + \cos.(z+\tfrac{1}{2}v) + \cos.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots + \cos.(z+(n-\tfrac{1}{2})v)$$
$$-(n+1)\cos(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

at terminorum poſitiuorum ſumma ex Theor. II. deducitur

$$\frac{\text{ſin.}(z+nv)-\text{ſin.}(z-v)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}=\frac{\text{coſ.}\left(z+\tfrac{n-1}{2}v\right)\text{ſin.}\tfrac{n+1}{2}v}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v},$$

vnde conſequimur

$$S=\frac{\text{ſin.}(z+nv)-\text{ſin.}(z-v)}{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2}-\frac{(n+1)\,\text{coſ.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}=\frac{\text{coſ.}(z+\tfrac{n-1}{2}v)\,\text{ſin.}\tfrac{n+1}{2}v}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2}$$
$$-\frac{(n+1)\,\text{coſ.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}.$$

Pro poſteriori habebimus, poſita iterum eius ſumma S et multiplicando per $2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v$

$$2S\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v=-\text{ſin.}(z-\tfrac{1}{2}v)-\text{ſin.}(z+\tfrac{1}{2}v)-\text{ſin.}(z+\tfrac{3}{2}v)\ldots-\text{ſin.}(z+(n-\tfrac{1}{2})v)$$
$$+(n+1)\,\text{ſin.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

vbi terminorum negatiuorum ſumma per Theor. I.

$$=-\frac{\text{coſ.}(z-v)+\text{coſ.}(z+nv)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}=-\frac{\text{ſin.}(z+\tfrac{n-1}{2}v)\,\text{ſin.}\tfrac{n+1}{2}v}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v},$$

quare fiet

$$S=\frac{\text{coſ.}(z+nv)-\text{coſ.}(z-v)}{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2}+\frac{(n+1)\,\text{ſin.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}=-\frac{\text{ſin.}(z+\tfrac{n-1}{2}v)\,\text{ſin.}\tfrac{n+1}{2}v}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2}$$
$$+\frac{(n+1)\,\text{ſin.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}.$$

Quin etiam hinc ſummationes adornari poſſunt, ſerierum ex poteſtatibus ſinuum compoſitarum

$$\text{ſin.}z^m+2\,\text{ſin.}(z+v)^m+3\,\text{ſin.}(z+2v)^m\ldots\ldots+(n+1)\,\text{ſin.}(z+nv)^m \text{ vel}$$
$$\text{coſ.}z^m+2\,\text{coſ.}(z+v)^m+3\,\text{coſ.}(z+2v)^m\ldots\ldots+(n+1)\,\text{coſ.}(z+nv)^m$$

quibus tamen explicandis breuitatis gratia omnino ſuperſedemus. De ſummis tantum ſerierum ſuperiorum

rum in infinitum continuatarum notare iuuat, quod hae ex ſuperioribus expreſſionibus facile deducantur, ſi ii termini negligantur quos numerus n ingreditur. Sic pro priori ſerie habebimus

$$\text{ſin.} z + 2\,\text{ſin.}(z+v) + 3\,\text{ſin.}(z+2v) + 4\,\text{ſin.}(z+3v) + \text{etc.} = -\frac{\text{ſin.}(z-v)}{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2}$$

et pro poſteriori

$$\text{coſ.} z + 2\,\text{coſ.}(z+v) + 3\,\text{coſ.}(z+2v) + 4\,\text{coſ.}(z+3v) + \text{etc.} = -\frac{\text{coſ.}(z-v)}{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2}$$

Si ponatur $z = v$, erit ex priori

$$\text{ſin.} z + 2\,\text{ſin.}\,2z + 3\,\text{ſin.}\,3z + \text{etc.} = 0$$

et ex poſteriori

$$\text{coſ.} z + 2\,\text{coſ.}\,2z + 3\,\text{coſ.}\,3z + \text{etc.} = \frac{-1}{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2},$$

quorum prius ſaltem haud parum paradoxon videtur.

18. Porro his principiis inſiſtendo, aſſignari poſſunt ſummae ſequentium ſerierum

$$\text{ſin.} z + 3\,\text{ſin.}(z+v) + 6\,\text{ſin.}(z+2v) + 10\,\text{ſin.}(z+3v) \ldots + \tfrac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\,\text{ſin.}(z+nv)$$

$$\text{coſ.} z + 3\,\text{coſ.}(z+v) + 6\,\text{coſ.}(z+2v) + 10\,\text{coſ.}(z+3v) \ldots + \tfrac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\,\text{coſ.}(z+nv)$$

Poſita ſcilicet prioris ſumma $= S$, eamque in $2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v$ ducendo, fiet

$$2S\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v = \text{coſ.}(z-\tfrac{1}{2}v) + 2\,\text{coſ.}(z+\tfrac{1}{2}v) + 3\,\text{coſ.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots + (n+1)\,\text{coſ.}(z + \tfrac{2n-1}{2}v)$$
$$- \tfrac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\,\text{coſ.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

$$= \frac{\text{coſ.}(z+(n-\tfrac{1}{2})v) - \text{coſ.}(z-\tfrac{3}{2}v)}{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\,\text{ſin.}(z+nv)}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}$$
$$- \frac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\,\text{coſ.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

I 2 $= -$

$$= -\frac{\sin.\left(z + \frac{n-2}{2}v\right)\sin.\left(\frac{(n+1)}{2}v\right)}{2\sin.\frac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\sin.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$$

$$-\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\cos.\left(z+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)v\right)$$

proinde

$$S = -\frac{\sin.\left(z+\frac{n-2}{2}v\right)\sin.\frac{(n+1)}{2}v}{4\sin.\frac{1}{2}v^3} + \frac{(n+1)\sin.(z+nv)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2}$$

$$-\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\cdot\frac{\cos.\left(z+\left(n+\frac{1}{2}\right)v\right)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Pro poſteriori ducta eius ſumma S in $2\sin.\frac{1}{2}v$ fiet,

$$2S\sin.\tfrac{1}{2}v = -\sin.\left(z-\tfrac{1}{2}v\right) - 2\sin.\left(z+\tfrac{1}{2}v\right) - 3\sin.\left(z+\tfrac{3}{2}v\right) \ldots - (n+1)\sin.\left(z+\left(n-\tfrac{1}{2}\right)v\right)$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\sin.\left(z+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)v\right)$$

$$= +\frac{\sin.\left(z-\frac{3}{2}v\right) - \sin.\left(z+\left(n-\frac{1}{2}\right)v\right)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\cos.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\sin.\left(z+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)v\right)$$

$$= -\frac{\cos.\left(z+\frac{n-2}{2}v\right)\sin.\frac{n+1}{2}v}{2\sin.\frac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\cos.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\sin.\left(z+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)v\right),$$

ex quo fit

$$S = -\frac{\cos.\left(z+\frac{n-2}{2}v\right)\sin.\frac{n+1}{2}v}{4\sin.\frac{1}{2}v^3} + \frac{(n+1)\cos.(z+nv)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\cdot\frac{\sin.\left(z+\left(n+\frac{1}{2}\right)v\right)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Pro

Pro numero terminorum infinito fiet prioris ſumma $S = -\frac{\text{coſ.}(z-\frac{3}{2}v)}{8\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v^3}$ et poſterioris $S = \frac{\text{ſin.}(z-\frac{3}{2}v)}{8\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v^3}$, quarum prior poſito $z=v$, abit in $-\frac{\text{coſ.}\frac{1}{2}v}{8\,\text{ſin}\,\frac{1}{2}v^3}$, poſterior vero in $\frac{-1}{8\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v^2}$.

19. Ope eorum quae in praecedentibus docuimus, etiam ſummae aſſignari poterunt ſerierum, quae compoſitae ſunt ex binis vel pluribus eius generis, quas in noſtris Theorematibus tractauimus, ſic ſeries

$$\text{ſin.}z - \text{ſin.}(z+v) + \text{ſin.}(z+2v) - \text{ſin.}(z+3v) \ldots \mp \text{ſin.}(z+nv)$$

conſiderari poterit tamquam compoſita ex binis

$$\text{ſin.}z + \text{ſin.}(z+2v) + \text{ſin.}(z+4v) \text{ etc.}$$
$$-(\text{ſin.}(z+v) + \text{ſin.}(z+3v) + \text{ſin.}(z+5v) \text{ etc.}),$$

quarum ſummae cum ex praecedentibus conſtent, etiam ſeriei noſtrae ſumma dabitur. Verum iuuabit tamen in eandem ſummam immediate inquirere, poſita ſcilicet hac ſumma $= S$ et in $2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v$ ducta fiet

$$2S\,\text{coſ}\tfrac{1}{2}v = \text{ſin.}(z-\tfrac{1}{2}v) + \text{ſin.}(z+\tfrac{1}{2}v) + \text{ſin.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots$$
$$-\text{ſin.}(z+\tfrac{1}{2}v) - \text{ſin.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots \mp \text{ſin.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

quare erit

$$S = \frac{\text{ſin.}(z-\frac{1}{2}v) \mp \text{ſin.}(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}v},$$

vbi ſignum $+$ obtinet ſi n fuerit par, $-$ vero ſi n ponatur impar. Pro priori caſu erit

$$S = \frac{\text{ſin}\,(z + \frac{1}{2}nv)\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(n+1)v}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$$ et pro poſteriori

$$S = -\frac{\text{coſ.}\,(z + \frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(n+1)v}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}.$$

Pro caſu autem n infiniti fiet $S = \frac{\text{ſin.}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$ ideoque ſi ſtatuatur $z = v$; $S = \frac{1}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}z$, quod etiam cum ſuperioribus bene conſentit, docuimus enim eſſe

$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z + \text{etc.} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}z$ et

$\text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,4z + \text{ſin.}\,6z + \text{etc.} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,z$, quare erit

$\text{ſin.}\,z - \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z - \text{ſin.}\,4z\,\text{etc.} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}z - \text{cot.}\,z = \frac{1}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}z.$

Simili modo ſi proponatur ſeries coſinuum

$$\text{coſ.}\,z - \text{coſ.}\,(z+v) + \text{coſ}\,(z+2v) - \text{coſ.}\,(z+3v) \ldots \mp \text{coſ.}\,(z+nv)$$

habebitur eius ſumma

$$S = \frac{\text{coſ}\,(z - \frac{1}{2}v) \mp \text{coſ.}\,(z + (n+\frac{1}{2})v)}{2\,\text{coſ}\,\frac{1}{2}v}.$$

Quare pro n impari erit

$$S = \frac{\text{ſin.}\,(z + \frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\,\frac{(n+1)}{2}v}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v};\ \text{pro } n \text{ pari } S = \frac{\text{coſ.}\,(z + \frac{1}{2}nv)\,\text{coſ.}\,\frac{n+1}{2}v}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$$

et pro n infinito $S = \frac{\text{coſ}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$, et quidem pro caſu $z = v$, $S = +\frac{1}{2}$.

NOVA

NOVA SERIES INFINITA
MAXIME CONVERGENS
PERIMETRVM ELLIPSIS
EXPRIMENS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Poſtquam olim multum fuiſſem occupatus, vt plures ſeries infinitas, quibus cuiusque ellipſis perimeter exprimeretur, inueſtigarem, vix eram ſuſpicatus adhuc ſimpliciores atque ad calculum magis accommodatas huiusmodi ſeries erui poſſe, quam paſſim dedi, ſiue in Comment. Petrop. ſiue in Actis Berolin.

§. 2. Nunc autem cum forte cogitationes meae in idem argumentum inciderent, alia ac, ni fallor, multo ſimplicior et commodior ſeries ſe mihi obtulit, cuius inueſtigationem ita animo inſtitui.

Conſidero ſcilicet quadrantem ellipticum ACB, cuius ſemiaxes ſint $CA = a$; $CB = b$, quibus coordinatae parallelae vocentur $CP = x$; et $PM = y$, ita, vt ex natura ellipſis habeatur iſta aequatio

$$bbx^2 + aay^2 = aa.bb$$ Tab. I. Fig. 1.

ſiue $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ex

ex qua ſingulari modo definio longitudinem totius arcus A M B ſiue quartae partis perimetri.

§. 3. Cum igitur eſſe debeat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nouam variabilem z in calculum introduco, ſtatuendo $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1+z}{2}$; vt fiat $\frac{y^2}{b^2} = \frac{1-z}{2}$; vnde prodit $x = a\sqrt{\frac{1+z}{2}}$ et $y = b\sqrt{\frac{1-z}{2}}$, hincque differentiando

$$dx = \frac{a\,dz}{2\sqrt{2(1+z)}}; \text{ et } dy = \frac{-b\,dz}{2\sqrt{2(1-z)}}$$

ex quo ſi vocemus arcum B M $= s$, ſtatim colligimus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2\,dz^2}{8(1+z)} + \frac{b^2\,dz^2}{8(1-z)}$$

ſiue $ds^2 = \frac{dz^2}{8}\left(\frac{a^2}{1+z} + \frac{b^2}{1-z}\right)$

$$= \frac{dz^2(a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)z)}{8(1-z^2)}$$

hincque integrando

$$s = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int dz \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)z}{1-z^2}}$$

integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $x = 0$ ſiue $z = -1$ tum vero integrale extendatur vsque ad terminum $x = a$, vbi fit $z = +1$ ſicque obtinebitur quaeſitus quadrans ellipticus A M B.

§. 4. Quo hanc formulam tractabiliorem reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$a^2 + b^2 = c^2; \text{ et } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n.$$

Hoc enim modo conſequimur

$$s = \frac{c}{2\sqrt{2}}\int dz \frac{\sqrt{(1-nz)}}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

vbi

vbi ſuperius radicale more ſolito in ſeriem convertamus:

$$\sqrt{(1-nz)} = 1 - \tfrac{1}{2}nz - \tfrac{1.1}{2.4}n^2z^2 - \tfrac{1.1.3}{2.4.6}n^3z^3$$
$$- \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}n^4z^4 - \tfrac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}n^5z^5 \text{ etc.}$$

qui ſinguli termini nos ad ſingulares integrationes perducunt; ac bini quidem priores ſecundum legem datam integrati, vt ſcilicet euaneſcant ſumto $z = -1$ dabunt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{A. ſin. } z - \text{A. ſin. } (-1) = \text{A. ſin. } z + \tfrac{1}{2}\pi$$
$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\sqrt{(1-z^2)} + 0$$

hinc ergo ſi ſumamus $z = +1$ prodibit

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \pi \text{ et } \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = 0.$$

§. 5. Pro reliquis terminis conſideremus reductionem conſuetam generalem

$$\int \frac{z^{\lambda+2}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{A.} \int \frac{z^\lambda\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} + \text{B. } z^{\lambda+1}\sqrt{(1-z^2)}$$

vbi eſſe oportet

$$\text{A} = +\tfrac{\lambda+1}{\lambda+2}; \text{ et B} = \tfrac{-1}{\lambda+2}$$

ita, vt ſit

$$\int \frac{z^{\lambda+2}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\int \frac{z^\lambda\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} - \frac{1}{\lambda+2}z^{\lambda+1}\sqrt{1-z^2}$$

vbi conſtantem non adiicimus, quia haec formula iam euaneſcit ſumto $z = -1$; vnde ſi iam ponatur $z = +1$ obtinebitur

$$\int \frac{z^{\lambda+2}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\int \frac{z^\lambda\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

 §. 6.

§. 6. Ex hac reductione ſtatim liquet, omnia integralia ex poteſtatibus imparibus ipſius z oriunda per ſe euaneſcere; pro poteſtatibus autem paribus ad ſcopum noſtrum adipiſcimur

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \pi; \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1}{2}\pi$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.\,3}{2.\,4}\pi; \quad \int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\pi$$

etc.

§. 7. His igitur valoribus ſubſtitutis longitudo quadrantis elliptici colligitur ſore

$$A\,M\,B = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{1.\,1}{2.\,4} n^2 . \frac{1}{2} - \frac{1.\,1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8} n^4 . \frac{1.\,3}{2.\,4} - \frac{1.\,1.\,3.\,5.\,7.\,9}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12} n^6 . \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6} - \text{etc.} \right.$$

Pro hac autem forma ſcribamus tantisper breuitatis gratia

$$A\,M\,B = \frac{c.\,\pi}{2\sqrt{2}} [1 - \alpha n^2 - \beta n^4 - \gamma n^6 - \delta n^8 - \varepsilon n^{10} \text{ etc.}$$

qui coëfficientas ſequenti modo ſuccinctius exprimi poterunt

$$\alpha = \frac{1.\,1}{2.\,4} . \frac{1}{2} = \frac{1.\,1}{4.\,4}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.\,5}{8.\,8}; \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{7.\,9}{12.\,12}; \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{11.\,13}{16.\,16}.$$

§. 8. Cum igitur inuenti coëfficientes tam ſimplicem et egregiam conſtituant ſeriem, haec expreſſio, quam eruimus, vtique maxime videtur attentione digna, cum termini vehementer conuergant idque pro omnibus plane ellipſibus, propterea quod ſemper $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n$ fractio eſt vnitate minor. Habebimus ſcilicet

A M B

$$AMB = \frac{c.\pi}{2\sqrt{2}}\begin{cases}1 - \frac{1.1}{4.4}n^2 - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}n^4 \\ - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.\frac{7.9}{12.12}n^6 \\ - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.\frac{7.9}{12.12}.\frac{11.13}{16.16}n^8 \\ \quad \text{etc.}\end{cases}$$

§. 9. Contemplemur hinc caſum, quo ellipſis noſtra fit circulus radii $= a$; tum enim erit $b = a$ hinc $c = a\sqrt{2}$ et $n = 0$, ex quo quadrans circularis prodit, vti quidem notiſſimum eſt, $= \frac{1}{2}\pi a$.

§. 10. Deinde vero etiam caſus occurrit maxime notatu dignus, quo ſemiaxis $CB = b = 0$; tum enim quadrans ellipticus PMB ipſi ſemiaxi $CA = a$ fit aequalis; at pro noſtra formula erit $c = a$ et $n = 1$ quibus valoribus ſubſtitutis nanciſcimur ſequentem aequationem

$$a = \frac{\pi.a}{2\sqrt{2}}\begin{cases}1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8} \\ - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.\frac{7.9}{12.12}\ \text{etc.}\end{cases}$$

qui praeciſe ipſe ille caſus eſt, quo ſeries noſtra quam minime eſt conuergens, et qui propterea noſtram attentionem eo magis meretur, quod huius ſeriei ſumma adcurate aſſignari poteſt, cum ſit

$$1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}\ \text{etc. in infin.} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

§. 10. Si cui lubuerit ſuper hac ſerie calculos numericos inſtituere, ſubiungamus hic valores litterarum α, β, γ etc. in fractionibus decimalibus, qui ita ſe habent

 $\alpha = 0$,

$$\alpha = 0,0625000$$
$$\beta = 0,0146484$$
$$\gamma = 0,0064087.$$
$$\delta = 0,0035798$$
$$\varepsilon = 0,0022821$$
$$\zeta = 0,0015808$$
etc.

ſerie autem hucusque tantum continuata prodit $1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon - \zeta = 0,9090002$; iam vero reperitur $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9003200$; vnde videmus, ſequentium litterarum η, ϑ, ι, $\varkappa$ etc. omnium ſummam efficere debere 0,0086802.

§. 11. Ceterum pro calculo numerico non parum notaſſe iuuabit, noſtros coëfficientes etiam ſequenti modo concinnius exprimi poſſe

$$\alpha = \frac{1}{16}$$
$$\beta = \frac{1}{64} \cdot \frac{15}{16}$$
$$\gamma = \frac{1}{144} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{63}{64}$$
$$\delta = \frac{1}{256} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{143}{144}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{400} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{143}{144} \cdot \frac{255}{256}$$
etc.

§. 12. Occaſione huius ſeriei, quam inuenimus, operae pretium erit, in eius ſummam a poſteriore inquirere, id quod duplici modo fieri poteſt; prior modus, quem iam olim propoſui ac deinceps ſaepiſſime ad vſum accommodaui, nos deducit ad aequationem differentialem, cuius integrale per ipſam ſeriem propoſitam exprimatur. Quo nunc haec

haec methodus facilius adhiberi queat, ponamus $n = 2v$, vt ſeries ſummanda fiat

$$s = 1 - \frac{1.1}{2.2}.\, v^2 - \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}.\, v^4$$
$$- \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}.\, \frac{7.9}{6.6}\, v^6 \text{ etc.}$$

§. 13. Differentiemus hanc ſeriem, tum vero iterum per v multiplicemus, vt prodeat

$$\frac{v\,ds}{dv} = - \frac{1.1}{2}.\, v^2 - \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4}.\, v^4$$
$$- \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}.\, \frac{7.9}{6}.\, v^6 \text{ etc.}$$

quae denuo differentiata praebet

$$\frac{d.\,v\,ds}{dv^2} = - 1.1\, v - \frac{1.1}{2.2}\, 3.5\, v^3 - \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}\, 7.9\, v^5 \text{ etc.}$$

hoc ſcilicet modo ex ſingulis denominatoribus duos factores ſuſtulimus.

§. 14. Nunc vero denuo ope differentiationis numeratores binis nouis factoribus augeamus; hunc in finem primam aequationem in $\sqrt{v}$ ductam differentiemus, prodibitque

$$\frac{2\,d.\,s\sqrt{v}}{dv} = + v^{-\frac{1}{2}} - \frac{1.1}{2.2}\, 5.\, v^{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}\, 9.\, v^{\frac{7}{2}}$$
$$- \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}.\, \frac{7.9}{6.6}\, 13.\, v^{\frac{11}{2}}$$
$$\text{etc.}$$

haec denuo differentietur et per 2 iterum multiplicando fit

$$\frac{4.\,dd.\,s\sqrt{v}}{dv^2} = - v^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.1}{2.2}\, 3.\, 5.\, v^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1.1}{2.2}.\, \frac{3.5}{4.4}\, 7.\, 9.\, v^{\frac{5}{2}}$$
$$\text{etc.}$$

quae per $v^{\frac{6}{2}}$ multiplicata producit

$$\frac{4.\, v^{\frac{5}{2}}\, d\, d.\, s \sqrt{v}}{d v^2} = - v - \frac{1.\,1}{2.\,2}\, 3.\, 5.\, v^3$$
$$- \frac{1.\,1}{2.\,2}.\, \frac{3.\,3}{4.\,4}\, 7.\, 9.\, v^5 \text{ etc.}$$

ſupra vero iam inuenimus

$$\frac{d.\, v\, d\, s}{d\, v^2} = - v - \frac{1.\,1}{2.\,2}\, 3.\, 5.\, v^3 - \frac{1.\,1}{2.\,2}.\, \frac{3.\,3}{4.\,4}\, 7.\, 9.\, v^5 \text{ etc.}$$

quae ſeries cum ſint aequales, inde deducimus hanc aequationem

$$4.\, v^{\frac{5}{2}}\, d\, d.\, s \sqrt{v} = d.\, v\, d\, s$$

quae aequatio continet relationem ſummae quaeſitae s ad variabilem v.

§. 15. Haec ergo aequatio euoluta fit differentiale 2^{di} gradus; ſumto enim elemento $d v$ conſtante ob

$$d.\, s\sqrt{v} = d s\sqrt{v} + \frac{s\, d v}{2\sqrt{v}};\ \text{erit}\ dd.\, s\sqrt{v} = dds.\, \sqrt{v}$$
$$+ \frac{d v\, d s}{\sqrt{v}} - \frac{s\, d v^2}{4 v\sqrt{v}};\ \text{ergo}$$

$$4 v^{\frac{5}{2}} dd.\, s\sqrt{v} = 4 v^3 dds + 4 v^2 dv ds - s v dv^2$$

tum vero ob $d.\, v\, d\, s = v\, d\, d\, s + d\, v\, d\, s$, habebitur haec aequatio

$$v dds(1 - 4 v^2) + dv ds(1 - 4 v^2) + s v dv^2 = 0$$

ſiue

$$v\, d\, d\, s + d\, v\, d\, s + \frac{s\, v\, d v^2}{1 - 4 v^2} = 0.$$

§. 16. Huius igitur aequationis differentialis ſecundi gradus conſtructio in noſtra eſt poteſtate; fiat

fiat enim ellipſis, cuius ſemiaxes ſint a et b; eiusque peripheriae quarta pars $= q =$ A M B; tum vero capiatur $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ et $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n = 2v$; vnde cum ſit

$$q = \frac{\pi c}{2\sqrt{2}} s; \quad \text{fiet } s = \frac{2q\sqrt{2}}{\pi c}.$$

Iam ob

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ et } a^2 - b^2 = 2c^2 v$$

erit $a^2 = \frac{c^2(1+2v)}{2}$; et $b^2 = \frac{c^2(1-2v)}{2}$.

Quocirca noſtra conſtructio ita erit comparata, ſumtis ellipſis ſemiaxibus

$$a = c\sqrt{\left(\frac{1+2v}{2}\right)} \text{ et } b = c\sqrt{\frac{1-2v}{2}}$$

fit q quarta pars perimetri huius ellipſis eritque pro reſolutione noſtrae aequationis $s = \frac{2q\sqrt{2}}{\pi c}$.

Haec aequatio ſi ponamus $s = \frac{z}{\sqrt{v}}$, induet hanc formam ſimpliciorem

$$ddz + \frac{z\,dv^2}{4v^2(1-4v^2)} = 0$$

pro qua erit $z = \frac{2q\sqrt{2v}}{\pi c}$.

§. 17. Haec porro aequatio ad differentialem primi gradus reducetur, ponendo $z = e^{S.\,t\,dv}$ tum enim reſultabit

$$dt + t^2 dv + \frac{dv}{4v^2(1-4v^2)} = 0$$

vnde, ſi liceret t per v definire, ita, vt innoteſceret integrale $\int t\,dv$, foret $z = e^{S.\,t\,dv}$.

§. 18. Hic erat primus modus ex propoſita ſerie infinita in eius ſummam inquirendi, vbi ſcilicet loco numeri conſtantis n quantitatem variabilem v in-

v introduximus; altero autem modo idem praeſtandi, cuius plurima ſpecimina iam paſſim occurrunt, quantitas conſtans n talis relinquitur, ponamus autem $n = 2m$; ita, vt noſtra ſeries ſummanda ſit

$$1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} m^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} m^4$$
$$- \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 6} m^6 \text{ etc.}$$

§. 19. Nunc fingamus eſſe

$$s = \int dz \sqrt[4]{(1 - 2m^2 p)}$$

poſtquam ſcilicet abſoluta integratione quantitati variabili z certus valor determinatus fuerit tributus, litteram vero p etiam vt variabilem ſpectemus, quae cuiusmodi functio ipſius z capi debeat, vt haec integratio ad noſtram ſeriem infinitam perducatur, ſequenti modo inueſtigabimus.

§. 20. Euoluta autem formula irrationali $(1 - 2m^2 p)^{\frac{1}{4}}$ in hanc ſeriem infinitam

$$1 - \tfrac{1}{2} m^2 p - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^4 p^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^6 p^3$$

quantitas s ſequenti ſerie formularum integralium definietur

$$s = z - \tfrac{1}{2} m^2 \int p\, dz - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^4 \int p^2\, dz$$
$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^6 \int p^3\, dz \text{ etc.}$$

Nunc vero ſtatuamus, ſi poſt ſingulas integrationes variabili z certus valor determinatus tribuatur, tum fore

$$\int p\, dz = \tfrac{1}{2} z; \quad \int p^2\, dz = \tfrac{5}{4} \int p\, dz$$
$$\int p^3\, dz = \tfrac{9}{6} \int p^2\, dz; \quad \int p^4\, dz = \tfrac{13}{8} \int p^3\, dz$$
etc.

ſic

ſic enim fiet

$$s = z\left(1 - \frac{1.1}{2.2} m^2 - \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} m^4 - \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{6.6} m^6 \text{ etc.}\right.$$

quae eſt ipſa noſtra ſeries propoſita.

§. 21. Nunc igitur tota quaeſtio huc redit, cuiusmodi functionem ipſius z pro p ſumi oporteat, vt ſtabilita illa ratio integralium, dum ſcilicet variabili z certus valor tribuitur, obtineatur, iſta autem relatio generatim ita exprimitur,

$$\int p^\lambda dz = \frac{4\lambda - 3}{2\lambda} \int p^{\lambda - 1} dz$$

ponamus igitur integralibus adhuc indefinite ſumtis fore

$$\int p^\lambda dz = \frac{4\lambda - 3}{2\lambda} \int p^{\lambda - 1} dz + \frac{p^\lambda . Q}{2\lambda}$$

facta ergo differentiatione prodibit

$$p^\lambda dz = \frac{4\lambda - 3}{2\lambda} p^{\lambda - 1} dz + \tfrac{1}{2} p^{\lambda - 1} Q dp$$
$$+ \frac{p^\lambda}{2\lambda} dQ$$

quae per $p^{\lambda - 1}$ diuiſa et per 2λ multiplicata praebet

$$2\lambda p dz = (4\lambda - 3) dz + \lambda Q dp + p dQ$$

et cum haec aequatio ſubſiſtere debeat, quicquid ſit λ, ſuppeditat nobis has duas aequationes

$$2 p dz - 3 dz - Q dp = 0$$
$$- 3 dz + p dQ = 0$$

ex quibus vtramque functionem p et Q definire licebit.

§. 22. Perinde autem hic eſt, ſiue p et Q ſint functiones ipſius z ſiue z et Q ipſius p, dum-

modo earum relatio inter ſe ſtabiliatur; ex poſteriore autem ſtatim habemus

$$dz = \tfrac{1}{3} p\, dQ$$

qui valor in priore ſubſtitutus praebet

$$\tfrac{2}{3}(p-2)p\, dQ - Q\, dp = 0$$

ex qua fit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{3\, dp}{2p(p-2)} = -\frac{3\, dp}{4p} + \frac{3\, dp}{4(p-2)}$$

vnde integrando oritur

$$\log. Q = -\tfrac{3}{4}\, l.\, p + \tfrac{3}{4}\, l.\, (p-2)$$
$$= + \tfrac{3}{4}\, l.\, \frac{p-2}{p}$$

vnde fit $Q = 2\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{3}{4}}$

tum vero quia ex prima aequatione eſt $dz = \frac{Q\, dp}{2(p-2)}$; hinc fit

$$dz = \frac{dp}{p^{\frac{3}{4}}(p-2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{dp}{\sqrt[4]{p^3(p-2)}}.$$

Nunc autem inprimis obſeruari oportet, vt pro vtroque integrationis termino formula algebraica ibi adiecta $p^\lambda Q = 2 . p^{\lambda - \frac{3}{4}}(p-2)^{\frac{3}{4}}$ euaneſcat, ſicque manifeſtum eſt, integrationis terminos ſtatui debere $p = 0$ et $p = 2$.

§. 23. Ecce ergo formulam noſtram integralem initio introductam hoc modo repraeſentatam

$$s = \int . \frac{dp \sqrt[4]{(1 - 2m^2 p)}}{\sqrt[4]{p^3(p-2)}}$$

quare

quare cum ſit

$$z = \int \frac{dp}{\sqrt[4]{p^3(p-2)}}$$

ipſa noſtra ſeries propoſita

$$1 - \frac{1.1}{2.2} m^2 - \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} m^4 \text{ etc.}$$

aequabitur fractioni $\frac{s}{z}$, poſtquam ſcilicet haec integralia ita fuerint ſumta, vt euaneſcant poſito $p = 0$ tum vero ſtatuatur $p = 2$; quamobrem illas duas formulas integrales ita exprimi conueniet

$$s = \int . \frac{dp \sqrt[4]{(1 - 2m^2 p)}}{\sqrt[4]{p^3 (2-p)}}$$

et $z = \int . \frac{dp}{\sqrt[4]{p^3 (2-p)}}$.

§. 24. Ex his igitur ſeries noſtra ſupra inventa

$$1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{3.5}{8.8} n^4 \text{ etc.}$$

cuius ſummam iam vidimus eſſe $\frac{2q\sqrt{2}}{\pi . c}$, etiam hoc modo per duas formulas integrales repraeſentari poteſt, quae facta leui mutatione $p = 2r$ erunt, ea, quae numeratorem conſtituit

$$s = \int . \frac{dr \sqrt[4]{(1 - nn . r)}}{\sqrt[4]{r^3 (1-r)}}$$

altera vero, quae conſtituit denominatorem

$$z = \int . \frac{dr}{\sqrt[4]{r^3 (1-r)}}$$

ipſa autem fractio noſtram ſeriem exhibebit; nunc autem termini integrationis ſunt $r = 0$ et $r = 1$.

§. 25. Adhuc ſuccinctius hae formulae transformari poſſunt, ſumendo $r = t^4$; tum enim ambae formulae integrales erunt

$$s = \int \frac{dt \sqrt[4]{(1 - n^2 t^4)}}{\sqrt[4]{(1 - t^4)}}; \text{ et } z = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{(1 - t^4)}}$$

terminis integrationis exiſtentibus etiamnunc $t = 0$ et $t = 1$, quo obſeruato fractio $\frac{s}{z}$ aequabitur noſtrae ſeriei, ſiue erit

$$\frac{s}{z} = \frac{2q\sqrt{2}}{\pi . c}$$

vbi q denotat quartam partem peripheriae ellipſis, cuius ſemiaxes ſunt

$$c\sqrt{\left(\frac{1+n}{2}\right)} \text{ et } c\sqrt{\left(\frac{1-n}{2}\right)}.$$

§. 26. Hinc caſu $n = 0$ manifeſto fit $\frac{s}{z} = 1$ caſu vero $n = 1$ ob $s = t = 1$ fiet

$$\frac{1}{z} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \text{ ſiue } z = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{(1 - t^4)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

quod quidem iam aliunde conſtat.

DEMONSTRATIONES CIRCA RESIDVA EX DIVISIONE POTESTATVM PER NVMEROS PRIMOS RESVLTANTIA.

Auctore

L. EVLERO.

Hypotheſis.

1.

Si termini progreſſionis geometricae ab vnitate incipientis per numerum primum P diuidantur, reſidua inde nata litteris 1, α, β, γ, δ etc. denotabo, hoc modo:

Progr. Geom.	1,	a,	a^2,	a^3,	a^4,	a^5,	a^6	etc.
Reſidua.	1,	α,	β,	γ,	δ,	ϵ,	ζ	etc.

Concluſiones.

2. Omnia haec reſidua ſunt minora diuiſore P; quamdiu enim termini progreſſionis geometricae diuiſore P ſunt minores, reſidua ipſis ſunt aequalia; cum autem diuiſorem P ſuperant, auferendo ab iis diuiſorem P, quoties fieri poteſt, reſidua tandem ipſo P minora relinqui neceſſe eſt.

3. Si numerus a ſit primus ad diuiſorem P, hoc eſt ſi neque ipſi ſit aequalis, neque eius mul-

tiplo cuipiam, nulla quoque eius poteſtas per P erit diuiſibilis; neque ergo in reſiduis cyphra vnquam occurret.

4. Cum omnia reſidua ſint diuiſore P minora, multitudo autem numerorum diuiſore P minorum ſit $= P - 1$, plura reſidua diuerſa occurrere nequeunt quam $P - 1$. Quare cum ſeries reſiduorum ſit infinita, eadem reſidua in ea ſaepius recurrere debent.

5. Ex quolibet reſiduo veluti ε ſequens ζ facile definitur. Cum enim ſit $\varepsilon = a^5 - mP$ et $\zeta = a^6 - nP$, erit $\zeta - a\varepsilon = (ma - n)P$, hincque $\zeta = a\varepsilon - (n - ma)P$. Quare a producto $a\varepsilon$ auferatur diuiſor P quoties fieri poteſt, ac relinquetur reſiduum ſequens ζ.

6. Reſpectu numeri primi P omnes numeri in certos ordines diſtribui poſſunt, ad eundem ordinem referendo omnes eos numeros, qui per P diviſi idem relinquunt reſiduum, hi ergo ordines erunt:

I.	0,	P	2P,	3P,	4P	mP
II.	1,	P+1,	2P+1,	3P+1,	4P+1	$mP+1$
III.	2,	P+2,	2P+2,	3P+2,	4P+2	$mP+2$
IV.	3,	P+3,	2P+3,	3P+3,	4P+3	$mP+3$

etc.

7. Pro quolibet ergo numero primo P tot habentur numerorum ordines, quot vnitates in numero P continentur; et quilibet ordo determinatur reſiduo, quod omnibus numeris eius ordinis eſt commune; hocque reſiduum in quouis ordine locum occupat primum.

8. Cum

8. Cum cuiusque ordinis natura reſiduo ipſi proprio determinetur, quilibet cuiusque ordinis numerus eius naturam perinde declarat, ac primus, qui ipſum reſiduum exhibet. Hinc nihil impedit, quominus idem reſiduum ε per quemlibet alium numerum eiusdem ordinis $mP + \varepsilon$ denotetur.

9. Ita idem reſiduum ε non ſolum per numeros poſitiuos $\varepsilon + P$, $\varepsilon + 2P$ etc. indicare licebit, ſed etiam per negatiuos $\varepsilon - P$, $\varepsilon - 2P$ etc. Cum igitur, ſi ε ſit diuiſoris P ſemiſſe maius, $\varepsilon - P$ eodem ſit minus, patet numeros negatiuos admittendo, omnia reſidua numeris, qui diuiſoris P ſemiſſem non ſuperent, exprimi poſſe.

Obſeruationes.

10. Propoſito diuiſore primo P, prout progreſſionis geometricae radix a conſtituatur, fieri poteſt, vt in reſiduis vel omnes numeri ipſo P minores occurrant, vel non omnes. Si enim ſumatur radix $a = 1$, omnia reſidua in vnitatem abeunt, ac ſi ſumatur $a = P - 1$, ſeries reſiduorum prodit:

$$1,\ P-1,\quad 1,\ P-1,\quad 1,\ P-1 \text{ etc.}$$

$$\text{vel } +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1 \text{ etc. } (9).$$

11. Quod autem interdum omnes numeri diuiſore P minores in reſiduis occurrunt, vnico exemplo declaraſſe ſufficiat; ſit ſcilicet $P = 7$ et ſumatur radix $a = 3$, habebitur:

progr. geom.	$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9$ etc.
Reſidua	$1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6$ etc.

12. Si

12. Si pro eodem diuiſore $P = 7$ radici a alii valores tribuantur, ſeries reſiduorum ſe habebunt vt ſequitur:

Progr. geom.	$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ etc.
Reſidua	$1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1$ etc.
Progr. geom.	$1, 4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6, 4^7, 4^8, 4^9$ etc.
Reſidua	$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1$ etc.
Progr. geom.	$1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6, 5^7, 5^8, 5^9$ etc.
Reſidua	$1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6$ etc.

13. Vt omnes variationes, quae in ſerie reſiduorum locum habere poſſunt, obtineantur, ſufficit radici a omnes valores diuiſore P minores tribuiſſe; ſi enim loco a ſumatur $a + P$, ex progreſſione geometrica $1, a + P, (a + P)^2, (a + P)^3$ etc. eadem reſiduorum ſeries recurrit, quae ex progreſſione geometrica $1, a, a^2, a^3, a^4$ etc.

14. Quemadmodum in reſiduis etiam numeros negatiuos admittimus (9) vt ea infra ſemiſſem diuiſoris P deprimamus, ita etiam pro radice progreſſionis geometricae a numeros negatiuos aſſumere licet, ac tum habebitur:

Progr. geom.	$1, -a, +a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ etc.
reſidua	$1, -\alpha, \beta, -\gamma, \delta, -\varepsilon, \zeta, -\eta$ etc.

15. Sumta autem radice $-a$, eadem reſidua oriuntur, ac ſi radix poneretur $P - a$; vnde patet pro caſibus, quibus radix a ſemiſſem diuiſoris P ſuperat, reſidua ex caſibus quibus eſt $a < \frac{1}{2}P$ facile colligi.

16. Quodſi loco radicis a ſucceſſiue omnes numeri diuiſore P minores ſubſtituantur, ſeries reſiduorum inde natae vel erunt completae vel incompletae: *completas* ſcilicet appello, in quibus omnes numeri diuiſore P minores occurrunt, *incompletas* vero, vbi quidam horum numerorum ex ſerie reſiduorum excluduntur.

17. Quoniam vidimus pro quouis diuiſore P dari eiusmodi valores radicis a, veluti ſi $a = 1$ et $a = P - 1$, ex quibus ſeries reſiduorum incompletae reſultant; hinc naſcitur quaeſtio; *an ſemper eiusmodi progreſſiones geometricae exhiberi queant, vnde ſeries reſiduorum completae oriantur.*

18. Huiusmodi radices progreſſionis geometricae, quae ſeries reſiduorum completas producunt, *primitiuas* appellabo. Ita ſupra vidimus pro diuiſore $P = 7$ radices *primitiuas* eſſe 3 et 5. Num autem pro omnibus diuiſoribus primis dentur radices primitiuae, quaeſtio eſt altioris indaginis, infra decidenda.

Lemmata.

19. Cum in ſerie reſiduorum termini praecedentes tandem recurrere debeant, *primus qui recurrit ſemper eſt vnitas. Demonſtratio.* Ponamus enim aliud quoduis reſiduum ε ex poteſtate a^{μ} natum recurrere, antequam vnitas recurrat, idque ſecunda vice ex poteſtate $a^{\mu+\nu}$ prodire. Cum igitur ſit $\varepsilon = a^{\mu} - mP$ et $\varepsilon = a^{\mu+\nu} - nP$, erit $a^{\mu+\nu} - a^{\mu} = (n-m)P$ ideoque $a^{\mu}(a^{\nu} - 1)$ multiplum ipſius P; at quia a^{μ} per

 nume-

numerum primum P diuidi nequit, (radix enim a diuiſore P minor ideoque ad eum prima ſtatuitur), neceſſario alter factor $a^{\nu} - 1$ per P diuiſionem admittet, hincque poteſtas a^{ν} per P diuiſa vnitatem relinquet; quae poteſtas cum inferior ſit quam $a^{\mu+\nu}$ euidens eſt, reſiduum ε ante recurrere non poſſe, quam vnitas recurrerit.

20 Statim atque in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. vnitas iterum occurrit, deinceps eadem reſidua eodem ordine vti ab initio iterum recurrent.

Dem. Oriatur enim vnitas ſecunda vice ex poteſtate a^{ν} ac ſequens reſiduum erit $a, 1$ (5) $= a$, idem quod ex ſecundo termino a naſcebatur, ideoque α, poſt quod denuo ſequentur reſidua β, γ, δ etc. eodem ordine vti ab initio.

21. Si a ſit radix primitiua, eius poteſtas a^{P-1} per diuiſorem primum P diuiſa vnitatem relinquet.

Dem. Quia a eſt radix primitiua in ſerie reſiduorum omnes numeri diuiſore P minores occurrunt, quorum multitudo eſt $P-1$; ex totidem ergo progreſſionis geometricae terminis $1, a^1, a^2, a^3$ etc. quorum vltimus erit a^{P-2} oriantur neceſſe eſt; ſequens ergo terminus a^{P-1} aliquod ex reſiduis praecedentibus reproducet, quod autem neceſſario eſt vnitas (19).

22. Si progreſſio geometrica $1, a, a^2, a^3, a^4$ etc. ſeriem reſiduorum *incompletam* producat; numerus reſiduorum diuerſorum erit pars aliquota numeri $P-1$ hoc eſt diuiſoris primi P vnitate minuti.

Dem.

Dem. Sit numerus reſiduorum diuerſorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. ex hac progreſſione geometrica natorum $= r$, qui ergo per hypotheſin minor eſt quam $P - 1$, ita vt quidam numeri, qui ſint $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. eorumque multitudo $= P - 1 - r$, ex ſerie reſiduorum excludantur. Iam dico, quia $\mathfrak{A}$ in ſerie reſiduorum non reperitur, ibidem quoque nec $\alpha\mathfrak{A}$, nec $\beta\mathfrak{A}$, nec $\gamma\mathfrak{A}$ etc. occurrere poſſe. Si enim $\varepsilon\mathfrak{A}$ eſſet reſiduum, quia ε ex certa poteſtate radicis a, quae ſit a^{ν}, naſcitur, loco $\varepsilon\mathfrak{A}$ ſpectare licet $a^{\nu}\mathfrak{A}$, vnde ſequentia reſidua forent $a^{\nu+1}\mathfrak{A}$, $a^{\nu+2}\mathfrak{A}$, $a^{\nu+3}\mathfrak{A}$ etc. et in genere $a^{n}\mathfrak{A}$, quia autem datur poteſtas a^{n} vnitatem relinquens, hoc reſiduum foret $\mathfrak{A}$ contra hypotheſin. Hinc dato vno non-reſiduo $\mathfrak{A}$, ſimul dantur r non-reſidua; quae ſi nondum multitudinem numerorum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. quorum numerus eſt $P - 1 - r$ exhauriant, de nouo r non-reſidua accedunt, ſicque porro; vnde numerus $P - 1 - r$ neceſſario erit multiplus ipſius r, ſit ergo $P - 1 - r = nr$, fiet $r = \frac{P-1}{n+1}$, ac propterea numerus reſiduorum r ſemper eſt pars aliquota numeri $P - 1$.

23. Quicunque valor diuiſore primo P minor radici a tribuatur, poteſtas a^{P-1} per P diuiſa vnitatem relinquit, ſeu formula $a^{P-1} - 1$ per P erit diuiſibilis.

Dem. Sit r numerus omnium reſiduorum diuerſorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. quae ergo naſcuntur ex progreſſione geometrica

$$1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots\ldots a^{r-1}$$

ſequens igitur poteſtas a^r vnitatem pro reſiduo habebit, eritque forma $a^r - 1$ per diuiſorem P diuiſibilis. Quia vero r eſt pars aliquota numeri $P - 1$, illa forma $a^{P-1} - 1$ per hanc $a^r - 1$ erit diuiſibilis, ideoque etiam per ipſum diuiſorem P.

24 In ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ etc. ſiue fuerit completa ſiue incompleta, ſimul producta ex binis, ternis quaternis etc. hincque etiam ſingulorum poteſtates quaecunque, ſiquidem per diuiſorem P deprimantur, occurrunt.

Dem. Si enim poteſtas a^m reſiduum relinquat μ, et poteſtas a^n reſiduum ν, erit $a^m = ..P + \mu$ et $a^n = ..P + \nu$ vbi duo puncta .. loco cuiusuis indicis integri ſcribo; hincque $a^{m+n} = ..P + \mu\nu$, ita vt poteſtas a^{m+n} reſiduum $\mu\nu$ ſit relictura. Quare cum productum binorum quorumcunque reſiduorum in ſerie reſiduorum occurrat, propoſitum eſt manifeſtum.

25. Datis duobus reſiduis μ et ν in ſerie reſiduorum etiam aliquod reperietur ω vt ſit $\nu = \mu\omega$ vel $\nu = \mu\omega - ..P$.

Dem. Oriantur enim reſidua μ et ν a poteſtatibus a^m et a^n ac ſit ω reſiduum a poteſtate a^{n-m} vel hac $a^{P-1+n-m}$ ſi forte fuerit $n < m$, eritque poteſtatis $a^n = a^m . a^{n-m}$ reſiduum $= \mu\omega - ..P$ ideoque $\nu = \mu\omega - ..P$.

26. Cum vnitas ſemper in ſerie reſiduorum contineatur, cuique reſiduo μ reſpondebit ibidem aliud

aliud quoddam ω vt ſit $\mu\omega = 1$ ſeu $\mu\omega = 1 + \ldots P$. Huiusmodi bina reſidua *ſocia* appellabo. Vnde patet, in omni ſerie reſiduorum terminos ita ſociatim exhiberi poſſe, vt bina quaeque ſibi ſint ſocia. Hoc tantum notetur, vnitatem ſibi ipſi eſſe *ſociam*, ac ſi -1 occurrat, ſocium quoque ipſi eſſe aequalem.

27. His praemiſſis, quae alibi fuſius pertractavi, ad ſequentia Theoremata progredior; in quibus plures nouae veritates ex principiis prorſus ſingularibus demonſtrabuntur, ad quas per methodos adhuc vſurpatas acceſſus nimis difficilis videtur.

Theorema.

28. Vt forma $x^n - 1$ per numerum primum P diuiſibilis euadat, ſumendo $x < P$, id pluribus quam n modis fieri nequit.

Demonſtratio.

A caſibus ſimpliciſſimis inchoemus, ac primo ſtatim manifeſtum eſt formam $x^1 - 1$ per numerum primum P vnico modo diuiſibilem eſſe poſſe ſumendo $x = 1$, cum valores ipſius x diuiſore P maiores excludantur.

Vt forma $x^2 - 1$ diuiſionem per numerum primum P admittat vel $x - 1$ vel $x + 1$ diuiſionem admittere debet; priori caſu fit $x = 1$ poſteriori $x = P - 1$: neque vllo alio modo id euenire poteſt, ſiquidem caſus $x > P$ excluduntur. Forma $x^3 - 1 = (x - 1)(xx + x + 1)$ per P diuiſibilis eſt

primo ſi $x = 1$, tum vero ſi $xx + x + 1 = mP$. quod ſi eueniat caſu $x = a$, etiam caſu $x = a^2$ ſuccedet, altiores enim poteſtates ob $a^3 - 1$ diuiſ. per P ideoque reſiduum ipſius $a^3 - 1$ ad praecedentes reducuntur. Iam vero dico praeter hos tres caſus alios dari nullos; ſi enim diuiſio ſuccederet quoque caſu $x = b$, ob $aa + a + 1$ et $bb + b + 1$ per P diuiſibiles differentia $(a - b)(a + b + 1)$ etiam eſſet diuiſibilis hoc eſt vel $a - b$ vel $a + b + 1$, prius daret $b = a$, poſterius ab $aa + a + 1$ ablatum praeberet $aa - b = mP$ hoc eſt $b = aa$, qui ſunt caſus iam enumerati. Vnde pluribus quam tribus modis diuiſio non ſuccedit.

Iam pro forma $x^n - 1$ in genere obſeruo, ſi ea per numerum primum P fuerit diuiſibilis caſu $x = a$; vt ſit $x - a$ diuiſor formae $x^n - 1 - mP$, tum facta diuiſione oriri formam vno gradu inferiorem per P diuiſibilem reddendam; quod ſi praeſtet valor $x = b$ denuo ad formam inferiorem peruenietur, ex quo perinde atque in reſolutione aequationum concluditur, pluribus quam n modis quaeſitum obtineri non poſſe; qui ſi $x = a$ fuerit vnus valor idoneus, erunt

$$x = 1,\ x = a,\ x = a^2,\ x = a^3,\ x = a^4 \ldots x = a^{n-1}$$

quandoquidem a^n iterum vnitati aequiualet.

Scholion.

29. Theorema hoc ita accipi debet, vt forma $x^n - 1$ certe non pluribus quam n modis per numerum primum P diuiſibilis reddi queat, aliis pro x valo-

valoribus non admittendis, niſi qui ipſo P ſint minores. Cum enim ſi quispiam valor $x = a$ id praeſtet, omnes in hac formula $x = a + mP$ idem ſint praeſtaturi, hos omnes pro vnico caſu haberi conuenit. Hac lege conſtituta ſaepius euenire poteſt, vt numerus caſuum ſit minor quam exponens n; veluti ſi quaeſtio ſit, quot caſibus forma $x^5 - 1$ per 7 diuiſibilis exiſtat, hoc non 5 ſed vnico modo $x = 1$ fieri poſſe deprehenditur, dum reliqui 4 caſus quaſi fiunt imaginarii. Ex ſequentibus autem patebit, ſemper quasdam ſolutiones fieri impoſſibiles, quoties exponens n non fuerit pars aliquota ipſius $P - 1$. dum contra, quoties n eſt pars aliquota ipſius $P - 1$ omnes ſolutiones ſunt reales. Ac ſi $n = P - 1$ tum manifeſto totidem habentur ſolutiones, quia omnes numeri ipſo P minores, quorum multitudo eſt $P - 1$, loco x poſiti formulam $x^n - 1$ per numerum primum P diuiſibilem reddunt (22). Quando autem exponens n maior eſt quam $P - 1$, veluti $n = P - 1 + k$ tum forma $x^{P-1+k} - 1$, reducitur ad $x^k - 1$, quoniam poteſtas x^{P-1} ratione reſiduorum vnitati aequiualere eſt cenſenda.

Definitio.

30. Caſus proprii, quibus formula $x^n - 1$ per quempiam numerum primum diuiſibilis eſſe poteſt, ſunt ii, qui ipſi cum nulla forma inferiori, vbi exponens n eſt minor, ſunt communes.

Coroll.

Coroll. 1.

31. Quia caſus $x = 1$ formulae $x^n - 1$ cum omnibus inferioribus eſt communis, hunc ſemper a caſibus formulae iſti propriis excludi oportet; vnde cum numerus omnium caſuum ſit n, numerus caſuum propriorum ſaltem vnitate eſt minor.

Coroll. 2.

32. Si exponens n fuerit numerus primus, formula $x^n - 1$ per nullam inferiorem eiusdem formae diuiſibilis eſt praeter $x^1 - 1$, vnde numerus caſuum propriorum eſt $n - 1$.

Coroll. 3.

33. Sin autem exponens n fuerit numerus compoſitus puta $n = \mu\nu$, tum formula $x^n - 1$ iisdem caſibus eſt diuiſibilis, quibus formulae $x^\mu - 1$ et $x^\nu - 1$, quandoquidem ipſa per has diuiſibilis exiſtit; vnde caſus harum formularum a caſibus propriis formulae $x^n - 1$ ſunt ſegregandi.

Problema.

34. Pro omnibus exponentibus n numerum caſuum propriorum definire, quibus formula $x^n - 1$ per quempiam numerum primum P diuiſibilis reddi poteſt, alios pro x valores non admittendo, niſi qui diuiſore ſint minores.

Solutio.

Solutio.

A numero omnium caſuum, qui eſt $= n$ excludantur caſus, quibus formulae inferiores in propoſita contentae ſimul fiunt diuiſibiles; aliae autem formulae inferiores veluti $x^{\nu} - 1$ in propoſita $x^{n} - 1$ non continentur, niſi quarum exponens ν eſt pars aliquota exponentis n. Verum ſi plures huiusmodi formulae inferiores dentur, ne iidem caſus bis vel pluries excludantur, tantum caſus cuique proprii excludi debent, quo facto remanebunt caſus formulae propoſitae $x^{n} - 1$ proprii; hoc modo ab exponentibus minoribus ad continuo maiores facile progredi licet:

formula	numerus caſuum propriorum
$x^{1} - 1$	1
$x^{2} - 1$	$2 - 1 = 1$
$x^{3} - 1$	$3 - 1 = 2$
$x^{4} - 1$	$4 - 1 - 1 = 2$
$x^{5} - 1$	$5 - 1 = 4$
$x^{6} - 1$	$6 - 2 - 1 - 1 = 2$
$x^{7} - 1$	$7 - 1 = 6$
$x^{8} - 1$	$8 - 2 - 1 - 1 = 4$
$x^{9} - 1$	$9 - 2 - 1 = 6$
	etc.

Hinc in genere ſi α, β, γ, δ etc. ſint numeri primi, res ita ſe habebit:

formula	numerus caſuum propriorum
$x^1 - 1$	1
$x^\alpha - 1$	$\alpha - 1$
$x^\beta - 1$	$\beta - 1$
$x^\gamma - 1$	$\gamma - 1$
$x^{\alpha\alpha} - 1$	$\alpha\alpha - \alpha = \alpha(\alpha - 1)$
$x^{\alpha\beta} - 1$	$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = (\alpha - 1)(\beta - 1)$
$x^{\beta\beta} - 1$	$\beta\beta - \beta = \beta(\beta - 1)$
$x^{\alpha\gamma} - 1$	$\alpha\gamma - \alpha - \gamma + 1 = (\alpha - 1)(\gamma - 1)$
$x^{\beta\gamma} - 1$	$\beta\gamma - \beta - \gamma + 1 = (\beta - 1)(\gamma - 1)$
$x^{\gamma\gamma} - 1$	$\gamma\gamma - \gamma = \gamma(\gamma - 1)$
$x^{\alpha\alpha\alpha} - 1$	$\alpha^3 - \alpha\alpha + \alpha - \alpha + 1 - 1 = \alpha\alpha(\alpha - 1)$
$x^{\alpha\alpha\beta} - 1$	$\alpha\alpha\beta - \alpha\alpha + \alpha - (\beta - 1)(\beta - 1) - \alpha - \beta + 1 = \alpha(\alpha - 1)(\beta - 1)$

vnde colligimus, ſi fuerit $n = \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu$, pro formula $x^n - 1$ fore numerum caſuum propriorum

$$\alpha^{\lambda - 1}(\alpha - 1)\,\beta^{\mu - 1}(\beta - 1)\,\gamma^{\nu - 1}(\gamma - 1).$$

Quae ſi attentius contemplemur, mox deprehendemus pro qualibet formula $x^n - 1$ tot dari caſus proprios, quot infra exponentem n dantur numeri ad ipſum primi.

Coroll. 1.

35. Diuiſore primo exiſtente $= P$, ſi exponens n ſumatur $= P - 1$, quia formula $x^{P-1} - 1$ certo habet $P - 1$ caſus eosque omnes reales, cum x omnes valores ipſo P minores recipere queat; ſi inde expungantur ii, qui huic formulae cum ſimplicioribus ſunt communes, caſus proprii, qui relinquuntur, omnes certo erunt reales.

Coroll.

Coroll. 2.

36. Hinc ſemper eiusmodi dantur numeri diviſore P minores, qui caſus formulae $x^{P-1}-1$ proprios exhibent, ita, vt iidem caſus nulli formulae inferiori conueniant.

Scholion.

37. Quamuis haec nimis abſtracta et omni vſu deſtituta videantur; tamen equidem iis ſuperſedere non potui in ſequentibus demonſtrationibus adornandis, vbi imprimis ante omnia eſt oſtendendum, quicunque numerus primus pro diuiſore P accipiatur, ſemper eiusmodi progreſſiones geometricas 1, a, a^2, a^3, a^4 etc. exhiberi poſſe, vnde ſeries reſiduorum completae reſultent, in quibus ſcilicet omnes numeri diuiſore P minores occurrant, antequam idem reſiduorum ordo reuertatur. Plerisque forte haec res ita manifeſta videbitur, vt demonſtratione non egeat, cum pro minoribus diuiſoribus primis huiusmodi progreſſiones geometricae ſeries reſiduorum completas praebentes, actu exhiberi queant, pro maioribus autem ratio dubitandi continuo decreſcere videatur. Verum quoniam hoc ſecus euenit pro diuiſoribus non-primis, haec numerorum primorum proprietas vtique demonſtrationem poſtulare eſt viſa.

Theorema.

38. Quicunque numerus primus pro diuiſore P accipiatur; ſemper eiusmodi progreſſio geometrica

 1, a,

1, a, a^2, a^3, a^4 etc. exhiberi poteſt, ex qua ſeries reſiduorum completa oriatur.

Demonſtratio.

Cum poſita in genere progreſſionis geometricae radice x, minore ſemper quam diuiſor P, terminus x^{P-1} per P diuiſus vnitatem relinquat, indeque reſidua eodem ordine vti ab initio reuertantur; oſtendi oportet pro x eiusmodi numerum a aſſumi poſſe, vt a^{P-1} ſit eius infima poteſtas, quae per P diuiſa vnitatem relinquat; quia enim tum in ſerie reſiduorum vnitas ante hunc terminum non occurrit, omnia antecedentia reſidua inter ſe diuerſa ſint neceſſe eſt, quorum numerus cum ſit $= P-1$, omnes numeri diuiſore P minores in ſerie reſiduorum reperientur, eaque propterea erit completa. Res itaque huc redit, vt oſtendatur, non omnes numeros diuiſore P minores ita eſſe comparatos, vt eorum inferior quaepiam poteſtas per P diuiſa vnitatem relinquat. Verum ſi hoc eueniat in poteſtate x^n exiſtente $n < P-1$; iam oſtendimus (§. 21.), eius exponentem n eſſe neceſſario partem aliquotam ipſius $P-1$; cum iam §. 34. docuerim, formam $x^{P-1}-1$ ſemper habere caſus ſibi proprios puta $x=a$, vt nulla inferior diuiſionem per P admittat; perſpicuum eſt poteſtatem a^{P-1} fore infimam, quae per P diuiſa vnitatem relinquat; vnde ſumto tali numero a pro radice progreſſionis geometricae, ex ea ſeries reſiduorum completa oriatur neceſſe eſt.

Scho-

Scholion.

39. Quo haec clarius intelligantur, conueniet pro ſimplicioribus diuiſoribus primis tales ſeries reſiduorum completas conſpectui exponi, vbi quidem progreſſiones geometricas; vnde naſcuntur, non opus eſt exponi, quia radix ſemper ſecundo termino ſeriei reſiduorum eſt aequalis; ſed ſufficiet generalem progreſſionem in capite poſuiſſe; vt inde exponentes, quibus ſinguli termini in ſeriebus reſiduorum reſpondent, perſpiciantur:

<table>
<tr><td>Diuiſor primus</td><td>$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{15}, a^{16}, a^{17}, a^{18}, a^{19}, a^{20}$ etc.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, etc.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2 etc.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1, 3, 2, 6, 4, 5 | 1, 3, 2, 6, 4, | 1, 3, 2, 6, 4, 5 | 1, 3, 2, 6 etc.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6 | 1, 2, 4, 8, 5 10, 9, 7, 3, 6 | 1, 2 etc.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7 | 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, etc.</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12 2, 6 | 1, 3, 9, 10, 13, 5 etc.</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10 | 1, 2, 4, 8 etc.</td></tr>
<tr><td>23</td><td>1, 5, 2, 10, 4, 20, 8, 17, 16, 11, 9, 22, 18, 21, 13, 19, 3, 15, 6, 7, 12, 14 | etc.</td></tr>
</table>

Radices igitur, quibus hic pro iſtis diuiſoribus primis ſumus vſi, ſunt primitiuae, quia earum poteſtates omnia diuerſa reſidua diuiſore minora ſuppeditant, quibus exhauſtis demum vnitas recurrit, et ſeries eodem ordine vti ab initio progrediuntur. Via quidem adhuc non patet, tales radices primitiuas pro quouis diuiſore primo inueniendi, neque etiam demonſtratio, qua tales radices primitiuas ſemper dari euici, methodum eas inueniendi declarat.

Pro quouis autem diuiſore primo radix huiusmodi primitiua tentando non difficulter elicitur. Veluti pro diuiſore 23, primum radicem $a = 2$ aſſumo, vnde haec ſeries reſiduorum naſcitur:

1, 2. 4, 8, 16, 9, 18, 13, 3, 6, 12, 1

quae cum ſit incompleta, iam inde patet radicem primitiuam inter numeros excluſos quaeri debere, quorum minimus qui 5 negotium conficere deprehenditur; niſi hoc accidiſſet; denuo inter numeros excluſos radicem primitiuam quaeſiuiſſem.

Theorema.

40. Si diuiſor primus ſit $P = 2n + 1$, et a radix primitiua; tum progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. terminus a^n reſiduum praebet $2n$ ſeu -1.

Demonſtratio.

Cum a ſit radix primitiua, eius poteſtas a^{2n} per diuiſorem $2n + 1$ diuiſa vnitatem relinquit, neque vlla datur poteſtas inferior idem praeſtans; formula ergo $a^{2n} - 1$ per eundem diuiſorem erit diviſibilis, neque vlla alia inferior. Cum igitur ſit $a^{2n} - 1 = (a^n - 1)(a^n + 1)$, et factor $a^n - 1$ non ſit per diuiſorem $2n + 1$ diuiſibilis, alterum factorem $a^n + 1$ diuiſibilem eſſe neceſſe eſt, ſeu erit $a^n + 1 = m(2n + 1)$ hincque $a^n = m(2n + 1) - 1$ vel $a^n = (m - 1)(2n + 1) + 2n$; vnde manifeſtum eſt poteſtatem a^n per diuiſorem $2n + 1$ diuiſam relinquere -1 ſeu $2n$.

Coroll.

Coroll. 1.

41. Si ergo reſidua ex initio progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. nata ſint $1, \alpha, \beta, \gamma$ etc. reſidua ex terminis $a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, a^{n+3}$ etc. nata erunt $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma$ etc. ſeu $2n, 2n+1-\alpha, 2n+1-\beta, 2n+1-\gamma$ etc. cum ſit $\alpha = \alpha$, $\beta = a\alpha$, $\gamma = a\beta$ etc. ſemperque ſequens terminus oriatur ex praecedente per radicem a multiplicato.

Coroll. 2.

42. Series ergo reſiduorum completa, cuius terminorum numerus eſt $= 2n$, antequam iidem termini recurrant, in duas partes diſpeſcitur $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. et $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma, -$ etc. cuius poſterioris termini ſunt complementa terminorum prioris; ſeu reſidua ex terminis a^x et a^{n+x} nata ſimul ſumta ſunt $= 0$ ſiue diuiſorem $2n+1$ praebent.

Scholion.

43. Quae de binis reſiduis ſociis ſuper ſunt obſeruata, quorum productum vnitate ſuperat multiplum diuiſoris, ea hic ita ſunt diſpoſita, vt a medio, quod eſt -1 vel $2n$ aequidiſtent. Si enim r et s ſint reſidua ex poteſtatibus $a^{n+\nu}$ et $a^{n-\nu}$ nata; productum rs erit reſiduum ex poteſtate a^{2n} natum, quod cum ſit vnitas, erit $rs = 1$ vel $1 + m(2n+1)$. Ipſum autem reſiduum medium -1 ſeu $2n$ ſibi ipſum eſt ſocium, omnino vti primum $+1$ ſe ipſum habet pro ſocio Reliqua reſidua

ſidua ſociata omnia ſunt inaequalia, et quocunque propoſito r, alterum ſibi ſocium s erit $= \frac{1+m(2n+1)}{r}$; ſemper enim m ita definire licet, vt $m(2.n+1)+1$ per r diuiſionem admittat, ſiquidem, vti aſſumimus $2.n+1$ fuerit numerus primus, et r numerus ipſo minor, vel ſaltem ad eum primus. Quemadmodum autem in noſtra ſerie reſidua ſunt diſpoſita, cuiusque ſocium expedite reperitur, cum ambo a medio -1 aequidiſtent.

Theorema.

44. Si diuiſor fuerit numerus quicunque primus P, tot dantur radices primitiuae, quot reperiuntur numeri ad $P-1$ primi eoque minores, quandoquidem tantum radices diuiſore minores conſideramus.

Demonſtratio.

Ponamus $P-1=Q$, et cum certe detur radix primitiua, ſit ea $=a$, ita vt a^Q ſit minima poteſtas ipſius a per P diuiſa vnitatem relinquens. Tum vero ſit n numerus quicunque primus ad Q, ac poteſtas a^n per diuiſorem P diuiſa relinquat reſiduum b, quod vtique ab a erit diuerſum; eritque b itidem radix primitiua, ſeu quod eodem redit ipſa poteſtas a^n vti radix primitiua ſpectari poteſt. Ad quod demonſtrandum oſtendi debet in progreſſione Geometrica

$$1, a^n, a^{2n}, a^{3n}, \ldots\ldots a^{Qn}$$

ante

ante terminum a^{Qn} nullum occurrere, qui per P diviſus vnitatem relinquat. Iam quia a eſt radix primitiua, nullae aliae eius poteſtates per P diuiſae vnitatem relinquunt, niſi quarum exponentes ſint vel Q, vel 2 Q, vel 3 Q vel multiplum quodcunque ipſius Q, vnde quidem manifeſtum eſt poteſtatem a^{Qn} vnitatem relinquere. Simul vero patet, quia numerus n ad Q eſt primus, nullum multiplum ipſius n minus quam Qn ſimul eſſe multiplum ipſius Q, ſi enim mn exiſtente $m < Q$ eſſet multiplum ipſius Q puta $= kQ$, ob $mn = kQ$ foret $m : Q = k : n$, ideoque numeri n et Q non forent inter ſe primi. Quare cum in ſuperiori progreſſione geometrica ante terminum a^{Qn} nullus alius occurrat, qui per diuiſorem P diuiſus vnitatem relinquat, ſeries reſiduorum inde nata Q terminos diverſos complectetur eritque propterea completa; et a^n ſeu reſiduum inde natum b erit radix primitiua. Cum igitur ex quolibet numero n ad Q ſeu $P - 1$ primo obtineatur radix primitiua, admiſſa vna ſaltem primitiua a, manifeſtum eſt, ſemper tot dari radices primitiuas, quot dantur numeri ad numerum $Q = P - 1$ primi, eoque minores, quandoquidem radices maiores ab hac conſideratione excludimus.

Coroll. 1.

45. Pro diuiſore ergo $P = 3$ et $Q = 2$, vnica datur radix primitiua 2 ex poteſtate a^1 nata; pro diuiſore $P = 5$ et $Q = 4$ duae dantur 2 et 3 ex

ex poteſtatibus a^1 et a^3 natae. Pro diuiſore $P = 7$ et $Q = 6$, iterum duae dantur 3 et 5 ex poteſtatibus a^1 et a^5 natae. Pro diuiſore $P = 11$ et $Q = 10$, ad quem numerum Q primi ſunt 1, 3, 7, 9 radices primitiuae ſunt 2, 8, 7, 6 ex poteſtatibus a^1, a^3, a^7, a^9 natae, vti ex ſeriebus reſiduorum completis §. 38. allatis perſpicitur.

Coroll. 2.

46. Pro quouis ergo diuiſore primo P multitudo radicum primitiuarum multitudini numerorum ad numerum $Q = P - 1$ primorum eoque minorum eſt aequalis, ideoque ex compoſitione numeri Q eſt iudicanda. Ita ſi fuerit $Q = \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu$ etc. exiſtentibus α, β, γ etc. numeris primis, conſtat numerum radicum primitiuarum fore =

$$\alpha^{\lambda-1}(\alpha-1).\,\beta^{\mu-1}(\beta-1).\,\gamma^{\nu-1}(\gamma-1) \text{ etc.}$$

Coroll. 3.

47. Ipſi autem numeri ad Q primi facile reperiuntur, dum ex numeris omnibus ipſo Q minoribus expunguntur ii, qui ad Q ſunt compoſiti: qui enim reſtant, inter quos ſemper vnitas reperitur, erunt ad Q primi.

Scholion.

48. Ex data theorematis demonſtratione autem ſimul intelligitur, plures non dari radices primitivas, quam aſſignauimus. Sumta enim quacunque alia poteſtate radicis primitiuae iam cognitae a puta a^m,

cuius

cuius exponens m non ſit primus ad Q, ſed cum Q communem habeat diuiſorem, qui ſit d, vt tam $\frac{Q}{d}$ quam $\frac{m}{d}$ ſit numerus integer; in progreſſione geometrica 1, a^m, a^{2m}, a^{3m}, a^{4m} occurret poteſtas, cuius ſcilicet exponens $= \frac{Q}{d} m$, antequam ad a^{Qm} perueniatur, qui cum ſit quoque $= \frac{m}{d} Q$ ideoque multiplum ipſius Q, ex ea poteſtate iam orietur reſiduum 1, ac propterea ſeries reſiduorum prodibit incompleta. Talis ergo poteſtas a^m ſeu reſiduum inde reſultans certe non erit radix primitiua.

Coroll. 4.

49. Si reſiduum r praebeat radicem primitiuam, etiam eius ſocium s dabit radicem primitiuam. Poſito enim diuiſore primo $P = 2n + 1$ vt ſit $Q = 2n$, ſit $a^{n-\lambda}$ poteſtas praebens reſiduum r, et ſocium s reſultat ex poteſtate $a^{n+\lambda}$. Euidens autem eſt ſi $n - \lambda$ fuerit ad $Q = 2n$ primus, tum etiam exponentem alterum $n + \lambda$ fore ad Q primum.

Scholion.

50. Haud abs re fore arbitror, ſi pro ſimplicioribus diuiſoribus primis P tam numeros ad $Q = P - 1$ primos, quam radices primitiuas iis reſpondentes conſpectui expoſuero:

Diuiſor primus	
3	1 ad 2 primus 2 radix primitiua
5	1, 3 primi ad 4 2, 3 Rad. prim.
7	1, 5 primi ad 6 3, 5 Rad. prim.
11	1, 3, 7, 9 primi ad 10 2, 8, 7, 6 Rad. prim.
13	1, 5, 7, 11 primi ad 12 2, 6, 11, 7 Rad. prim.
17	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 primi ad 16 3, 10, 5, 11, 14, 7, 12, 6 Rad. prim.
19	1, 5, 7, 11, 13, 17 primi ad 18 2, 13, 14, 15, 3, 10 Rad. prim.
23	1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21 primi ad 22 5, 10, 20, 17, 11, 21, 19, 15, 7. 14 Rad. prim.
29	1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27 primi ad 28 2, 8, 3, 19, 18, 14, 27, 21, 26, 10, 11, 15 Rad. prim.
31	1, 7, 11, 13, 17, 19. 23, 29 primi ad 30 3, 17, 13, 24, 22, 12, 11, 21 Rad. prim.
37	1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35 primi ad 36 2, 32, 17, 13, 15, 18, 35, 5, 20, 24, 22, 19 Rad. prim.

Nullam autem hic inter quemque numerum primum et radices primitiuas ipſi conuenientes relationem deprehendere licet, ex qua pro quouis diuiſore primo ſaltem vnica radix primitiua colligi poſſet;

ſet; atque adeo ordo inter iſtas radices aeque abſconditus videtur, ac inter ipſos numeros primos.

Theorema.

51. Si numeri quadrati per quempiam diuiſorem primum P diuidantur, reſidua inde orta, niſi ſint o, in ſerie reſiduorum completa poteſtatibus parium exponentum reſpondent.

Demonſtratio.

Sit pro diuiſore primo P radix quaedam primitiua a, vt haec progreſſio geometrica

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7 \text{ etc.}$$

ſeriem reſiduorum completam praebeat, in qua omnes numeri diuiſore minores occurrant. Sit iam xx quadratum quodcunque per P diuidendum, et r reſiduum ex diuiſione radicis x ortum, vt ſit $x = mP + r$; ac ſi $r = o$, ſeu x multiplum diuiſoris P, etiam reſiduum ex quadrato xx natum erit $= o$, quos caſus, cum per ſe ſint perſpicui, hic non conſideramus. At ſi r ſit numerus quicunque diuiſore P minor, quia in ſerie reſiduorum completa certe continetur, ex certa quadam poteſtate ipſius a, quae ſit a^λ naſcatur neceſſe eſt, tum autem reſiduum ex diuiſione quadrati xx oriundum conueniet cum eo, quod ex diuiſione poteſtatis $a^{2\lambda}$ naſcitur; ſicque ex diuiſione quadratorum alia reſidua reſultare nequeunt, niſi quae ex poteſtatibus formae $a^{2\lambda}$, hoc eſt, quarum exponentes ſunt numeri pares, oriuntur.

Coroll. 1.

52. Reſidua ergo, quae ex diuiſione quadratorum per diuiſorem primum P naſcuntur, conuenient cum iis reſiduis, quae ex hac progreſſione geometrica naſcuntur

$$1,\ a^2,\ a^4,\ a^6,\ a^8,\ a^{10},\ a^{12} \text{ etc.}$$

exiſtente a radice primitiua.

Coroll. 2.

53. Si ergo diuiſor primus ſit $P = 2n + 1$, quam formam omnes numeri primi praeter binarium habent, quia 2 non eſt numerus primus ad $P - 1 = 2n$, etiam a^2 non erit radix primitiua, ideoque ſeries reſiduorum ex quadratis oriunda non erit completa.

Coroll. 3.

54. Quia autem a^{2n} eſt minima poteſtas radicis a vnitatem relinquens, multitudo reſiduorum, quae ex numeris quadratis reſultare poſſunt, certo eſt $= n$, cyphra excluſa totidemque numeri nunquam poſſunt eſſe reſidua quadratorum, quos proinde *non-reſidua* appellaui.

Scholion 1.

55. Hoc etiam ex ſerie reſiduorum completa facillime perſpicitur, quae ſi progreſſioni geometricae ſubſcripta fuerint

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7 \ldots\ldots a^{2n}$$
$$1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta \ldots\ldots 1$$

ex

ex diuiſione quadratorum naſcitur haec ſeries reſiduorum

$1, \beta, \delta, \zeta \ldots\ldots 1$

quorum multitudo manifeſto eſt ſemiſſis illorum, quoniam ſerie etiam continuata eadem eodem ordine recurrunt.

Hinc vti reſidua quadratorum ſunt 1, β, δ, ζ etc. ita *non-reſidua* erunt α, γ, ε, η etc. numero totidem, niſi ſcilicet binarius pro diuiſore primo accipiatur. Quare cum ex ſerie quadratorum 1, 4, 9, 16 vsque, ad $4nn$ continuata omnia reſidua diuerſa oriri debeant, horumque quadratorum numerus ſit $2n$, reſiduorum vero numerus tantum $= n$, neceſſe eſt ex binis horum quadratorum aequalia reſidua naſci, quod adeo per ſe eſt perſpicuum, cum quadrata bb et $(2n + 1 - b)^2$ per diuiſorem $2n + 1$ diuiſa idem reſiduum relinquant.

Scholion.

56. Simili modo oſtendi poteſt, reſidua, quae ex diuiſione cuborum naſcuntur, non diſcrepare ab iis, quae progreſſioni geometricae $1, a^3, a^6, a^9, a^{12}$ etc. conueniunt, denotante a ſemper radicem primitivam: Atque in genere ſi poteſtates numerorum quaecunque:

$1, 2^\lambda, 3^\lambda, 4^\lambda, 5^\lambda, 6^\lambda, 7^\lambda$ etc.

per numerum primum P diuidantur, reſidua inde oriunda eadem erunt atque ea, quae ex hac progreſſione geometrica naſcuntur:

$1, a^\lambda, a^{2\lambda}, a^{3\lambda}, a^{4\lambda}, a^{5\lambda}, a^{6\lambda}$ etc.

exiſten-

exiſtente a radice primitiua pro diuiſore primo P; vnde patet, ſi exponens λ fuerit numerus ad $P-1$ primus, ſeriem reſiduorum fore completam; at ſi exponens λ ad $P-1$ non ſit primus, ac maximus eorum communis diuiſor fuerit $=d$, tum vtique in reſiduis non omnes numeri occurrent, ſed tot tantum, vt eorum multitudo ſit $=\frac{P-1}{d}$, cuius ratio ex hactenus allatis ſatis eſt manifeſta. Sed antequam altiores poteſtates accuratius ſcrutemur, quasdam inſignes proprietates circa reſidua quadratorum explicaſſe iuuabit.

Theorema.

57. Diuiſore primo poſito $P=2n+1$ in reſiduis quadratorum occurret numerus -1 ſeu $2n$, quoties n fuerit numerus par; ſin autem n ſit numerus impar, tum -1 ſeu $2n$ certe non reperietur in reſiduis, ſed erit *non-reſiduum.*

Demonſtratio.

Cum progreſſio geometrica $1, a^2, a^4, a^6, a^8$ etc. omnia producat reſidua quadratorum, euidens eſt in ea occurrere terminum a^n ſi quidem n ſit numerus par, at ſupra vidimus poteſtatem a^n ſemper dare reſiduum -1 ſeu $2n$; ex quo manifeſtum eſt, quoties n fuerit numerus par, toties in reſiduis quadratorum reperiri -1 ſeu $2n$, contra vero ſi n fuerit impar, $2n$ ſeu -1 erit non-reſiduum.

Coroll.

Coroll. 1.

58. Pro omnibus ergo diuiſoribus primis formae $4n+1$ in reſiduis quadratorum certe occurrit -1 ſeu $4n$, et cum productum ex binis reſiduis iterum ſit reſiduum, ſi reſiduum quodcunque fuerit α, etiam $-\alpha$ in reſiduis reperietur: ſcilicet cuiusque reſidui complementum quoque eſt reſiduum.

Coroll. 2.

59. Pro diuiſoribus autem primis formae $4n-1$, in reſiduis quadratorum certe non occurrit -1 ſed erit *non-reſiduum*; hinc cum productum ex reſiduo et non-reſiduo ſemper ſit *non-reſiduum*, omnium reſiduorum complementa erunt *non-reſidua*.

Theorema.

60. Propoſito numero primo formae $4n+1$ ſemper ſumma duorum quadratorum ad eum primorum exhiberi poteſt, quae ſit per eum diuiſibilis atque alterum quidem quadratum pro lubitu accipere licet.

Demonſtratio.

Sumto enim quadrato quocunque bb, quod per $4n+1$ diuiſum relinquat reſiduum β, dabitur ſemper aliud quadratum xx quod per $4n+1$ diuiſum relinquet reſiduum $-\beta$ ſeu $4n+1-\beta$, ex quo ſumma horum duorum quadratorum $bb+xx$ per numerum primum $4n+1$ diuiſibilis ſit ne-

 ceſſe

ceſſe eſt; et cum neutrum per ſe diuiſionem admittat, ea vtique ad $4n+1$ erunt prima.

Coroll. 1.

61. Euidens quoque eſt quadratum xx infinitis modis accipi poſſe, cum omnia quadrata in hac forma $(m(4n+1)\pm x)^2$ idem reſiduum, quod xx praebeant: vnde pro x dabitur valor non ſolum minor quam $4n+1$, ſed etiam minor eius ſemiſſe $\frac{4n+1}{2}$ ſeu minor quam $2n+1$.

Coroll. 2.

62. Semper ergo tales ſummae binorum quadratorum:

$1+pp$, $4+qq$, $9+rr$, $16+ss$, $25+tt$ etc.

exhiberi poſſunt, quae omnes ſint per numerum primum $4n+1$ diuiſibiles; atque ita vt ſingulorum radices ſint minores quum $2n+1$.

Coroll. 3.

63. Cum multitudo numerorum minorum quam $2n+1$ ſit $=2n$ ac ſemper bina quadrata diſparia iungantur, multitudo harum formularum erit n: et quia talis ſumma binorum quadratorum minor eſt quam $2(2n+1)^2 = 8nn+8n+2$, quotus erit minor quam $2n+\frac{3}{2}$ ſeu $2n+2$.

Scholion.

64. Quo has ſummas binorum quadratorum pro quouis numero primo formae $4n+1$ facilius elice-

elicere queamus, reſidua ex quadratis orta pro ſimplicioribus apponamus:

num. primi formae $4n+1$	Quadrata: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256 etc. — Reſidua
5	1,-1,-1,1,0
13	1, 4,-4, 3,-1,-3,-3,-1, 3,-4,4, 1,0
17	1, 4.-8,- 1, 8, 2,-2,-4,-4,-2,2,8,-1,-8, 4, 1
29	1, 4, 9,-13,-4,7,-9, 6,-6,13,5,-1,-5,-7,-7,-5
37	1, 4, 9,16,-12,-1,12,-10,7,-11,10,-4,-16,11.3,-3,-7,-9,-9.

Hinc pro his diuiſoribus formae $4n+1$ ſequentes habebimus binorum quadratorum ſummas per eos diuiſibiles:

Diuiſor 5 1
4 quotus 1.

Diuiſor 13	1	4	16
	25	9	36
ſumma	26	13	52
quotus	2	1	4

Diuiſor 17 ...	1	4	9	36
	16	64	25	49
ſumma	17	68	34	85
quotus	1	4	2	5

Diuiſor 29 ...	1	4	9	16	36	64	121
	144	25	49	100	196	81	169
ſumma ..	145	29	58	116	232	145	290
quotus	5	1	2	4	8	5	10

Diuiſor 37 . . .	1	4	9	16	25	64	81	100	225
	36	144	324	169	49	121	289	196	256
ſumma	37	148	333	185	74	185	370	296	481
quotus	2	4	9	5	2	5	10	8	13.

Si igitur demonſtrari poſſet in his quotis ſemper vnitatem reperiri, haberetur demonſtratio completa Theorematis Fermatiani, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſit ſumma duorum quadratorum. Quoniam vero alibi demonſtraui ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum alios diuiſores non admittere, niſi qui ipſi ſint ſummae duorum quadratorum, demonſtratio iam pro abſoluta eſt habenda, quae multo concinnior eſt ea, quam olim per plures ambages elicueram. Sin autem ſimul perpendamus, in quotis illis nullos numeros primos formae $4n-1$ occurrere poſſe, vti mox demonſtrabitur, haec demonſtratio forte multo magis contrahi poterit.

Theorema.

65. Nulla ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum per vllum numerum primum formae $4n-1$ diuiſibilis exiſtit.

Demonſtratio.

Quia ſumto quocunque quadrato bb, quod per $4n-1$ diuiſum praebeat reſiduum $\mathfrak{C}$, numerus $-\mathfrak{C}$ ſeu $4n-1-\mathfrak{C}$ ex reſiduis quadratorum prorſus excluditur (58) nullum datur quadratum quod ipſi bb addi-

additum ſummam producat per numerum primum $4n-1$ diuiſibilem.

Coroll. 1.

66. Summa ergo duorum quadratorum nullum diuiſorem admittit formae $4n-1$; etiamſi hic diuiſor non ſit primus, quoniam tum inter eius factores ſemper vnus ſaltem primus formae $4n-1$ contineretur; niſi forte ambo quadrata ſeorſim per eum fuerint diuiſibilia.

Coroll. 2.

67. Quando ergo ſumma duorum quadratorum per numerum primum formae $4n+1$ eſt diuiſibilis, quotus inde reſultans neque erit formae $4n-1$, neque vllum habebit factorem primum huius formae, niſi forte ambo quadrata huiusmodi habuerint communem diuiſorem, quo caſu quotus adeo quadratum talis numeri contineret.

Coroll. 3.

68. Ex ordine quotorum ergo, qui ſupra ex diuiſione ſummae binorum quadratorum per numerum primum formae $4n+1$ ſunt orti, excluduntur hi numeri

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31 etc.

ac propterea relinquuntur iſti tantum:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32 etc.

Problema.

69. Si omnes numeri cubici 1, 2^3, 3^3, 4^3 etc. per numerum quemcunque primum P diuidantur, inueſtigare indolem reſiduorum, quae inde naſcentur.

Solutio.

Sit a radix primitiua reſpectu diuiſoris primi P, et cum progreſſio geometrica 1, a, a^2, a^3, a^4 etc. ſeriem reſiduorum completam exhibeat, quilibet numerus x per P diuiſus idem dabit reſiduum, quod quaepiam poteſtas ipſius a quae ſit a^λ. Hinc eius numeri cubus x^3 idem dabit reſiduum quod poteſtas $a^{3\lambda}$ vnde ex cubis eadem naſcentur reſidua, atque ex progreſſione geometrica:

$$1,\ a^3,\ a^6,\ a^9,\ a^{12},\ a^{15} \text{ etc.}$$

ac ſumto λ ita vt 3λ ſit vel $P-1$ vel eius multiplum; poteſtas $a^{3\lambda}$ vnitatem relinquet. Quare ſi pro λ minimus numerus accipiatur, cuius triplum ſit per $P-1$ diuiſibile, numerus λ ſimul multitudinem omnium reſiduorum diuerſorum, quae ex diviſione cuborum reſultare poſſunt, indicabit.

Cum iam omnis numerus primus ſit vel formae $3n+1$ vel $3n+2$, pro vtraque forma iudicium ſeorſim eſt inſtituendum.

I. Sit ergo $P=3n+1$, et quia $P-1=3n$, fiet $\lambda=n$, et reſidua cuborum omnia ex hac progreſſione geometrica naſcentur:

$$1,\ a^3,\ a^6,\ a^9 \ldots\ldots\ a^{3n-3}$$

quia

quia ſequens terminus a^{3n} iterum vnitatem producit. Hinc non plures quam n numeri in reſiduis occurrent ac reliqui duplo plures excluduntur, eruntque non reſidua.

II. Si diuiſor primus ſit $P = 3n + 2$, ideoque $P - 1 = 3n + 1$ minor numerus pro λ accipi nequit, quam $\lambda = 3n + 1$, vt 3λ pro $P - 1$ fiat diuiſibile, vnde omnia reſidua diuerſa ex hac progreſſione geometrica naſcentur:

$$1, a^3, a^6, a^9 \ldots\ldots a^{9n}$$

quorum numerus cum ſit $= 3n + 1$, in reſiduis omnes plane numeri diuiſore P minores occurrent, nullique excluduntur, ſeu nulla dabuntur *non-reſidua*.

Coroll. 1.

70. Si ergo diuiſor primus P fuerit formae $3n + 1$, cuiusmodi numeri ſunt:

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 etc.

in reſiduis cuborum tantum n numeri diuerſi occurrunt indeque $2n$ numeri excluduntur.

Coroll. 2.

71. Quare ſi haec cuborum progreſſio

$$1, 2^3, 3^3, 4^3 \ldots\ldots (3n)^3$$

vnde omnia reſidua diuerſa prodire debent, per numerum primum $3n + 1$ diuidantur, quia terminorum numerus eſt $= 3n$, quodlibet reſiduum ter occurrat neceſſe eſt, ſeu ſemper terni cubi, minores

qoum

quam $(3n)^3$, exhiberi poſſunt qui idem reſiduum producant.

Scholion. 1.

72. Reſpectu ergo cuborum numeri primi formae $3n+1$ praecipue notari merentur; operaeque pretium erit reſidua in caſibus ſimplicioribus notaſſe:

Diu. pr. $3n+1$	$1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 11^3, 12^3, 13^3, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3$ Reſidua
7	1, 1, -1, 1, -1, -1, 0
13	1, -5, 1, -1, -5, -5, 5, 5, 1, -1, +5, -1, 0
19	1, 8, 8, 7, -8, 7, 1, -1, 7, -7, 1, -1, -7, 8, -7, -8, -8, -1, 0

vbi manifeſto quoduis reſiduum ter occurrit; totiesque idem ſigno − affectum: cuius ratio inde eſt perſpicua, quod poſtremus cuiusque ordinis cubus $(3n)^3$ pro reſiduo dat -1, et producta ex binis reſiduis ſemper quoque inter reſidua reperiantur. Cum igitur praeter cubum $(3n)^3$ ſemper dentur duo minores pariter reſiduum -1 habentes, qui ſint f^3 et g^3, erunt formulae $1+f^3$ et $1+g^3$ per $3n+1$ diuiſibiles, et quia neque $1+f$ neque $1+g$ diuiſionem admittit, neceſſe eſt vt hae $1-f+ff$ et $1-g+gg$ ſint diuiſibiles; vbi quidem obſeruare licet ſemper eſſe debere $g=-ff$ vel $g=m(3n+1)-ff$ quia tum fit $1+g^3=1-f^6$, quae aeque ac $1+f^3$ eſt diuiſibilis.

Scholion 1.

73. Sint f^3, g^3, h^3 terni cubi minores quam $(3n+1)^3$, qui per numerum primum $3n+1$ diuiſi

diuiſi idem relinquant reſiduum, et quia binorum differentiae g^3-f^3, h^3-f^3 et h^3-g^3 diuiſionem admittunt dum factores $g-f$, $h-f$, $h-g$ diuiſore ſunt minores, hae tres formae $ff+fg+gg$, $ff+fh+hh$, $gg+gh+hh$ ſingulae per $3n+1$ diuiſibiles ſint neceſſe eſt, hincque etiam binarum differentiae $hh-gg+fh-fg=(h-g)(f+g+h)$. Vnde patet quoque ſummam radicum $f+g+h$ per diuiſorem $3n+1$ eſſe diuiſibilem: quae proprietas illi eſt analoga, qua inuenimus ſi bina quadrata ff et gg per numerum quempiam primum P diuiſa idem reſiduum relinquant, dum ambo ſunt minora quam P^2, tum ſummam radicum $f+g$ per P eſſe diuiſibilem. Pro caſu noſtro trium cuborum erit quoque

$$h(ff+fg+gg)-g(ff+fh+hh)=ff(h-g)-gh(h-g)$$

ideoque formula $ff-gh$ per $3n+1$ diuiſibilis, ſimilique modo $gg-fh$ et $hh-fg$; hinc iſtas duas formulas ab illa $gg+gh+hh$ auferendo relinquitur haec $fg+fh+gh$ pariter per $3n+1$ diuiſibilis; et haec combinatio $(ff+fg+gg)+(hh-fg)$ praebet hanc $ff+gg+hh$ itidem per $3n+1$ diuiſibilem. Quocirca hoc habebimus Theorema ſatis memorabile.

Theorema.

74. Si f^3, g^3, h^3 fuerint terni cubi minores quam $(3n+1)^3$, qui per numerum primum $3n+1$ diuiſi idem relinquant reſiduum, tum ſequentes formulae

$f+g+h$; $fg+fh+gh$; $ff+gg+hh$
ſingulae diuiſionem per $3n+1$ admittent.

Coroll.

75. Ita pro diuiſore 19 videmus hos tres cubos 4^3, 6^3 et 9^3 idem reſiduum 7 dare; vnde ob $f=4$, $g=6$, $h=9$ fit $f+g+h=19$; $fg+fh+gh=114=6.19$ et $ff+gg+hh=133=7.19$.

Theorema.

76. Semper numeri huius formae $pp+3qq$ exhiberi poſſunt per numerum primum huius formae $3n+1$ diuiſibiles. At vero nulla eiusmodi datur formula $pp+3qq$, quae per vllum numerum primum huius formae $3n-1$ ſit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Si $3n+1$ eſt numerus primus, tum tres adeo cubi f^3, g^3, h^3 quorum radices ipſo ſunt minores, exhiberi poſſunt, qui per $3n+1$ diuiſi idem reſiduum relinquant; vnde g^3-f^3 per $3n+1$ diuiſionem admittet hincque etiam $ff+fg+gg$. At haec forma eſt vel $(f+\frac{1}{2}g)^2+3(\frac{1}{2}g)^2$ ſi g ſit numerus par, vel $(\frac{1}{2}f+g)^2+3(\frac{1}{2}f)^2$ ſi f ſit par, vel $(\frac{f-g}{2})^2+3(\frac{f+g}{2})^2$, ſi ambo ſint impares, vnde forma $ff+fg+gg$ ſemper ad hanc $pp+3qq$ reducitur.

At ſi $3n-1$ ſit diuiſor primus, omnes cubi, quorum radices ipſo ſunt minores, diuerſa praebent

bent reſidua, neque ergo binorum differentia, vel numerus huius formae $ff + fg + gg$ exhiberi poteſt, qui per $3n - 1$ diuidi poſſet; quod proinde etiam de numeris huius formae $pp + 3qq$ locum habet. Atque hoc adeo de omnibus numeris formae $3n - 1$ valet, quoniam ſi non fuerint primi, factorem ſaltem primum iſtius formae inuoluunt.

Coroll. 1.

77. Si igitur forma $pp + 3qq$ per numerum primum $3n + 1$ ſit diuiſibilis, et quadratum qq per eundem diuiſum relinquat reſiduum γ, alterum quadratum pp relinquet reſiduum -3γ. Vnde ſi omnes numeri quadrati per numerum primum $3n + 1$ diuidantur, in reſiduis certe reperitur -3 vel $3n - 2$.

Coroll. 2.

78. Sin autem omnes numeri quadrati per numerum primum formae $3n - 1$ diuidantur, in ſerie reſiduorum certe non erit numerus -3; ideoque -3 vel $3n - 4$ erit non-reſiduum.

Scholion.

79. Hinc ſi numeri quadrati per numerum quemcunque primum diuidantur, de binis numeris $+3$ et -3 iudicari poterit, vtrum in ordine reſiduorum an *non-reſiduorum* occurrant. Omnes enim numeri primi praeter 2 et 3 qui hic non ſpectantur in aliqua harum quatuor formarum continentur:

$$12m + 1 \quad 12m + 5; \quad 12m + 7; \quad 12m + 11$$

quas ſingulas contemplemur.

I. Si diuiſor primus ſit formae $12m+1$, quatenus haec forma eſt $4n+1$, tam $+1$ quam -1 erit reſiduum; quatenus vero eſt $3n+1$, reſiduum quoque erit -3, hincque etiam $+3$. Hoc ergo in ordine reſiduorum occurrent $+3$ et -3

II. Si diuiſor primus ſit formae $12m+5$, quatenus haec forma eſt $4n+1$, in reſiduis erunt $+1$ et -1; quatenus vero eſt $3n-1$ in reſiduis non reperitur -3, ſeu -3 erit non-reſiduum, hincque etiam $+3$. Quare hoc caſu neuter numerorum $+3$ et -3 inter reſidua reperietur.

III. Si diuiſor primus ſit formae $12m+7$, quatenus haec forma eſt $4n-1$ erit -1 non-reſiduum, quatenus vero eſt $3n+1$ erit -3 reſiduum, ideoque $+3$ non-reſiduum. Vnde hoc caſu erit -3 reſiduum at $+3$ non-reſiduum.

IV. Si diuiſor primus ſit formae $12m+11$, quatenus haec forma eſt $4n-1$, erit -1 non-reſiduum, quatenus vero eſt formae $3n-1$ erit quoque -3 non-reſiduum, vnde $+3$ vtpote productum ex duobus non-reſiduis inter reſidua occurret. Quare hoc caſu erit $+3$ reſiduum at -3 non-reſiduum.

Ad hanc ergo egregiam proprietatem conſideratio cuborum nos perduxit, quae via cum ſatis ſit obliqua, alia magis naturalis maxime deſideratur.

Proble-

Problema.

80. Si omnes poteſtates quartae per numerum quemcunque primum P diuidantur, inueſtigare indolem reſiduorum, quae inde naſcentur.

Solutio.

Poſita a radice primitiua reſpectu diuiſoris P, vt a^{P-1} ſit infima poteſtas vnitatem relinquens, ac reſidua quaeſita orientur quoque ex hac progreſſione geometrica $1, a^4, a^8, a^{12}, a^{16}$ etc. eousque continuanda, donec exponens per $P-1$ fiat diuiſibilis, quod ſi eueniat in exponente 4λ, erit λ multitudo reſiduorum.

I. Sit diuiſor primus $P = 4n + 1$, vt ſit $P - 1 = 4n$; vnde vt 4λ per $4n$ diuidi queat, erit $\lambda = n$, hocque caſu reſidua quaeſita omnia ex hac progreſſione geometrica naſcentur

$$1,\ a^4,\ a^8,\ a^{12} \ldots\ldots\ldots a^{4n-4}$$

quorum multitudo eſt n.

II. Sit diuiſor primus $P = 4n + 3$, vt ſit $P - 1 = 4n + 2$; vnde ſumi debet $\lambda = 2n + 1$, et haec progreſſio geometrica

$$1,\ a^4,\ a^8,\ a^{12} \ldots\ldots\ldots a^{8n}$$

dabit omnia reſidua quaeſita; cum, autem a^{4n+2} vnitatem relinquat vti a^0, termini

$$a^{4n+4},\ a^{4n+8},\ a^{4n+12} \text{ etc.}$$

 eadem

eadem reſidua praebent atque a^2, a^6, a^{10} etc. vnde his interpolatis oritur progreſſio

$$1, a^2, a^4, a^6, a^8 \ldots\ldots\ldots a^{8n}$$

quae eadem reſidua dat, ac progreſſio numerorum quadratorum. Ex biquadratis ergo hoc caſu eadem plane reſidua omnia naſcuntur atque ex ipſis quadratis.

Coroll. 1.

81. Si ergo numeri biquadrati per numerum primum formae $4n+1$ diuidantur, tantum n reſidua diuerſa oriuntur, vnde ſemper quaterna biquadrata dantur p^4, q^4, r^4, s^4, quorum radices diuiſore ſunt minores, quae per $4n+1$ diuiſa idem praebeant reſiduum; vbi quidem perſpicuum eſt fore $s=-p$ et $r=-q$ ſeu quod eodem redit $s=4n+1-p$ et $r=4n+1-q$. Hinc iſtae formulae $p+q+r+s$; $p^2+q^2+r^2+s^2$ et $p^3+q^3+r^3+s^3$ per $4n+1$ erunt diuiſibiles.

Coroll. 2.

82. Quaterna ergo biquadrata, quae per numerum primum $4n+1$ diuiſa vnitatem relinquent, erunt valores ipſius x, quibus formula x^4-1 per $4n+1$ fit diuiſibilis, vnde primo eſt $x=1$, tum ſi alius valor ſit $x=b$, erit quoque $x=b^2$ et $x=b^3$; neque vltra progredi opus eſt, quia b^4 vnitati aequiualet.

Coroll. 3.

83. Cum poteſtas a^{2n} per $4n+1$ reſiduum det -1, patet ſi n ſit numerus par, in reſiduis biqua-

biquadratorum ſemper reperiri -1, et quoduis reſiduum quoque ſigno $-$ affectum occurrere; quod ergo euenit, ſi diuiſor primus ſit formae $8m+1$; ſin autem ſit formae $8m+5$, tum -1 erit nonreſiduum.

Coroll. 4.

84. Si ergo diuiſor primus ſit formae $8m+1$, pro quouis biquadrato b^4 ſemper dabitur aliud p^4, vt ſumma b^4+p^4 ſit per $8m+1$ diuiſibilis, atque adeo quaterna huiusmodi biquadrata p^4 aſſignari poterunt, quorum radices diuiſore ſint minores, ſin autem diuiſor ſit formae $8m+5$, tum nulla ſumma binorum biquadratorum per eum diuiſibilis exhiberi poteſt.

Scholion.

85. Cum ſumma binorum biquadratorum ſit $b^4+p^4=(bb-pp)^2+2(bp)^2$ itemque $b^4+p^4=(bb+pp)^2-2(bp)^2$, pro quouis diuiſore primo formae $8m+1$, numeri tam huius formae $xx+2yy$ quam huius $xx-2yy$ exhiberi poſſunt per $8m+1$ diuiſibiles, vnde ſi numeri quadrati per talem numerum primum $8m+1$ diuidantur, in reſiduis occurrent numeri $+2$ et -2. Cum igitur demonſtrari poſſit, numeros huius formae $xx+2yy$ alios diuiſores non admittere, niſi qui ipſi ſint eiusdem formae, hinc ſequitur, omnes numeros primos formae $8m+1$ ſimul in forma $xx+2yy$ contineri. Quod eſt inſigne Theorema Fermatii, cuius demonſtrationem nunc primum mihi

hi cruere contigit Huic autem aliud affine Fermatius propoſuit, quod etiam omnes numeri primi huius formae $8m+3$ in eadem forma $xx+2yy$ contineantur, cuius demonſtrationem ex hac ſpeculatione petere non licet, ſequentem ergo ab amico mecum communicatam hic apponam.

Theorema.

85. Nullus numerus huius formae $2pp-qq$, ſiquidem p et q ſint numeri inter ſe primi, vllum admittit diuiſorem ſiue huius formae $8m+3$ ſiue huius $8m-3$.

Demonſtratio.

Si numerorum p et q ambo ſint impares, numerus $2pp-qq$ habebit formam $8n+1$, ſin p ſit par et q impar, formam habebit $8n-1$; ſin autem p ſit impar et q par $=2r$, forma erit $2(pp-2rr)$, ideoque vel $2(8n+1)$ vel $2(8n-1)$; ſemiſſis vero $pp-2rr$ iterum in forma $2pp-qq$ continetur, cum ſit $pp-2rr=2(p+r)^2-(p+2r)^2$. Hoc praemiſſo ſi forma $2pp-qq$ diuiſorem haberet $8m\pm3$, per eundem diuiſibilis eſſet numerus formae $8n\pm1$, quotusque ergo foret iterum formae $8m\pm3$, atque minor diuiſore; quoniam p et q non ſolum diuiſore, ſed etiam eius ſemiſſe minores ſtatuere licet. Cum igitur forma $2pp-qq$ per quotum ideoque numerum minorem formae $8m\pm3$ eſſet diuiſibilis, vbi iterum p et q infra eius ſemiſſem deprimere licet, quotus denuo minor diuiſore orir etur, et numeri p

et

et q ſemper primi inter ſe manerent, ita vt neuter vnquam ad nihilum redigeretur. Tandem ergo ad numerum minimum formae $2pp-qq$ perueniretur, qui foret per numerum formae $8m\pm3$ hoc eſt vel 3 vel 5 diuiſibilis, quod autem fieri non poſſe per ſe eſt perſpicuum.

Coroll. 1.

87. Quod ſi ergo omnes numeri quadrati per diuiſores primos formae $8m\pm3$ diuidantur, in reſiduis certe non occurret $+2$, quia alioquin eiusmodi forma $2pp-qq$ diuiſibilis exhiberi poſſet: ideoque pro talibus diuiſoribus erit $+2$ non-reſiduum.

Coroll. 2.

88. Pro diuiſoribus autem primis formae $8m+3$, etiam -1 eſt non-reſiduum, vnde cum producta ex binis non-reſiduis quadratorum tranſeant in reſidua, inter reſidua certe reperietur -2, hincque ſemper numeri formae $2pp+qq$ exhiberi poterunt per numerum primum $8m+3$ diuiſibiles, ex quo numerus primus $8m+3$ ipſe eiusdem formae $2pp+qq$ ſit neceſſe eſt, quod eſt alterum Theorema Fermatii.

Coroll. 3.

89. Pro diuiſoribus autem primis formae $8m-3$, in reſiduis quadratorum reperitur -1, vnde cum productum ex reſiduo in non-reſiduum

ſit non-reſiduum, tam $+2$ quam -2 erunt non-reſidua; ideoque neutra harum formarum $2pp+qq$ et $2pp-qq$ vnquam erit diuiſibilis per vllum numerum primum formae $8m-3$.

Scholion 1.

90. Eodem modo demonſtrari poteſt nullum numerum formae $2pp+qq$, quoniam huiusmodi numeri omnes ſunt vel $8n+1$ vel $8n+3$, per vllos numeros formae vel $8m-1$ vel $8m-3$ eſſe diuiſibiles, quoniam quoti eiusdem forent formae et cum ſint diuiſore minores, perueniendum eſſet ad minores numeros $2pp+qq$ qui forent per $8n-1$ vel $8n-3$ hoc eſt per 7 vel 5 diuiſibiles, quod autem euenire nequit. Hinc porro ſequitur pro diuiſoribus primis formae $8m-1$ vel $8m-3$ neceſſario eſſe -2 non-reſiduum: ideoque pro diuiſoribus $8m-1$ erit $+2$ reſiduum, et pro diuiſoribus $8m-3$ non-reſiduum. Quod autem pro diuiſoribus primis formae $8m+1$ tam $+2$ quam -2 in reſiduis quadratorum occurrant, ſimili ratiocinio vix oſtendi poſſe videtur.

Scholion 2.

91. Quae hactenus de reſiduis quadratorum ſunt eruta, vtrum numeri ± 2, ac ſupra etiam ± 3 in iis occurrant nec ne? ita conſpectui expoſuiſſe iuuabit:

Diui-

Diuiſor primus

$4n+1$	$+1$	reſiduum
	-1	reſiduum
$4n-1$	$+1$	reſiduum
	-1	non-reſid.
$8n+1$	$+2$	reſiduum
	-2	reſiduum
$8n-1$	$+2$	reſiduum
	-2	non-reſid.
$8n+3$	$+2$	non-reſid.
	-2	reſiduum
$8n-3$	$+2$	non-reſid.
	-2	non reſid.
$12n+1$	$+3$	reſiduum
	-3	reſiduum
$12n-1$	$+3$	reſiduum
	-3	non-reſid.
$12n+5$	$+3$	non-reſid.
	-3	non-reſid.
$12n-5$	$+3$	non-reſid.
	-3	reſiduum.

Hinc per inductionem vlterius progredi licet hoc modo

Erit		ſi diuiſor primus ſit
$+5$	reſiduum	$20n+1$; $20n+9$
-5	reſiduum	
$+5$	reſiduum	$20n-1$; $20n-9$
-5	non-reſid.	

+ 5 non-reſid. − 5 reſiduum	}	$20n + 3;\ 20n + 7$
+ 5 non-reſid − 5 non-reſid.	}	$20n - 3;\ 20n - 7$
+ 7 reſiduum − 7 reſiduum	}	$28n + 1,\ -3,\ 9$
+ 7 reſiduum − 7 non reſid.	}	$28n - 1,\ +3,\ -9$
+ 7 non reſid. − 7 reſiduum	}	$28n + 11,\ +15,\ +23$
+ 7 non-reſid − 7 non reſid.	}	$28n + 5,\ +13,\ +17$
+ 11 reſiduum − 11 reſiduum	}	$44n + 1,\ +9,\ +25,\ +5,\ +37,$
+ 11 reſiduum − 11 non-reſid.	}	$44n - 1,\ -9,\ -25,\ -5,\ -37,$
+ 11 non-reſid. − 11 reſiduum	}	$44n + 3,\ +15,\ +23,\ +27,\ +31,$
+ 11 non-reſid. − 11 non-reſid.	}	$44n + 13,\ +17,\ +21,\ +29,\ +41$

quorum Theorematum demonſtrationes ſcientiam numerorum haud mediocriter promouerent.

Theorema.

92. Si omnium numerorum poteſtates exponentis λ ſcilicet

$1,\ 2^\lambda,\ 3^\lambda,\ 4^\lambda,\ 5^\lambda,\ 6^\lambda$ etc.

per

per numerum primum formae $\lambda n + 1$ diuidantur, multitudo reſiduorum diuerſorum erit $= n$, ideoque multitudo non-reſiduorum $= (\lambda - 1) n$.

Demonſtratio.

Sit a radix primitiua pro diuiſore primo $\lambda n + 1$, cuius ergo poteſtates omnia plane ſuppeditant reſidua, et quilibet numerus diuiſore minor x erit reſiduum certae poteſtatis a^m, vnde eius poteſtas x^λ idem praebebit reſiduum quod $a^{\lambda m}$; quare omnia reſidua quaeſita oriuntur ex hac progreſſione geometrica:

$$1,\ a^\lambda,\ a^{2\lambda},\ a^{3\lambda},\ a^{4\lambda} \ldots\ldots a^{(n-1)\lambda}$$

quoniam poteſtas ſequens $a^{\lambda n}$ per numerum primum $\lambda n + 1$ diuiſa iterum vnitatem relinquit, eaque eſt minima hoc praeſtans; ex quo multitudo reſiduorum inde reſultantium eſt $= n$, et cum multitudo omnium numerorum diuiſore minorum ſit $= \lambda n$, reliquorum ex ſerie reſiduorum excluſorum multitudo erit $= (\lambda - 1) n$.

Coroll. 1.

93. Quare ſi ſeries poteſtatum $1, 2^\lambda, 3^\lambda, 4^\lambda$ etc. vsque ad $(\lambda n)^\lambda$ continuetur, in ea ſemper totidem termini, quot exponens λ continet vnitates, reperientur, qui per numerum primum $\lambda n + 1$ diuiſi idem reſiduum relinquant. Totidem ergo erunt qui vnitatem relinquunt, ac ſi vnius radix ſit $= r$, reliquorum radices erunt

$$r^2,\ r^3,\ r^4 \ldots\ldots r^{\lambda - 1}.$$

Coroll. 2.

94. Semper ergo plures huiusmodi numerorum formae $p^\lambda - q^\lambda$ exhiberi poſſunt per numerum primum $\lambda n + 1$ diuiſibiles, ita vt factor $p - q$ non ſit diuiſibilis; atque adeo alterum numerorum p et q pro lubitu accipere licet.

Coroll. 3.

95. Si n ſit numerus par, in progreſſione geometrica $1, a^\lambda, a^{2\lambda}$ etc. occurret terminus $a^{\frac{1}{2}n\lambda}$, cui reſiduum -1 reſpondet; quare ſi diuiſor primus ſit $2m\lambda + 1$ in reſiduis reperietur -1, ſin autem ſit $(2m+1)\lambda + 1$ tum -1 erit non-reſiduum: euidens autem eſt ſi λ ſit numerus impar, poſteriorem formam locum habere non poſſe.

Scholion 1.

96. Si omnes numerorum poteſtates quaeſitae $1, 2^5, 3^5, 4^5$ etc. per numeros primos formae $5n+1$ qui ſunt: 11, 31, 41, 61, 71 etc. diuidantur, tantum n reſidua diuerſa reſultabunt, inter quae vtique reperietur -1. Huiusmodi ergo numerorum formae $p^5 \pm q^5$ dabuntur per numerum primum $5n+1$ diuiſibiles, ita factor $p \pm q$ diuiſionem non admittat. Hinc alter factor qui eſt $p^4 \mp p^3 q + p^2 q^2 \mp p q^3 + q^4$ per eundem erit diuiſibilis, qui cum ſit $(pp + \frac{1}{2}pq + qq)^2 - 5(\frac{1}{2}pq)^2$, dabitur huiusmodi forma $ff - 5gg$ per $5n+1$ diuiſibilis; vnde ſequitur ſi quadrata diuidantur per numerum primum formae $5n+1$, tum inter reſidua certe repe-

reperiri $+5$, quod cum coniectura ante allata congruit.

Scholion 2.

97. Simili modo ſi poteſtates ſeptimae per numerum primum $7n+1$ diuidantur, dabuntur huiusmodi formae p^7-q^7 ſeu $p^6+p^5q+p^4q^2+p^3q^3+p^2q^4+pq^5+q^6$ per eum diuiſibiles; haec vero expreſſio reducitur ad hanc formam:

$$(p^3+\tfrac{1}{2}ppq-\tfrac{1}{2}pqq-q^3)^2+7(\tfrac{1}{2}ppq+\tfrac{1}{2}pqq)^2.$$

Vnde ſemper numeri huius formae $ff+7gg$ exhiberi poſſunt per numerum primum $7n+1$ diuiſibiles. Ex quo ſequitur ſi omnia quadrata per numerum primum formae $7n+1$ diuidantur inter reſidua certe repertum iri -7, quo etiam coniectura ſupra data confirmatur.

NOVA

NOVA RATIO QVANTITATES IRRATIONALES PROXIME EXPRIMENDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnem quantitatem irrationalem ſimplicem ad hanc formam $(1+x)^n$ reduci poſſe conſtat, ſiquidem exponens n numerum quemcunque fractum deſignare aſſumatur; quicunque enim numerus N ad exponentem fractum $n = \frac{\mu}{\nu}$ eleuandus proponatur, eum ſemper ad hanc formam $a^\nu + b$ reuocare licet, vnde formula propoſita fit $(a^\nu + b)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu \left(1 + \frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$; ſicque irrationalibus continetur in expreſſione $\left(1 + \frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, quae cum formula propoſita $(1+x)^n$ congruit ponendo $\frac{b}{a^\nu} = x$ et $\frac{\mu}{\nu} = n$. Ac ſi pro a fractiones velimus admittere, ac b aeque negatiue ac poſitiue ſumere, quantitas $\frac{b}{a^\nu}$ hoc modo iam quouis caſu ſatis parua effici poteſt, vnde etiam more conſueto formula $(1+x)^n$ in ſeriem admodum conuergentem reſoluitur.

2. Per

2. Per euolutionem ſcilicet binomii Neutonianam haec formula $(1+x)^n$ duplici modo in ſeriem infinitam conuertitur, primum nempe directe:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}$$

tum vero quia eſt $(1+x)^n = \frac{1}{(1+x)^{-n}}$ erit quoque

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}}$$

Hinc vero porro has expreſſiones inuicem multiplicando, et pro $2n$ ſcribendo n deriuabitur tertia expreſſio multo magis conuergens:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n}{2}x + \frac{n(n-2)}{2.\ 4}x^2 + \frac{n(n-2)(n-4)}{2.\ 4.\ 6}x^3 + \text{etc.}}{1 - \frac{n}{2}x + \frac{n(n+2)}{2.\ 4}x^2 - \frac{n(n+2)(n+4)}{2.\ 4.\ 6}x^3 + \text{etc.}}$$

3. Attendenti autem facile patebit, infinitas expreſſiones huic poſtremae ſimiles exhiberi poſſe, quae ſingulae aequales ſint formulae propoſitae $(1+x)^n$, ſi enim ponamus:

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 - etc.}$$

determinatio coëfficientium praebet problema indeterminatum, atque adeo ſi vel numerator vel denominator ad lubitum aſſumitur, alterius coëfficientes inde determinantur. Hinc quaeſtio naſcitur maximi momenti, quomodo tam numerator quam denominator determinari debeant, vt ambo ſimul maxime conuergant: atque hic quidem denominatori finitum terminorum numerum tribuere licet, vbi quaeſtio huc redit, quomodo coëfficientes denomina-

 toris

toris aſſumi oporteat, vt pro numeratore reſultet ſeries maxime conuergens.

4. Quodſi autem in denominatore datus terminorum numerus conſtituatur, numerator erit ſeries maxime conuergens, ſi vnus pluresue eius termini ſe ordine excipientes plane euaneſcant; tum enim ſequentes termini tam fient exigui, ſi quidem fuerit $x < 1$, vt ſine notabili errore reiici queant. Atque hic notari conuenit, ſi pro denominatore ſumatur binomium $1 - \alpha x$, quemlibet numeratoris terminum ad nihilum redigi poſſe; ſin autem denominator ſtatuatur trinomium, bini termini ſucceſſiui numeratoris in nihilum redigi poterunt; terni vero et ita porro, ſi pro denominatore quadrinomium vel multinomium aſſumatur. Tum vero etiam perſpicuum eſt aduergentiam eo fore maiorem, quo longius numeratoris termini euaneſcentes ab initio diſtent; vnde ſequentia problemata reſoluenda occurrunt.

Problema I.

5. *Binomii poteſtatem* $(1 + x)^n$ *transformare in talem expreſſionem maxime conuergentem:*

$$(1 + x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x}$$

denominatore exiſtente binomio.

Solutio.

Si poteſtas $(1 + x)^n$ in ſeriem euoluatur, eaque per denominatorem $1 - \alpha x$ multiplicetur, orietur ſequens aequatio conficienda:

$0 = 1$

$$0 = 1 + \tfrac{n}{1}x + \tfrac{n(n-1)}{1.\,2}x^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^3 + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}x^4 + \text{etc.}$$
$$-\alpha - \tfrac{n}{1}\alpha - \tfrac{n(n-1)}{1.\,2}\alpha - \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\alpha - \text{etc.}$$
$$-1 - A - B - C - D - \text{etc.}$$

Iam prouti numeratoris terminus vel ſecundus vel tertius vel quartus etc. euaneſcere debet, ſequentes coëfficientium determinationes obtinebuntur:

I. Si $A = 0$, habetur ſtatim $\alpha = \frac{n}{1}$; et ſequentes numeratoris termini erunt:

$$B = -\tfrac{n(n+1)}{1.\,2};\quad C = -\tfrac{2n(n-1)(n+1)}{1.\,2.\,3};\quad D = -\tfrac{3n(n-1)(n-2)(n+1)}{1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$

II. Si $B = 0$, habetur ſtatim $\alpha = \frac{n-1}{2}$, et pro numeratore:

$$A = \tfrac{n+1}{1.\,2};\quad C = -\tfrac{1(n+1)n(n-1)}{2.\,1.\,2.\,3};\quad D = -\tfrac{2(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.\,1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$

III. Si $C = 0$; habetur $\alpha = \frac{n-2}{3}$ et pro numeratore:

$$A = \tfrac{2(n+1)}{3.\,1};\quad B = \tfrac{1(n+1)n}{3.\,1.\,2};\quad D = -\tfrac{1(n+1)n(n-1)(n-2)}{3.\,1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$

IV. Si $D = 0$; habetur $\alpha = \frac{n-3}{4}$ et pro numeratore:

$$A = \tfrac{3(n+1)}{4.\,1};\quad B = \tfrac{2(n+1)n}{4.\,1.\,2};\quad C = \tfrac{1(n+1)n(n-1)}{4.\,1.\,2.\,3}\ \text{etc.}$$

Hinc iam in genere patet, ſi quilibet alius ſequentium terminorum in numeratore debeat euaneſcere, haberi primo:

$\alpha = \frac{n-\omega}{\omega+1}$ et pro numeratore:

$$A = \tfrac{\omega(n+1)}{(\omega+1)1};\quad B = \tfrac{(\omega-1)(n+1)n}{(\omega+1)\,1.\,2};\quad C = \tfrac{(\omega-2)(n+1)n(n-1)}{(\omega+1)\,1.\,2.\,3}$$
$$D = \tfrac{(\omega-3)(n+1)n(n-1)(n-2)}{(\omega+1)\,1.\,2.\,3.\,4};\quad E = \tfrac{(\omega-4)}{\omega+1}.\tfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

cuius progreſſionis lex eſt manifeſta.

Coroll. 1.

6. Quodſi iam in numeratore termini, qui euaneſcentem ſequuntur, omittantur, habebuntur expreſſiones finitae ac rationales continuo propius valorem $(1+x)^n$ exhibentes; ita ſi primo ponatur $A=0$, habebitur iſta appropinquatio:

$$(1+x)^n = \frac{1}{1-nx}$$

quae etſi a veritate parum recedit, tamen magis aberrat quam ſequentes.

Coroll. 2.

7. Sit $B=0$, et ſecundus caſus praebebit hanc appropinquationem:

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{n+1}{2.1}x}{1-\frac{(n-1)}{2}x} = \frac{1+\frac{(n+1)}{2}x}{1-\frac{(n-1)}{2}x}.$$

Hinc ſi ſit $n=\frac{\mu}{\nu}$ erit:

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1+\frac{(\mu+\nu)}{2\nu}x}{1-\frac{(\mu-\nu)}{2\nu}x}.$$

Coroll. 3.

8. Sit $C=0$, et tertius caſus dabit:

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{2(n+1)}{3.1}x+\frac{1(n+1)n}{3.1.2}x^2}{1-\frac{(n-2)}{2}x}$$

vnde

vnde ſi fuerit $n = \frac{\mu}{\nu}$ erit:

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1 + \frac{2(\mu+\nu)}{3.\,1\,\nu}x + \frac{1(\mu+\nu)\mu}{3.\,1.\,2\,\nu^2}x^2}{1 - \frac{(\mu-2\nu)}{3\nu}x}.$$

Coroll. 4.

9. Sit $D = 0$, et quartus caſus dat:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+1)}{4.\,1}x + \frac{2(n+1)n}{4.\,1.\,2}x^2 + \frac{1(n+1)n(n-1)}{4.\,1.\,2.\,3}x^3}{1 - \frac{(n-3)}{4}x}$$

ideoque ſi $n = \frac{\mu}{\nu}$ erit:

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1 + \frac{3(\mu+\nu)}{4.\,1\,\nu}x + \frac{2(\mu+\nu)\mu}{4.\,1.\,2\,\nu^2}x^2 + \frac{1(\mu+\nu)\mu(\mu-\nu)}{4.\,1.\,2.\,3\,\nu^3}x^3}{1 - \frac{(\mu-3\nu)}{4\nu}x}$$

vnde perſpicuum eſt, quomodo huiusmodi formulae vlterius continuari debent; quamobrem plures hic non exhibeo.

Coroll. 5.

10. In genere autem habebitur haec forma:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(\omega-1)(n+1)}{\omega.\,1}x + \frac{(\omega-2)(n+1)n}{\omega.\,1.\,2}x^2 + \frac{(\omega-3)(n+1)n(n-1)}{\omega.\,1.\,2.\,3}x^3 + \text{etc.}}{1 - \frac{(n-\omega+1)}{\omega}x}$$

vbi pro ω ſumi poteſt numerus quicunque; haecque expreſſio ſi in infinitum continuetur, non ſolum ad veritatem appropinquat, ſed ipſum verum valorem formulae $(1+x)^n$ exhibebit.

Coroll. 6.

11. Si ſumatur $\omega = n + 1$ denominator in vnitatem abibit, orieturque nota ſeries Neutoniana:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}$$

Sin autem pro ω capiatur numerus infinitus, erit:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(n+1)}{1}x + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}}{1+x}$$

cuius ratio quoque ex binomio Neutoniano eſt manifeſta.

Coroll. 7.

12. Si ponatur $\omega = n$ habebitur: $(1+x)^n =$

$$\frac{1 + \frac{(n+1)(n-1)}{1.\ n}x + \frac{(n+1)(n-2)}{1.\ 2}x^2 + \frac{(n+1)(n-1)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{(n+1)(n-1)(n-2)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{n}x}$$

vel numeratorem et denominatorem per n multiplicando:

$$(1+x)^n = \frac{n + \frac{(n+1)(n-1)}{1}x + \frac{(n+1)n(n-2)}{1.\ 2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}}{n-x}$$

Coroll. 8.

13. Si ponatur $\omega = x$, fiet denominator $= x - n$, et obtinetur: $(1+x)^n =$

$$\frac{1 + \frac{(n+1)}{1}(x-1) + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}x(x-2) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}x^2(x-3) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^3(x-4) + \text{etc.}}{x-n}$$

ſimilique modo ex hac expreſſione innumerabiles ſeries deduci poſſunt, quarum ratio aliunde non tam facile perſpici poterit; vnde haec inueſtigatio doctrinam ſerierum non mediocriter amplificare videtur.

Proble-

Problema II.

14. *Binomii poteſtatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi ſeriem maxime conuergentem:*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2}$$

denominatore exiſtente trinomio.

Solutio.

Reſoluta poteſtate $(1+x)^n$ in ſeriem more conſueto, confici oportebit ſequentem aequationem:

$$\begin{array}{rlllll} 0 = & 1 + \frac{n}{1}x & + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^2 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^3 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}x^4 & + etc. \\ & - \alpha & - \frac{n}{1}\alpha & - \frac{n(n-1)}{1.\,2}\alpha & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\alpha & - etc. \\ & & + \beta & + \frac{n}{1}\beta & - \frac{n(n-1)}{1.\,2}\beta & + etc. \\ & - 1 & - A & - B & - C \quad - \quad D & - etc. \end{array}$$

atque hic denominatorem $1 - \alpha x + \beta x^2$ ita definire licet, vt in numeratore bini termini ſucceſſiue euaneſcant, vnde is eo magis conuergens reddetur:

I. Sit $A = 0$ et $B = 0$, erit $\alpha = \frac{n}{1}$ et $\beta = \frac{n(n+1)}{1.\,2}$, vnde habetur

$$C = \frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3} - \frac{(n-1)n}{2.\,1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2}\right) = \frac{1(n+2)(n+1)n}{3.\,1.\,2.\,1}$$

$$D = \frac{n(n-1)}{1.\,2}\left(\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4} - \frac{(n-2)n}{3.\,1} + \frac{n(n+1)}{1.\,2}\right) = \frac{2(n+2)(n+1)n(n-1)}{4.\,1.\,2.\,1.\,2}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4.\,5} - \frac{(n-3)n}{4.\,1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2}\right) = \frac{3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{5.\,1.\,2.\,1.\,2.\,3}$$

et in genere erit:

$$N = \ldots\ldots\left(\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{(n-\nu)n}{(\nu+1)1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2}\right) = \ldots\ldots \frac{\nu(n+2)(n+1)}{1.\,2.\,(\nu+3)}$$

ex quo generali valore illi ſpeciales facile deriuantur.

II.

II. Sit $B = 0$ et $C = 0$, erit pro α et β:

$$\beta - \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 0; \qquad \text{hinc} \quad \alpha = \frac{2(n-1)}{3}$$
$$\beta - \frac{(n-1)}{2}\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = 0; \qquad \beta = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3}.$$

Pro numeratore vero habebitur:

$$A = \frac{n}{1} - \frac{2(n-1)}{3} = \frac{n+2}{3}$$
$$D = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} - \frac{2(n-2)(n-1)}{3 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3}\right) = \frac{1 \cdot 2(n+2)(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}$$
$$E = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} - \frac{2(n-3)(n-1)}{4 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3}\right) = \frac{2 \cdot 3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$F = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{(n-4)(n-5)}{5 \cdot 6} - \frac{2(n-4)(n-1)}{5 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3}\right) = \frac{3 \cdot 4(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

et in genere:

$$N = \ldots\ldots\left(\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{2(n-\nu)(n-1)}{(\nu+1)3} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3}\right) \ldots\ldots \frac{\nu(\nu-1)}{(\nu+2)(\nu+1)} \frac{(n+2)(n+1)}{2 \cdot 3}$$

III. Sit $C = 0$ et $D = 0$, ac pro denominatore erit:

$$\beta - \frac{(n-1)}{2}\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = 0 \qquad \text{hinc} \quad \alpha = \frac{n-2}{2}$$
$$\beta - \frac{(n-2)}{3}\alpha + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} = 0 \qquad \beta = \frac{(n-1)(n-2)}{3 \cdot 4}$$

hincque pro numeratore:

$$A = \frac{n}{1} - \frac{(n-2)}{2} = \frac{n+2}{2}$$
$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3 \cdot 4} = \frac{(n+2)(n+1)}{3 \cdot 4}$$
$$E = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} - \frac{(n-3)(n-2)}{4 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3 \cdot 4}\right) = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Quia autem ſufficit terminos, qui euaneſcentes antecedant, noſſe, ſequentes non determino, quia eorum lex deinceps patebit.

IV. Sit $D = 0$ et $E = 0$, erit pro denominatore:

$$\beta - \frac{(n-2)}{3}\alpha + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} = 0 \qquad \text{hinc} \quad \alpha = \frac{2(n-3)}{5}$$
$$\beta - \frac{(n-3)}{4}\alpha + \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5} = 0 \qquad \beta = \frac{(n-2)(n-3)}{4 \cdot 5}$$

at

at pro numeratore reperietur:

$$A = \frac{n}{1} - \frac{2(n-3)}{5} = \frac{3(n+2)}{5}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{2n(n-3)}{1 \cdot 5} + \frac{(n-2)(n-3)}{4 \cdot 5} = \frac{3(n+2)(n+1)}{5 \cdot 4}$$

$$C = \frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} - \frac{2(n-1)(n-3)}{2 \cdot 5} + \frac{(n-2)(n-3)}{4 \cdot 5}\right) = \frac{(n+2)(n+1)n}{5 \cdot 4 \cdot 3}.$$

V. Sit $E = 0$ et $F = 0$, atque ex allatis facile concludimus fore primo

$$\alpha = \frac{2(n-4)}{6}; \quad \beta = \frac{(n-3)(n-4)}{5 \cdot 6} \text{ tum vero}$$

$$A = \frac{4(n+2)}{6}; \quad B = \frac{6(n+2)(n+1)}{6 \cdot 5}; \quad C = \frac{4(n+2)(n+1)(n+0)}{6 \cdot 5 \cdot 4} \text{ et}$$

$$D = \frac{1(n+2)(n+1)(n+0)(n-1)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}.$$

Generaliter ergo denique has eliciemus determinationes:

$$\alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2}; \quad \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

$$A = \frac{\omega}{1} \cdot \frac{(n+2)}{\omega+2}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{(\omega+2)(\omega+1)\omega}$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{(\omega+2)(\omega+1)\omega(\omega-1)}$$

$$E = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{(\omega+2)(\omega+1)\omega(\omega-1)(\omega-2)}$$

etc.

vnde etiam coëfficientes terminorum poſt euaneſcentes ſequentium facile formantur.

Coroll. I.

15. Quando pro denominatore in genere eſt:

$$\alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2} \text{ et } \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

 pro

pro numeratore habebimus:

$$A = \frac{\omega}{\omega + 2} \cdot \frac{n+2}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega - 1)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{(\omega - 1)(\omega - 2)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{(\omega - 2)(\omega - 3)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{(\omega - 3)(\omega - 4)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

quorum valorum analogia ad eos, qui in primo problemate ſunt inuenti, iam ſatis luculenter ordinem ſequentium, vbi denominator pluribus conſtabit terminis, declarat.

Coroll. 2.

16. Neglectis terminis in numeratore poſt euaneſcentes ſequentibus, habebimus approximationes ſequentes:

$$\text{ſi } \omega = 0 \text{ erit } (1+x)^n = \frac{1}{1 - nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} xx}$$

quae quidem in hoc genere plurimum a veritate diſcrepat.

Coroll. 3.

17. Ponamus $\omega = 1$, eritque proxime:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+2}{3} x}{1 - \frac{2(n-1)}{3} x + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3} xx}$$

ſin

ſin autem $\omega = 2$ erit adhuc propius:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+2)}{4}x + \frac{(n+2)(n+1)}{4.\ 3}xx}{1 - \frac{2(n-2)}{4}x + \frac{(n-2)(n-1)}{4.\ 3}xx}$$

et ſi $\omega = 3$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+2)}{5}x + \frac{3(n+2)(n+1)}{5.\ 4}xx + \frac{(n+2)(n+1)n}{5.\ 4.\ 3}x^3}{1 - \frac{2(n-3)}{5}x + \frac{(n-3)(n-2)}{5.\ 4}xx}$$

ſi $\omega = 4$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{4(n+2)}{6}x + \frac{6(n+2)(n+1)}{6.\ 5}xx + \frac{4(n+2)(n+1)n}{6.\ 5.\ 4}x^3 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{6.\ 5.\ 4.\ 3}x^4}{1 - \frac{2(n-4)}{6}x + \frac{(n-4)(n-3)}{6.\ 5}xx}$$

ſi $\omega = 5$ erit $(1+x)^n =$

$$\frac{1 + \frac{5(n+2)}{7}x + \frac{10(n+2)(n+1)}{7.\ 6}x^2 + \frac{10(n+2)(n+1)n}{7.\ 6.\ 5}x^3 + \frac{5(n+2)(n+1)n(n-1)}{7.\ 6.\ 5.\ 4}x^4 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3}x^5}{1 - \frac{2(n-5)}{7}x + \frac{(n-5)(n-4)}{7.\ 6}xx}$$

Quae expreſſiones ex coëfficientibus poteſtatum binomii expedite vlterius continuantur. Quo longius vero continuantur, eo minus a veritate aberrabunt.

Coroll. 4.

18. Generaliter autem hanc formulae $(1+x)^n$ transformationem commodius exhibere non licet, quam vt dicamus eſſe

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + etc.}{1 - \alpha x + \beta xx}$$

exiſtentibus coefficientium valoribus:

$$A = \frac{(\omega+1)\omega}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{n+2}{1} \qquad \alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} \qquad \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

$$C = \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

Coroll. 5.

19. Hic iterum patet, cum quantitas ω ab arbitrio noſtro pendeat, ſi capiatur $\omega = n$, prodire $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.}$$

Sin autem ſit $\omega = \infty$ erit $\alpha = -2$ et $\beta = 1$; vnde

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+2}{1}x + \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.}}{1 + 2x + xx}$$

ſeu $(1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+2}}{(1+x)^2}$, cuius ratio eſt manifeſta.

Problema III.

20. *Binomii poteſtatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi ſeriem maxime conuergentem:*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Cx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3}$$

denominatore exiſtente quadrinomio.

Solutio

Solutio.

Sequens ergo aequatio conſtrui debet:

$$\begin{array}{l} 0 = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4 + \text{etc.} \\ \qquad - \alpha - \frac{n}{1}\alpha - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha - \text{etc.} \\ \qquad\qquad + \beta + \frac{n}{1}\beta + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\beta + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad - \gamma - \frac{n}{1}\gamma - \text{etc.} \\ -1 - A - B - C - D - \text{etc.} \end{array}$$

Hic iam effici poteſt, vt in ſerie coefficientium A, B, C, D etc. terni ſucceſſiui euaneſcant: Sumantur ergo terni quicunque ſucceſſiue euaneſcentes, et obtinebuntur tres huiusmodi aequationes:

$$\gamma - \frac{(n-\omega+2)}{\omega-1}\beta + \frac{(n-\omega+2)(n-\omega+1)}{(\omega-1)(\omega+0)}\alpha - \frac{(n-\omega+2)(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega-1)(\omega-0)(\omega+1)} = 0$$

$$\gamma - \frac{(n-\omega+1)}{\omega}\beta + \frac{(n-\omega+1)(n-\omega)}{\omega(\omega+1)}\alpha - \frac{(n-\omega+1)(n-\omega)(n-\omega-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)} = 0$$

$$\gamma - \frac{(n-\omega)}{\omega+1}\beta + \frac{(n-\omega)(n-\omega-1)}{(\omega+1)(\omega+2)}\alpha - \frac{(n-\omega)(n-\omega-1)(n-\omega-2)}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} = 0.$$

Hinc differentiis ſumendis habebitur:

$$\frac{(n+1)}{(\omega-1)\omega}\beta - \frac{2(n+1)(n-\omega+1)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)}\alpha + \frac{3(n+1)(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)(\omega+2)} = 0$$

$$\frac{(n+1)}{\omega(\omega+1)}\beta - \frac{2(n+1)(n-\omega)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)}\alpha + \frac{3(n+1)(n-\omega)(n-\omega-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} = 0$$

ſiue:

$$\beta - \frac{2(n-\omega+1)}{\omega+1}\alpha + \frac{3(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)} = 0$$

$$\beta - \frac{2(n-\omega)}{\omega+2}\alpha + \frac{3(n-\omega)(n-\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+3)} = 0$$

quarum aequationum differentia dat:

$$\frac{2(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\alpha - \frac{2.\ 3(n+2)(n-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} = 0$$

T 3 hinc-

hincque fit:

$$\alpha = \frac{3(n-\omega)}{\omega+3};\quad \beta = \frac{3(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+3)(\omega+2)};\quad \text{et}\quad \gamma = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}.$$

His autem valoribus pro denominatore inuentis pro numeratore reperientur:

$$A = \frac{\omega}{\omega+3}\cdot\frac{n+3}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+3)(\omega+2)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)}{1\cdot 2}$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$D = \frac{(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$E = \frac{(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$F = \frac{(\omega-3)(\omega-4)(\omega-5)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

etc.

ac denominator formabitur ex his valoribus:

$$\alpha = \frac{3(n-\omega)}{\omega+3}$$

$$\beta = \frac{3(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+3)(\omega+2)}$$

$$\gamma = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}$$

quibus ſubſtitutis erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3}$$

Coroll. 1.

21. Manifeſtum hic eſt, quicunque numerus integer poſitiuus pro ω aſſumatur, in numeratore ſemper terminos ternos ſucceſſiuos in nihilum abire. Ita ſi ſit $\omega = 0$ erit:

$(1+x)^n$

$$(1+x)^n=\frac{1+*+*+*-\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4-\frac{4(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5-\text{etc.}}{1-\frac{n}{1}x+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}$$

vnde reiectis in numeratore terminis, qui poſt euaneſcentes ſequuntur, erit proxime:

$$(1+x)^n=\frac{1}{1-\frac{n}{1}x+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}.$$

Coroll. 2.

22. Simili modo ponendo $\omega=1$ erit proxime:

$$(1+x)^n=\frac{1+\frac{n+3}{4}x}{1-\frac{3(n-1)}{4}x+\frac{3(n-1)n}{4\cdot 3}x^2-\frac{(n-1)n(n+1)}{4\cdot 3\cdot 2}x^3}$$

at ſi ſumatur $\omega=2$ erit

$$(1+x)^n=\frac{1+\frac{2(n+3)}{5}x+\frac{(n+3)(n+2)}{5\cdot 4}x^2}{1-\frac{3(n-2)}{5}x+\frac{3(n-2)(n-1)}{5\cdot 4}x^2-\frac{(n-2)(n-1)n}{5\cdot 4\cdot 3}x^3}$$

poſito vero $\omega=3$ erit

$$(1+x)^n=\frac{1+\frac{3(n+3)}{6}x+\frac{3(n+3)(n+2)}{6\cdot 5}x^2+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}{1-\frac{3(n-3)}{6}x+\frac{3(n-3)(n-2)}{6\cdot 5}x^2-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}.$$

Coroll. 3.

23. Poſtrema haec formula ideo eſt notatu digna, quod numerator et denominator pari terminorum numero conſtat, et quod alter in alterum abit, ſi exponens n ſumatur negatiue. Haec ergo expreſſio conferenda eſt cum ſimilibus ex problematibus ſuperioribus ortis:

$$(1+x)^n=\frac{1+\frac{(n+1)}{2}x}{1-\frac{(n-1)}{2}x}\;..\;(\S.\ 7.)$$

(1+x

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+2)}{4}x + \frac{(n+2)(n+1)}{4 \cdot 3}x^2}{1 - \frac{2(n-2)}{4}x + \frac{(n-2)(n-1)}{4 \cdot 3}x^2} \ldots (\S.\ 17)$$

vnde ſimul ordo huiusmodi formularum facile colligitur.

Problema IV.

24. *Binomii poteſtatem $(1+x)^n$ transformare in huiusmodi progreſſionem maxime conuergentem:*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 - etc.}$$

denominatore exiſtente multinomio quocunque.

Solutio.

Si ſolutiones praecedentium problematum conſulamus, leui attentione adhibita inde ſequentem ſolutionem generalem colligimus:

$$A = \frac{\omega}{\omega + \Phi} \cdot \frac{n + \Phi}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega - 1)}{(\omega + \Phi)(\omega + \Phi - 1)} \cdot \frac{(n + \Phi)(n + \Phi - 1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{(\omega + \Phi)(\omega + \Phi - 1)(\omega + \Phi - 2)} \cdot \frac{(n + \Phi)(n + \Phi - 1)(n + \Phi - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)(\omega - 3)}{(\omega + \Phi)(\omega + \Phi - 1)(\omega + \Phi - 2)(\omega + \Phi - 3)} \cdot \frac{(n + \Phi)(n + \Phi - 1)(n + \Phi - 2)(n + \Phi - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

deinde vero pro denominatore:

$$\alpha = \frac{\Phi(n - \omega)}{1(\omega + \Phi)}$$

$$\beta = \frac{\Phi(\Phi - 1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n - \omega)(n - \omega + 1)}{(\omega + \Phi)(\omega + \Phi - 1)}$$

$$\gamma = \frac{\Phi(\Phi - 1)(\Phi - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n - \omega)(n - \omega + 1)(n - \omega + 2)}{(\omega + \Phi)(\omega + \Phi - 1)(\omega + \Phi - 2)}$$

$$\delta = \frac{\Phi(\Phi - 1)(\Phi - 2)(\Phi - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(n - \omega)(n - \omega + 1)(n - \omega + 2)(n - \omega + 3)}{(\omega + \Phi)(\omega + \Phi - 1)(\omega + \Phi - 2)(\omega + \Phi - 3)}$$

etc.

qui

qui valores ad praecedentium formam propius reducuntur vt ſit:

$$\alpha = \frac{\Phi}{\Phi+\omega} \cdot \frac{n-\omega}{1}$$

$$\beta = \frac{\Phi(\Phi-1)}{(\Phi+\omega)(\Phi-\omega+1)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{1 \cdot 2}$$

$$\gamma = \frac{\Phi(\Phi-1)(\Phi-2)}{(\Phi+\omega)(\Phi+\omega-1)(\Phi+\omega-2)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\delta = \frac{\Phi(\Phi-1)(\Phi-2)(\Phi-3)}{(\Phi+\omega)(\Phi+\omega-1)(\Phi+\omega-2)(\Phi+\omega-3)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

Etſi autem ex hac lege etiam denominator in infinitum continuari poſſit; tamen ex principio, vnde eum deduximus, patet eum non vltra terminos euaneſcentes produci debere, ſiquidem pro Φ ſumatur numerus poſitiuus integer.

Coroll. 1.

25. Denominator ergo ex numeratore formari poteſt, ſi numeri Φ et ω inter ſe permutentur, et loco n ſcribatur $-n$. At poſito $-n$ pro $+n$ formula $(1+x)^n$ abit in $(1+x)^{-n}$, vnde ſi fuerit $(1+x)^n = \frac{P}{Q}$ erit $(1+x)^{-n} = \frac{Q}{P}$, ex quo ratio huius conuerſionis eo clarius perſpicitur.

Coroll. 2.

26. Cum igitur numerator et denominator inter ſe permutari poſſint, etiam numeratorem apud terminos euaneſcentes abrumpere licet; tum vero denominatorem in infinitum continuari oportet, vt fractio obtineatur poteſtati $(1+x)^n$ aequalis.

Coroll. 3.

27. Si ſumatur $\Phi = \omega$, numerator et denominator multo magis inter ſe aſſimilantur, ac tantum ratione ſigni exponentis n a ſe inuicem diſcrepabunt. Erit autem tunc:

$$A = \frac{\omega}{2\omega} \cdot \frac{n+\omega}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{2\omega(2\omega-1)} \cdot \frac{(n+\omega)(n+\omega-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)} \cdot \frac{(n+\omega)(n+\omega-1)(n+\omega-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)(2\omega-3)} \cdot \frac{(n+\omega)(n+\omega-1)(n+\omega-2)(n+\omega-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

$$\alpha = \frac{\omega}{2\omega} \cdot \frac{n-\omega}{1}$$

$$\beta = \frac{\omega(\omega-1)}{2\omega(2\omega-1)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{1 \cdot 2}$$

$$\gamma = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\delta = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)(2\omega-3)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

Coroll. 4.

28. Hinc formulae ſuperiores (23) ad approximandum perquam idoneae deriuantur:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{1} x}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{1} x}$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{n+2}{1} x + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} x^2}{1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{n-2}{1} x + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2} x^2}$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3}{6} \cdot \frac{(n+3)}{1} x + \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} \cdot \frac{(n+3)(n+2)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3}{1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{(n-3)}{1} x + \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3}$$

quae quomodo vlterius continuari debeant ſponte patet.

Scholion I.

29. Hae formulae eo magis ſunt notatu dignae, quo minus earum ratio patet; nam etſi tam in numeratore quam denominatore lex progreſſionis eſt perſpicua, ſecundum quam vterque in infinitum continuatur, tamen iam animaduertimus, alterutrum tantum in infinitum produci oportere, altero ex finito terminorum numero conſtante, ibi ſcilicet quouis caſu terminari debet, vbi termini aliquot euaneſcere incipiunt; etiamſi deinceps iterum termini finitae magnitudinis occurrant. Haec autem ita ſunt interpretanda, ſi in valoribus litterarum A, B, C, etc. α, β, γ etc. factor numeratoris euaneſcens a factore denominatoris euaneſcente tolli cenſeatur, ita vt fractio $\frac{\omega - m}{2\omega - 2m}$ caſu $\omega = m$ vnitati aequalis ſtatuatur. Sin autem, vti calculi ratio exigit, haec fractio tantum ſemiſſi vnitatis aequalis capiatur, tum continui ratio non amplius infringitur; ac ſi hac lege retenta tam numerator quam denominator etiam vltra terminos euaneſcentes in infinitum continuatur, fractio reſultans formulae $(1+x)^n$ perfecte erit aequalis. Quod idem in genere eſt tenendum, dummodo inter numeros Φ et ω certa ratio ſtatuatur, ita vt ſi $\Phi = \lambda\omega$ fractionis $\frac{\omega - m}{(\lambda+1)\omega - (\lambda+1)m}$

 etiam

etiam caſu $\omega = m$ ſumatur $= \frac{1}{\lambda + 1}$ ex quo haec cautio neutiquam principio continuitatis aduerſari eſt putanda.

Scholion 2.

30. Quo haec clarius perſpiciantur, conſideremus caſum $\omega = 0$, et ob $\frac{\omega}{2\omega} = \frac{1}{2}$, erit numerator noſtrae fractionis:

$$1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n}{1}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \text{etc.}$$

et denominator:

$$1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n}{1}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \text{etc.}$$

manifeſtum autem eſt numeratoris valorem eſſe $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x)^n$ denominatoris vero $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x)^{-n}$, illumque ergo per hunc diuiſum praebere $(1+x)^n$. Simili modo ſi ponatur $\omega = 1$, erit

pro numeratore	pro denominatore
$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{1}$	$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{1}$
$B = 0$	$\beta = 0$
$C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\gamma = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$
$D = -\frac{2}{4}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$\delta = -\frac{2}{4}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
$E = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$\varepsilon = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$
etc.	etc.

atque hinc colligitur fore

numeratorem $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1)x)(1+x)^n$

denominatorem $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1)x + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)x)(1+x)^{-n}$

quorum ille per hunc diuiſus manifeſto praebet formulam propoſitam $(1+x)^n$. Sin autem in denominatore termini litteris γ, δ, ε etc. affecti omitteren-

terentur, tum in numeratore loco fractionis $\frac{\omega-1}{2\omega-2}=\frac{0}{0}$ vnitas ſtatui deberet ob legem ſupra ſtabilitam, vnde valores C, D, E etc. duplo prodirent maiores; foretque numeratoris valor $=(1-\frac{1}{2}(n-1)x)(1+x)^n$, denominator vero $=1-\frac{1}{2}(n-1)x$ qua fractione iterum veritas obtinetur. Videamus ergo, quomodo per huiusmodi formulas tam quantitates radicales, quam exponentiales et logarithmi commode vero proxime exhiberi queant; quando quidem conſtat tam logarithmos quam exponentiales quantitates ad formam $(1+x)^n$ reuocari poſſe.

Problema V.

31. Radicem quadratam ex quouis numero nonquadrato propoſito per formulas ante exhibitas proxime aſſignare.

Solutio.

Sit numerus propoſitus non quadratus $=aa+b$, et ponatur $\frac{b}{aa}=x$ erit $aa+b=aa(1+x)$ ideoque $\sqrt{(aa+b)}=a(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Habebimus ergo $n=\frac{1}{2}$, et ex praecedente problemate formulae continuo magis ad $\sqrt{(aa+b)}$ appropinquantes erunt:

$$\sqrt{(aa+b)}=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{a^2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^2}}a$$

$$\sqrt{(aa+b)}=\frac{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b}{a^2}+\frac{2\cdot1}{4\cdot3}\cdot\frac{5\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{b^2}{a^4}}{1+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{a^2}+\frac{2\cdot1}{4\cdot3}\cdot\frac{3\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{b^2}{a^4}}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{b}{a^2} + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6}}{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b}{a^2} + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6}}\, a$$

etc.

Euolutis autem his factoribus et poſito breuitatis ergo $\frac{b}{aa} = x$ conſequemur formas ſequentes:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{3}{4}x}{1 + \frac{1}{4}x}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{16}xx}{1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}xx}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}xx + \frac{7}{64}x^3}{1 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}xx + \frac{1}{64}x^3}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{9}{4}x + \frac{27}{16}xx + \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x^4}{1 + \frac{7}{4}x + \frac{15}{16}xx + \frac{5}{32}x^3 + \frac{1}{256}x^4}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{11}{4}x + \frac{11}{4}xx + \frac{77}{64}x^3 + \frac{55}{256}x^4 + \frac{11}{1024}x^5}{1 + \frac{9}{4}x + \frac{7}{4}xx + \frac{35}{64}x^3 + \frac{15}{256}x^4 + \frac{1}{1024}x^5}\, a$$

etc.

Sin autem ponamus $\frac{x}{4} = y$ ſeu $y = \frac{b}{4aa}$ erit

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 3y}{1 + y}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 5y + 5yy}{1 + 3y + yy}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 7y + 14yy + 7y^3}{1 + 5y + 6yy + y^3}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 9y + 27yy + 30y^3 + 9y^4}{1 + 7y + 15yy + 10y^3 + y^4}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 11y + 44yy + 77y^3 + 55y^4 + 11y^5}{1 + 9y + 28yy + 35y^3 + 15y^4 + y^5}\, a$$

etc.

Coroll.

Coroll. 1.

32. Si formularum harum numeratores et denominatores attentius contemplemur, non difficulter obſeruabimus, vtrosque conſtituere progreſſionem recurrentem ſecundi ordinis, et quemlibet terminum ita dependere a binis praecedentibus, vt ſi terni termini ordine ſint P, Q, R, ſemper ſit $R = (1 + 2y)Q - yyP$ ſeu ſcala relationis habeatur $1 + 2y, -yy$.

Coroll. 2.

33. Si pro y ſtatuamus valorem $\frac{b}{4aa}$, et numeratorem denominatoremque a fractionibus liberemus, habebimus ſequentes formulas:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{4a^2 + 3b}{4a^2 + b}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{16a^4 + 20a^2b + 5bb}{16a^4 + 12a^2b + bb}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{64a^6 + 112a^4b + 56a^2b^2 + 7b^3}{64a^6 + 80a^4b + 24a^2b^2 + b^3}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{256a^8 + 576a^6b + 432a^4b^2 + 120a^2b^3 + 9b^4}{256a^8 + 448a^6b + 240a^4b^2 + 40a^2b^3 + b^4}$$

etc.

Coroll. 3.

34. In his formulis iterum tam numeratores quam denominatores ſeriem conſtituunt recurrentem, cuius ſcala relationis eſt $2(2aa + b), -bb$, ita vt, ſi P, Q, R denotent tres terminos ſe inuicem excipientes, futurum ſit

$$R = 2(2aa + b)Q - bbP.$$

At

At ſeriei numeratorum duo termini initiales ſunt 1, et $4aa + 3b$ denominatorum vero 1 et $4aa + b$, vnde reliqui facile reperiuntur.

Coroll. 4.

35. Si fractio $\frac{b}{4aa}$ ad minores terminos reduci poteſt, his potius loco ipſorum b et $4aa$ vti conueniet. Ponatur ergo in minimis terminis: $\frac{b}{4aa} = \frac{y}{z}$, atque habebimus:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z+3y}{z+y}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{zz+5yz+5yy}{zz+3yz+yy}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^3+7yz^2+14y^2z+7y^3}{z^3+5yzz+6y^2z+y^3}a$$

hincque erit $R = (z+2y)Q - yyP$.

Coroll. 5.

36. Hae fractiones adhuc commodius exprimi poſſunt hoc modo:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z+2y+y\cdot 1}{z+2y-y\cdot 1}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^2+4yz+3yy+y(z+2y)}{z^2+4yz+3yy-y(z+2y)}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3+y(z^2+4yz+3y^2)}{z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3-y(z^2+4yz+3y^2)}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^4+8yz^3+21y^2z^2+20y^3z+5y^4+y(z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3)}{z^4+8yz^3+21y^2z^2+20y^3z+5y^4-y(z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3)}a$$

etc.

Coroll. 6.

37. Pro his fractionibus formandis ſufficit vnicam hanc ſeriem conſtituiſſe:

$1.\ z+2y;\ z^2+4yz+3y^2;\ z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3 \ldots P; Q; R$

quae

quae pariter eſt recurrens ad legem $R = (z + 2y)Q - yyP$. Formata autem hac ſerie erit proxime $\sqrt{(aa + b)} = \frac{Q + yP}{Q - yP} a$, quae ſcilicet fractio ex binis terminis ſe immediate ſequentibus illius ſeriei facillime formatur.

Exemplum 1.

38. *Radicem quadratam ex 2 proxime exhibere.*

Cum ſit $aa + b = 2$ erit $a = 1$ et $b = 1$, vnde $\frac{b}{4aa} = \frac{1}{4} = \frac{y}{z}$; ergo $y = 1$ et $z = 4$, atque $z + 2y = 6$. Quare ex ſcala relationis $R = 6Q - P$ formetur haec ſeries recurrens:

$1;\ 6;\ 35;\ 204;\ 1189;\ 6930;\ 40391 \ldots\ P, Q, R$

et fractiones $\frac{Q + P}{Q - P}$ ad $\sqrt{2}$ continuo magis appropinquantes ſunt:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5};\ \frac{41}{29};\ \frac{239}{169};\ \frac{1393}{985};\ \frac{8119}{5741};\ \frac{47321}{33461}.$$

Exemplum 2.

39. *Radicem quadratam* ex 3 *proxime exhibere.*

Cum ſit $aa + b = 3$, ſtatuatur $a = 1$, erit $b = 2$; et $\frac{b}{4aa} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ vnde fit $y = 1$ et $z = 2$; ergo $z + 2y = 4$. Quare ex ſcala relationis $R = 4Q - P$ formetur haec ſeries recurrens:

$1;\ 4;\ 15;\ 56;\ 209;\ 780;\ 2911;\ 10864 \ldots\ P, Q, R$

eritque proxime $\sqrt{3} = \frac{Q + P}{Q - P}$; ſiue

$$\sqrt{3} = \frac{5}{3};\ \frac{19}{11};\ \frac{71}{41};\ \frac{265}{153};\ \frac{989}{571};\ \frac{3691}{2131};\ \frac{13775}{7953} \text{ etc.}$$

Aliter. Vel ſtatuamus $a = 2$; vt ſit $b = -1$; erit $\frac{b}{4aa} = -\frac{1}{16} = \frac{y}{z}$ vnde $y = -1$; $z = 16$ et $z + 2y = 14$.

 Quare

Quare ex ſcala relationis; $R = 14Q - P$ formetur ſeries recurrens:

$$1;\ 14;\ 195;\ 2716;\ 37829;\ 526890 \ldots P,\ Q,\ R$$

eritque proxime $\sqrt{3} = \frac{Q-P}{Q+P}\,2$ ſiue

$$\sqrt{3} = \tfrac{13}{15}\cdot 2;\ \tfrac{181}{209}\cdot 2;\ \tfrac{2521}{2911}\cdot 2;\ \tfrac{35113}{40545}\cdot 2;\ \text{etc. vel}$$

$$\sqrt{3} = \tfrac{26}{15};\ \tfrac{362}{209};\ \tfrac{5042}{2911};\ \tfrac{70226}{40545};\ \text{etc.}$$

Problema VI.

40. *Radicem cubicam ex quouis numero non-cubo propoſito per formulas ante exhibitas proxime aſſignare.*

Solutio.

Sit numerus propoſitus non cubus $= a^3 + b$, et ponatur $\frac{b}{a^3} = x$ erit $a^3 + b = a^3(1 + x)$ ideoque $\sqrt[3]{(a^3 + b)} = a(1 + x)^{\frac{1}{3}}$. Habemus ergo $n = \frac{1}{3}$; vnde ex §. 28. nanciſcemur has approximationes:

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\,\frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}x}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\,\frac{1 + \frac{2}{4}\cdot\frac{7}{3}x + \frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{7\cdot 4}{3\cdot 6}xx}{1 + \frac{2}{4}\cdot\frac{5}{3}x + \frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 2}{3\cdot 6}xx}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\,\frac{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{10}{3}x + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{10\cdot 7}{3\cdot 6}xx + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{10\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9}x^3}{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{8}{3}x + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 5}{3\cdot 6}xx + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{8\cdot 5\cdot 2}{3\cdot 6\cdot 9}x^3}$$

etc.

Euolu-

Euolutis autem his coefficientibus habebimus:

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\frac{1+\frac{2}{3}x}{1+\frac{1}{3}x}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\frac{1+\frac{7}{6}x+\frac{7}{27}xx}{1+\frac{5}{6}x+\frac{5}{54}xx}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\frac{1+\frac{5}{3}x+\frac{7}{9}xx+\frac{7}{81}x^3}{1+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}xx+\frac{2}{81}x^3}$$

etc.

Coroll. 1.

41. Si loco x valorem $\frac{b}{a^3}$ ſubſtituamus, et fractiones implicatas tollamus, obtinebimus formulas ſequentes:

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{3a^3+2b}{3a^3+b}a$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{54a^6+63a^3b+14bb}{54a^6+45a^3b+5bb}a$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{81a^9+135a^6b+63a^3b^2+7b^3}{81a^9+108a^6b+36a^3b^2+2b^3}a$$

etc.

vbi autem commodam progreſſionis legem definire non licet.

Coroll. 2.

42. Sufficit autem, forma vti priori; inde enim cubus ad numerum propoſitum propius accedens colligitur, cuius radix pro a poſita nouum

 dabit

dabit valorem pro b et x. Sic ſi radix cubica ex 2 quaeratur, erit ſtatim $a = 1$, et proxime $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}$. Sit iam $a = \frac{5}{4}$; et fit $b = 2 - a^3 = \frac{3}{64}$; et $x = \frac{3}{125}$; vnde erit denuo per formam priorem:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{125 + 2}{125 + 1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{127}{126} \cdot \frac{635}{504}$$

cuius fractionis cubus eſt $2 - \frac{1}{2 \cdot 63^3}$, qui ergo a veritate tantum parte $\frac{1}{500094}$ deficit.

Coroll. 3.

43. Simili modo formulae pro extractione radicum altiorum poteſtatum formari poſſunt. Ita ſi quaeratur $\sqrt[m]{(a^m + b)}$, ponatur $x = \frac{b}{a^m}$ et $n = \frac{1}{m}$, hincque habebitur:

$$\sqrt[m]{(a^m + b)} = \frac{2ma^m + (m+1)b}{2ma^m + (m-1)b} a$$

quae etiam ſufficere poteſt ad radices quantumuis exacte definiendas.

Problema VII.

44. *Per formulas ſupra inuentas proxime exprimere logarithmum cuiusque numeri propoſiti.*

Solutio.

Sit $1 + x$ numerus propoſitus, et conſtat eius logarithmum hyperbolicum eſſe $l(1+x) = \frac{(1+x)^n - 1}{n}$

exiſten-

exiſtente $n = 0$. Quodſi iam in formulis ſupra inventis n ſpectemus vt numerum infinite paruum; habebimus:

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{1}{2}(1+n)x}{1+\frac{1}{2}(1-n)x}$$

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{2}{4}(2+n)x+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}(1+\frac{3}{2}n)xx}{1+\frac{2}{4}(2-n)x+\frac{2\cdot 1}{4\cdot 3}(1-\frac{3}{2}n)xx}$$

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{3}{6}(3+n)x+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}(3+\frac{5}{2}n)x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}(1+\frac{11}{6}n)x^3}{1+\frac{3}{6}(3-n)x+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}(3-\frac{5}{2}n)x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}(1-\frac{11}{6}n)x^3}$$

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{4}{8}(4+n)x+\frac{4\cdot 3}{8\cdot 7}(6+\frac{7}{2}n)x^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6}(4+\frac{13}{3}n)x^3+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}(1+\frac{25}{12}n)x^4}{1+\frac{4}{8}(4-n)x+\frac{4\cdot 3}{8\cdot 7}(6-\frac{7}{2}n)x^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6}(4-\frac{13}{3}n)x^3+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}(1-\frac{25}{12}n)x}$$

etc.

Quodſi iam hic ponatur $n = 0$, habebimus pro $l(1+x)$ ſequentes approximationes:

$$l(1+x) = \frac{x}{1+\frac{1}{2}x}$$

$$l(1+x) = \frac{x+\frac{1}{2}xx}{1+x+\frac{1}{6}xx}$$

$$l(1+x) = \frac{x+xx+\frac{11}{60}x^3}{1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{20}x^3}$$

$$l(1+x) = \frac{x+\frac{3}{2}xx+\frac{13}{21}x^3+\frac{5}{84}x^4}{1+2x+\frac{9}{7}xx+\frac{2}{7}x^3+\frac{1}{70}x^4}$$

etc.

Vel ſi ponatur $x = \frac{m}{n}$, quoniam fractionum loga-

 rithmos

rithmos potiſſimum indagare conuenit, et fractiones partiales tollantur, fiet

$$l(1+\tfrac{m}{n}) = \frac{2m}{2n+m}$$

$$l(1+\tfrac{m}{n}) = \frac{6mn+3mm}{6nn+6mn+mm}$$

$$l(1+\tfrac{m}{n}) = \frac{60mn^2+60m^2n+11m^3}{60n^3+90mn^2+36m^2n+3m^3}$$

$$l(1+\tfrac{m}{n}) = \frac{420mn^3+630m^2n^2+260m^3n+25m^4}{420n^4+840mn^3+540m^2n^2+120m^3n+6m^4}$$

etc.

haeque fractiones tam prope accedunt ad verum valorem $l(1+\frac{m}{n})$, vt ſeriei vulgaris

$$l(1+\tfrac{m}{n}) = \frac{m}{n} - \frac{m^2}{2n^2} + \frac{m^3}{3n^3} - \frac{m^4}{4n^4} \text{ etc.}$$

ingens terminorum numerus capi deberet ad parem approximationem obtinendam.

Coroll. 1.

45. Ita ſi logarithmum hyperbolicum binarii deſideremus, ob $m = 1$ et $n = 1$, ſequentes prodibunt approximationes:

$$l\,2 = \tfrac{2}{3};\ \tfrac{9}{13};\ \tfrac{131}{189};\ \tfrac{1335}{1926};\ \left[\tfrac{445}{642}\right]$$

quibus fractionibus in decimales conuerſis, cum ſit

$$l\,2 = 0,693147180559945 3$$

erit proxime

$l\,2 = 0,666666$

$l\,2 = 0,692307$

$l\,2 = 0,693121$

$l\,2 = 0,69314635$

vere $l\,2 = 0,69314718$

ſicque

ſicque quarta fractio a veritate tantum parte $\frac{13}{100000000}$ deficit.

Coroll. 2.

46. Numerorum autem binario minorum logarithmi multo adhuc exactius reperiuntur. Ita cum ſit $l\frac{3}{2} = 0,405465108108164$ ponamus $m = 1$ et $n = 2$, noſtraeque formulae dabunt proxime

$$l\frac{3}{2} = \frac{2}{5} = 0,40000000$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{15}{37} = 0,405405405$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{371}{915} = 0,405464481$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{6425}{15846} = 0,4054651016$$

error ſcilicet huius vltimae fractionis eſt $\frac{65}{100000000000}$ ideoque plus quam centies minor quam caſu praecedente.

Coroll. 3.

47. Quando ergo fractio $\frac{m}{n}$ adeo ſemiſſe eſt minor, tum erit tam exacte

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{420\,mn^3 + 630\,m^2n^2 + 260\,m^3n + 25\,m^4}{420\,n^4 + 140\,mn^3 + 540\,m^2n - 120\,m^3n + 6\,m^4}$$

vt error in fractione decimali poſt decimam demum notam percipiatur. Aliis autem methodis vix tam facile ad veritatem appropinquare licet.

Coroll. 4.

48. Si fractio $\frac{m}{n}$ fuerit valde parua, tum ſufficiet vti prima vel ſecunda formula, ita ſi $\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$; prima formula dat $l\frac{9}{8} = \frac{2}{17} = 0,11764$, et ſecunda:

$l\frac{9}{8} = \frac{51}{433} = 0,11778291$ at reuera eſt

$l\frac{9}{8} = 0,11778303$ vnde

vnde ſecunda formula circiter $\frac{1}{100000000}$ a veritate deficit.

Problema VIII.

49. *Quantitatem exponentialem* e^x *per formulas inuentas proxime exprimere, exiſtente* e *numero, cuius logarithmus hyperbolicus aequatur vnitati.*

Solutio.

Notum eſt eſſe $e^x = (1 + \frac{x}{n})^n$, ſi pro n ſumatur numerus infinitus. Scribamus ergo in formulis §. 28, $\frac{x}{n}$ loco x et ſimul ponamus $n = \infty$; atque obtinebimus ſequentes approximationes

$$e^x = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4 \cdot 3}xx}{1 - \frac{2}{4}x + \frac{1}{4 \cdot 3}xx}$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{3}{6}x + \frac{3}{6 \cdot 5}xx + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}x^3}{1 - \frac{3}{6}x + \frac{3}{6 \cdot 5}xx - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}x^3}$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{4}{8}x + \frac{6}{8 \cdot 7}xx + \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6}x^3 + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}x^4}{1 - \frac{4}{8}x + \frac{6}{8 \cdot 7}xx + \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6}x^3 + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}x^4}$$

etc.

vnde lex, qua ſequentes huiusmodi formulae confici debent, eſt manifeſta. Si fractiones partiales tollere velimus, habebimus:

$e^x =$

$$e^x = \frac{2+x}{2-x}$$

$$e^x = \frac{12+6x+xx}{12-6x+xx}$$

$$e^x = \frac{120+60x+12xx+x^3}{120-60x+12xx-x^3}$$

$$e^x = \frac{1680+840x+180xx+20x^3+x^4}{1680-840x+180xx-20x^3+x^4}$$

Coroll. 1.

50. Hinc ergo erit ipſe numerus e in fractionibus proximis:

$$e = \tfrac{3}{1};\ \tfrac{19}{7};\ \tfrac{193}{71};\ \tfrac{2721}{1001};\ \text{etc.}$$

quarum fractionum hanc legem obſeruari conuenit, vt ſi ponatur:

$$e = \tfrac{A}{\mathfrak{A}};\ \tfrac{B}{\mathfrak{B}};\ \tfrac{C}{\mathfrak{C}};\ \tfrac{D}{\mathfrak{D}};\ \tfrac{E}{\mathfrak{E}}\ \text{etc. ſit}$$

$A=3$; $B=6A+1$; $C=10B+A$; $D=14C+B$; $E=18D+C$; etc.
$\mathfrak{A}=1$; $\mathfrak{B}=6\mathfrak{A}+1$; $\mathfrak{C}=10\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$; $\mathfrak{D}=14\mathfrak{C}+\mathfrak{B}$; $\mathfrak{E}=18\mathfrak{D}+\mathfrak{C}$; etc.

vbi multiplicatores 6, 10, 14, 18, etc. ſunt numeri impariter pares.

Coroll. 2.

51. Cum igitur ſit $e = 2,71828182845904523536$ videamus quam prope fractiones inuentae accedant ad veritatem:

$$e = \tfrac{3}{1} = 3,0000$$
$$e = \tfrac{19}{7} = 2,714285714$$
$$e = \tfrac{193}{71} = 2,718309859$$
$$e = \tfrac{2721}{1001} = 2,718281718$$

etc.

vbi primi in partibus decimis, ſecunda in milleſimis, tertia in centies milleſimis, et quarta in centies centenis milleſimis aberrat.

Coroll. 3.

52. Talis lex progreſſionis etiam in formulis generalibus pro e^x deprehenditur: Si enim noſtras fractiones ponamus:

$$e^x = \frac{A}{\mathfrak{A}};\ \frac{B}{\mathfrak{B}};\ \frac{C}{\mathfrak{C}};\ \frac{D}{\mathfrak{D}};\ \frac{E}{\mathfrak{E}}$$ etc. ſumtis $A=1$ et $\mathfrak{A}=1$, erit:

$$B=2+x;\ C=6B+Axx;\ D=10C+Bxx;\ E=14D+Cxx;\ \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}=2-x;\ \mathfrak{C}=6\mathfrak{B}+\mathfrak{A}xx;\ \mathfrak{D}=10\mathfrak{C}+\mathfrak{B}xx;\ \mathfrak{E}=14\mathfrak{D}+\mathfrak{C}xx;\ \text{etc.}$$

vnde ſeries tam numeratorum, quam denominatorum facile continuatur.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS
DE
INVENIENDO TRIANGVLO
IN QVO RECTAE EX SINGVLIS ANGVLIS LATERA OPPOSITA BISECANTES SINT RATIONALES.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Vocatis ternis lateribus $2a$, $2b$, $2c$ et rectis haec latera biſecantibus f, g, h; quaeſtio reducitur ad reſolutionem trium ſequentium formularum

$$2bb + 2cc - aa = ff$$
$$2cc + 2aa - bb = gg$$
$$2aa + 2bb - cc = hh.$$

2. Hinc differentiis ſumendis ſequitur fore:

$3(bb-aa)=ff-gg$; $3(cc-bb)=gg-hh$; $3(cc-aa)=ff-hh$

ſeu $ff+3aa=gg+3bb=hh+3cc$,

Cum autem ſit $ff=2bb+2cc-aa$, habebimus,

$$ff+3aa=gg+3bb=hh+3a=2(aa+bb+cc).$$

3. Summa porro noſtrarum trium formularum praebet:

$$2(ff+gg+hh)=3ff+9aa=3gg+9bb=3hh+9cc$$

ita vt hinc iſtae ternae formulae reſultent:

$$2gg + 2hh - ff = 9aa$$
$$2hh + 2ff - gg = 9bb$$
$$2ff + 2gg - hh = 9cc.$$

4. Quae cum ſimiles ſint ipſis propoſitis, concludimus ſi pro lateribus $2a$, $2b$, $2c$ ſint rectae biſecantes f, g, h tum pro lateribus $2f$, $2g$, $2h$ fore rectas biſecantes $3a$, $3b$, $3c$, ideoque pro lateribus f, g, h rectas biſecantes $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}c$. Quare inuento vno huiusmodi triangulo, ſi rectae biſecantes pro lateribus noui trianguli accipiantur, hoc eadem gaudebit proprietate, quia in hoc rectae biſecantes ſunt tres quadrantes laterum praecedentis.

5. His obſeruatis ſolutionem quaeſtionis ſequenti modo aggredior. Primo binis tantum formulis ſatis facturus eas ita exhibeo:

$$(b-c)^2 + (b+c)^2 - aa = (b-c)^2 + (b+c+a)(b+c-a) = ff$$
$$(a-c)^2 + (a+c)^2 - bb = (a-c)^2 + (a+c+b)(a+c-b) = gg$$

ſtatuo igitur:

$$f = b - c + (b+c+a)p \quad \text{et} \quad g = a - c + (a+c+b)q$$

vt facta ſubſtitutione diuiſio per $a+b+c$ ſuccedat, hoc modo obtinetur:

$$b + c - a = 2(b-c)p + (b+c+a)pp$$
$$a + c - b = 2(a-c)q + (a+c+b)qq.$$

6. Ex vtraque aequatione definiatur valor ipſius c:

$$c = \frac{a(1+pp) - b(1-2p-pp)}{1+2p-pp} = \frac{b(1+qq) - a(1-2q-qq)}{1+2q-qq}$$

vnde

vnde fit

$$a+b+c=\frac{2a(1+p)+4bp}{1+2p-pp}=\frac{2b(1+q)+4aq}{1+2q-qq}$$

ex quo duplici valore ratio inter numeros a et b colligitur:

$$a(1+p)(1+2q-qq)-2aq(1+2p-pp)=$$
$$b(1+q)(1+2p-pp)-2bp(1+2q-qq)$$

quamobrem ſtatuo:

$$a=1+q-pp-2pq-ppq+2pqq$$
$$b=1+p-qq-1pq-pqq+2ppq$$

hincque fit

$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{1+3p+q+pp-pq-7ppq-p^3+3p^3q}{1+2p-pp}$$

ſeu $a+b+c=2p+2q-6pq.$

7. Cum igitur ſit:

$$a+b=2+p+q-pp-qq-4pq+ppq+pqq$$

erit $c=p+q+pp+qq-2pq-ppq-pqq$

ſicque binis formulis ſatisfit, numeris a, b, c ſequentes valores tribuendo:

$$a=1+q-pp-2pq-ppq+2pqq$$
$$b=1+p-qq-2pq-pqq+2ppq$$
$$c=p+q+pp+qq-2pq-ppq-pqq$$

vnde cum fiat

$$a+b-c=2+2p+2q-6pq$$
$$b-c=1-q-pp-2qq+3ppq$$
$$a-c=1-p-qq-2pp+3pqq$$

 habe-

habebimus:

$$f = 1 + 2p - q + pp - 2qq + 2pq - 3ppq \quad \text{et} \quad b - c + f = 2(1+q)(1+p-2q)$$
$$g = 1 + 2q - p + qq - 2pp + 2pq - 3pqq \qquad a - c + g = 2(1+p)(1+q-2p).$$

8. Iuuabit hinc etiam ſequentes valores elicuiſſe:

$$a+b-c = 2 - 2pp - 2qq - 2pq + 2ppq + 2pqq = 2(1-p)(1-q)(1+p+q)$$
$$b+c-a = 2p + 2pp - 2pq - 4pqq + 2ppq \quad = 2p(1+q)(1+p-2q)$$
$$a+c-b = 2q + 2qq - 2pq - 4ppq + 2pqq \quad = 2q(1+p)(1+q-2p)$$

vbi cauendum eſt, ne harum vlla euaneſcat, quia alioquin triangulum periret, excluduntur ergo ſequentes valores:

$$p=0,\ q=0,\ p=\pm 1,\ q=\pm 1,\ p+q=-1,\ q=\tfrac{p\pm 1}{2},\ p=\tfrac{p\pm 1}{2}.$$

Praeterea vero etiam excludi oportet $1+p+q=3pq$ ne ſumma laterum euaneſcat. Tum vero etiam notetur eſſe:

$$a-b = q + p + qq - pp + 3pqq - 3ppq = (q-p)(1+p+q+3pq)$$
$$g-f = 3q - 3p + 3qq - 3pp - 3pqq + 3ppq = 3(q-p)(1+p+q-pq)$$

tandem vero eſt

$$aa+bb+cc = 2(1-p-q+p-q+pp-pq+qq)(1+2(p+q)+(p+q)^2+3ppqq)$$

ſeu $aa+bb+cc = \tfrac{1}{2}((2-p-q)^2+3(p-q)^2)(1+p+q)^2+3ppqq).$

9. Supereſt igitur vt tertia conditio impleatur, quae in hac formula continetur:

$$bb = (a+b)^2 + (a-b)^2 - ac = (a-b)^2 + (a+b+c)(a+b-c)$$

vbi ſi valores modo indicati ſubſtituantur, colligitur:

$$bb = (q-p)^2(1+p+q+3pq)^2 + 4(1-p)(1-q)(1+q)(1+p+q-3pq)$$

quae

quae euoluitur in hanc formam:

$$bb = 9ppqq(q-p)^2 + 6pq(p+q)(pp-4pq+qq)$$
$$+p^4 + 22p^3q + 6ppqq + 22pq^3 + q^4$$
$$-2(p+q)^3 - 3(pp+6qq) + 4(p+q) + 4$$

quae ſecundum poteſtates ipſius q diſpoſita fit

$$bb = (1+3p)^2 q^4 - 2(1 - 11p + 9pp + 9p^3)q^3$$
$$-3(1 + 2p - 2pp + 6p^3 - 3p^4)q^2$$
$$+2(2 - 9p - 3pp + 11p^3 + 3p^4)q$$
$$+(2+p-pp)^2.$$

10. Alia methodus hanc aequationem reſolvendi non patet, niſi vt more ſolito pro b eiusmodi expreſſio aſſumatur, qua ſubſtituta valor ipſius q per aequationem ſimplicem determinetur. Tum vero conſtat, quomodo vno valore inuento ex eo continuo plures elici queant. Ad minores autem valores eruendos, generatim notetur ſi fuerit

$$bb = AAq^4 + 2Bq^3 + Cqq\,2Dq + EE$$

ſequentibus poſitionibus negotium confectum iri:

1°. ſi $b = Aqq + \frac{B}{A}q \pm E$ fit $q = \frac{2A(AD \mp BE}{BB - AA(C \mp 2AE)}$

2°. ſi $b = \pm Aqq + \frac{D}{E}q + E$ fit $q = \frac{DD - EE(C \mp 2AE)}{2E(BE \mp AD)}$

3°. ſi $b = Aqq + \frac{B}{A}q + \frac{C}{2A} - \frac{BB}{2A^3}$ fit $q = \frac{(BB - AAC)^2 - 4A^4EE}{4BA(B(BB - AAC) + 2A^4D)}$

4°. ſi $b = \frac{CEE - DD}{2E^3}qq + \frac{D}{E}q + E$ erit $q = \frac{4EE(D(DD - CEE) + 2BE^4)}{(DD - CEE)^2 - 4AAE^4}$

11. Cum autem caſus ſupra excluſi noſtrae aequationi ſponte ſatis faciant, et pro $b\,b$ quadratum producant, ex iis nouas formas ſimiles elicere licet, vnde deinceps noui valores idonei pro q erui queant.

Sit

Sit ergo primo $q = 1 + x$ eritque

$$bb = (1-p+x)^2(2+4p+(1+3p)x)^2 - 4x(1-p)(2+p+x)(2-p+(1-3p)x)$$

quae euoluta praebet hanc formam

$$\begin{aligned} bb = (1+3p)^2x)^4 &+ 2(1+23p+9pp-9p^3)x^3 \\ &+ (-3+92p+10pp-72p^3+9p^4)xx \\ &+ 4(1-p)(-1+12p+10pp-6p^3)x^2 \\ &+ 4(1-p)^2(1+2p)^2 \end{aligned}$$

tum vero eſt

$$\begin{aligned} a+b-c &= -2x(1-p)(2+p+x) \\ b+c-a &= -2p(2+x)(1-p+2x) \\ a+c-b &= 2(1+p)(1+x)(2-2p+x). \end{aligned}$$

Praeſtabit autem quouis caſu, quo loco p determinatus valor aſſumitur, ſubſtitutionem in priori forma facere, ac tum denique euolutionem inſtituere.

12. Sit igitur ſecundo $q = -1 - p + x$, eritque

$$bb = (1+2p-x)^2(3p(1+p)-1+3p)x)^2 + 4x(1-p)(2+p-x)(3p(1+p) + (1-3p)x)$$

atque

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2x(1-p)(2+p-x) \\ b+c-a &= -2p(p-x)(3+3p-2x) \\ a+c-b &= 2(1+p)(1+p-x)(3p-x). \end{aligned}$$

Sit tertio $q = -1 + x$ eritque

$$bb = (1+p-x)^2(2p-(1+3p)x)^2 + 4(1-p)(2-x)(p+x)(4p-(1-3p)x)$$

atque

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2(1-p)(2-x)(p+x) \\ b+c-a &= 2px(3+p-2x) \\ a+c-b &= 2(1+p)(1-x)(2p-x). \end{aligned}$$

Sit

Sit quarto $q = \frac{1+p+x}{2}$ eritque

$$16bb = (1-p+x)^2(3(1+p)^2+(1+3p)x)^2 + 8(1-p)(1-p-x)(3+3p+x)$$
$$(3(1-pp)+(1-3p)x)$$

atque
$$a+b-c = \tfrac{1}{2}(1-p)(1-p-x)(3(1+p)+x)$$
$$b+c-a = -px(3+p+x)$$
$$a+c-b = \tfrac{1}{2}(1+p)(1+p+x)(3(1-p)+x).$$

Sit denique quinto $q = \frac{1+p+x}{3p-1}$ erit

$$(3p-1)^4 bb = ((1-p)(1+3p)+x)^2(6p(1+p)+(1+3p)x)^2$$
$$+4(3p-1)^2 x(1-p)(2(1-p)+x)(3p(1+p)+x)$$

atque
$$a+b-c = \frac{-2(1-p)(2(1-p)+x)(3p(1+p)+x)}{(3p-1)^2}$$
$$b+c-a = \frac{-2p(1+p+x)(3(1-pp)+2x)}{(3p-1)^2}$$
$$a+c-b = \frac{2(1+p)(1+p+x)(6p(1-p)+x)}{(3p-1)^2}$$

ſemper autem eſt

$$f = b-c+(a+b+c)p \quad \text{et} \quad g = a-c+(a+b+c)q.$$

13. Hinc ergo ſatis patet innumerabiles ſolutiones noſtri problematis inueniri poſſe. Inuento enim pro q valore quocunque $q = n$, ſtatuatur $q = n + x$, et aequatio reſultans iterum huiusmodi formam habebit

$$bb = AAx^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + EE$$

vnde nouos valores pro x et b eruere licet methodo ante indicata. Cum autem hic potiſſimum ſolutiones in minoribus numeris deſiderentur, litterae p valores ſimpliciores tribuamus, vnde quidem valores 0 et ± 1 excludi conueniet.

Caſus 1. $p = -2$.

14. Ob $p = -2$, habemus:

$$a = -3 + q - 4qq; \quad f = 1 - 17q - 2qq$$
$$b = -1 + 12q + qq; \quad g = -5 - 2q + 7qq$$
$$c = 2 + q + 3qq; \quad a + b + c = -2 + 14q$$

vnde fieri oportet

$$hh = (q+2)^2 (5q+1)^2 - 12(q-1)^2 (7q-1)$$

quae euoluta abit in hanc formam:

$$25q^4 + 26q^3 + 321qq - 64q + 16 = hh.$$

Hic igitur eſt $A = 5$, $B = 13$, $C = 321$, $D = -32$, et $E = 4$ ideoque ſequentes ſolutiones naſcuntur:

1°. ſi $h = 5qq + \frac{13}{5}q \pm 4$ fit $q = \frac{10(40 \pm 13)}{1964 \mp 250}$

2°. ſi $h = \pm 5qq - 8q + 4$ fit $q = \frac{-257 \pm 40}{26 \pm 80}$

vbi tertiam et quartam, quia numeros nimis magnos praebent, omitto.

15. Prioris ſolutionis ſignum ſuperius praebet:

$$q = \frac{10 \cdot 53}{1714} = \frac{5 \cdot 53}{857},$$

vnde naſcuntur numeri nimis magni, ſignum vero inferius

$$q = \frac{10 \cdot 27}{2214} = \frac{15}{123} = \frac{5}{41} \text{ ergo } h = \frac{-6066}{1641}.$$

Poſterioris vero ſolutionis ſignum ſuperius dat

$$q = \frac{-217}{105}$$

ſignum vero inferius:

$$q = \frac{-207}{-54} = \frac{11}{2} \text{ ergo } h = \frac{765}{4}$$

vnde

vnde etiam reliquas litteras definiamus

$$a=-\tfrac{237}{2};\; b=\tfrac{381}{4};\; c=\tfrac{393}{4}$$
$$f=-153;\; g=\tfrac{783}{4};\; h=\tfrac{765}{4}.$$

Hos numeros multiplicemus per 4 ac diuidamus per 3 vt obtineamus hanc ſolutionem ſatis ſimplicem:

$$a=158;\quad b=127;\quad c=131$$
$$f=204;\quad g=261;\quad h=255$$

et quia litterae f, g, h quae communem habent diviſorem 3, in locum litterarum a, b, c ſubſtitui poſſunt, prodibit haec ſolutio multo ſimplicior

$$a=69;\quad b=87;\quad c=85$$
$$f=158;\quad g=127;\quad h=131$$

vnde fit $aa+bb+cc=2.\,7.\,19.\,73$, qui factores vtique ſunt numeri formae $xx+3yy$, vti natura rei poſtulat,

16. Cum loco q ſatisfaciat tam $+1$ quam -1, vtamur hac ſubſtitutione $q=\frac{y+1}{y-1}$ fietque

$$\tfrac{1}{4}(y-1)^4 hh=81y^4+54y^3-99yy-36y+100$$

vnde ob

$$A=9,\; B=27,\; C=-99,\; D=-18,\; E=10$$

habebimus has reſolutiones:

1°. ſi $\frac{1}{2}(y-1)^2 h=9yy+3y\pm10$, erit $y=\frac{-9(3\pm5)}{27(3\pm5)}=-\frac{1}{3}$

2°. ſi $\frac{1}{2}(y-1)^2 h=\pm 9yy-\frac{9}{5}y+10$ erit $y=\frac{9+25(11\pm20)}{30(5\pm3)}$

quarum prior dat $q=-\frac{1}{2}$, qui eſt caſus excluſus forma $q=\frac{p+1}{2}$; altera vero ſuppeditat

ſub ſigno ſuperiori $y = \frac{784}{245} = \frac{49}{15}$ et $q = \frac{32}{17}$
ſub ſigno inferiori $y = -\frac{24 \cdot 9}{60} = -\frac{18}{5}$ et $q = \frac{15}{23}$.

17. Sit ergo $y = \frac{49}{15}$ et $q = \frac{32}{17}$ eritque
$\frac{2 \cdot 17^2}{15^2} h = \frac{2504}{25}$ hinc $h = \frac{9 \cdot 1252}{289}$, porro

$$a = -3 + \frac{32}{17} - \frac{4096}{289} = -\frac{4419}{289}$$
$$b = -1 + \frac{12 \cdot 32}{17} + \frac{1024}{289} = \frac{7263}{289}$$
$$c = 2 + \frac{32}{17} + \frac{3072}{289} = \frac{4194}{289}$$
$$f = 1 - \frac{17 \cdot 32}{17} - \frac{2048}{289} = -\frac{11007}{289}$$
$$g = -5 - \frac{2 \cdot 32}{17} + \frac{7 \cdot 1024}{289} = \frac{4635}{289}.$$

Omnes hi valores per 289 multiplicati per 9 deprimantur, et habebitur iſta ſolutio

$a = 491$; $b = 807$; $c = 466$
$f = 1223$; $g = 515$; $h = 1252$

quae eadem reſultat ex altero caſu inuento $q = \frac{15}{23}$, vnde eſt $aa + bb + cc = 2.\ 7.\ 19\ 43.\ 97.$

Caſus 2. $p = 2$.

18. Pro hoc ergo caſu primo habemus:

$a + b - c = -2(1 - q)(3 + q)$; $b - c + f = \frac{b + c - a}{2}$
$b + c - a = 4(1 + q)(3 - 2q)$;
$a + c - b = -6q(3 - q)$; $a - c + g = \frac{a + c - b}{q}$

vnde fit

$$hh = (q - 2)^2 (7q + 3)^2 - 4(1 - q)(3 + q)(3 - 5q)$$

quae euoluta praebet hanc formam:

$$hh = 49q^4 - 174q^3 + 99qq + 216q.$$

haec-

haecque facto $q = 3r$ tranſit in hanc ſimpliciorem

$$\tfrac{1}{81} hh = 49 r^4 - 58 r^3 + rr + 8 r$$

caſus autem excludendi ſunt $q = \pm 1$; $q = -3$; $q = \frac{3}{2}$; $q = 3$ et $q = \frac{3}{5}$.

19. Cum hic ſit $A = 7$, $B = -29$, $C = 1$, $D = 4$, $E = 0$ erit ex ſolutione prima ſumto $\frac{1}{9} h = 7 rr - \frac{29}{7} r$

$$r - \frac{14 \cdot 28}{841 - 9} = \frac{49}{99} \text{ et } q = \frac{49}{33}, \text{ hincque } h = -\frac{7 \cdot 470}{11 \cdot 99}$$

tum vero porro

$$a + b - c = \frac{2 \cdot 16 \cdot 148}{33 \cdot 33}; \quad b - c + f = \frac{4 \cdot 41}{33 \cdot 33}$$

$$b + c - a = \frac{4 \cdot 82 \cdot 1}{33 \cdot 33}; \quad a - c + g = -\frac{6 \cdot 50}{33}$$

$$a + c - b = -\frac{6 \cdot 49 \cdot 50}{33 \cdot 33}$$

multiplicentur hi valores omnes per $\frac{33 \cdot 33}{4}$ erit

$$a+b-c = 1184; \quad 2c = -3593; \quad 2f = -4777$$

$$b+c-a = 82; \quad 2a = -2491; \quad 2g = -6092$$

$$a+c-b = -3675; \quad 2b = +1266; \quad 2h = -1645$$

$$a+b+c = -2409.$$

Duplicatis ergo valoribus prodit haec ſolutio

$$a = 2491; \quad b = 1266; \quad c = 3593$$

$$f = 4777; \quad g = 6092; \quad h = 1645$$

hinc vero eſt $aa + bb + cc = 2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 409$.

20. Transformemus aequationem noſtram ponendo $r = \frac{y+1}{y-1}$ orieturque

$$\tfrac{1}{324} hh (y-1)^4 = 25 + 82 y + 73 yy + 16 y^3$$

 ſtatua-

ſtatuatur $\frac{1}{18}h(y-1)^2 = 5 + \frac{41}{5}y$, ſitque $y = -\frac{9}{25}$ hinc $r = -\frac{8}{17}$ et $q = -\frac{24}{17}$; ideoque $h = \frac{45 \cdot 128}{289}$; Porro

$$a + b - c = -\frac{2 \cdot 41 \cdot 27}{289}; \quad b - c + f = -\frac{2 \cdot 7 \cdot 99}{289}$$

$$b + c - a = -\frac{4 \cdot 7 \cdot 99}{289}; \quad a - c + g = -\frac{6 \cdot 17 \cdot 75}{289}$$

$$a + c - b = \frac{6 \cdot 24 \cdot 75}{289}.$$

Multiplicentur omnes hi valores per $\frac{289}{9}$ et habebitur

$a+b-c = -246$; $2c = 892$; $h = 640$
$b+c-a = -308$; $2a = 954$; $b-c+f = -154$; $f = 569$
$a+c-b = 1200$; $2b = -554$; $a-c+g = -850$; $g = -881$
$a+b+c = 1646$

vnde colligitur haec ſolutio:

$a = 477$; $b = 277$; $c = 446$
$f = 569$; $g = 881$; $h = 640$.

21. In aequatione per q expreſſa ſtatuatur $q = \frac{y+1}{y-1}$ ac reperietur

$$\tfrac{1}{4}hh(y-1)^4 = 25y^4 - 146y^3 + 69yy + 244y + 4$$

vbi $A = 5$, $B = -73$, $C = 69$, $D = 122$, $E = 2$.

Ergo

1°. ſi $\frac{1}{2}h(y-1)^2 = 5yy - \frac{73}{5}y \pm 2$ fit

$$y = \frac{10(610 \pm 146)}{73^2 - 25(69 \mp 20)} = \frac{5(305 \pm 73)}{901 \pm 125}$$

2°. ſi $\frac{1}{2}h(y-1)^2 = 5yy + 61y + 2$ fit

$$y = \frac{4 \cdot 61^2 - 4(69 \mp 20)}{4(-146 \mp 610)} = \frac{1826 \pm 10}{-73 \mp 305}.$$

Ex priori dat ſignum ſup. $y = \frac{5 \cdot 378}{1026} = \frac{35}{19}$ et $q = \frac{27}{8}$

at ſignum inf. $y = \frac{5 \cdot 232}{776} = \frac{145}{97}$ et $q = \frac{121}{24}$.

Ex

Ex ſecunda dat ſignum ſup. $y = \frac{1836}{-378} = -\frac{34}{7}$ et $q = \frac{27}{41}$
at ſignum inf. $y = \frac{1816}{232} = \frac{227}{29}$ et $q = \frac{128}{99}$.
Ex valore $q = \frac{27}{8}$ colligimus hanc ſolutionem

$$a = 404;\quad b = 377;\quad c = 619$$
$$f = 3 \cdot 314;\quad g = 3 \cdot 325;\quad h = 3 \cdot 159$$

vbi fit $aa + bb + cc = 2.\ 3.\ 7.\ 13^2.\ 97.$
Ex valore autem $q = \frac{27}{41}$ naſcitur iſta ſolutio

$$a = 134;\quad b = 823;\quad c = 607$$
$$f = 3 \cdot 480;\quad g = 3 \cdot 103;\quad h = 3 \cdot 337$$

vbi eſt $aa + bb + cc = 2.\ 3.\ 7.\ 19.\ 31.\ 43$
notandumque eſt hic bina latera tertio non eſſe maiora.

22. Pluribus caſibus inuoluendis hic non immoror, ſed potius animaduerto, methodum qua hic ſum vſus, non ſatis videri naturalem et ad ſcopum accommodatam, propterea quod nulla ſuppeditat criteria ſolutiones ſimpliciores diſtinguendi. Deſideratur ergo tam pro hoc problemate, quam pro aliis ſimilibus, quarum ſolutio ad huiusmodi formam

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

ad quadratum reducendam, reuocatur. Atque in hoc quidem problemate ſolutio a quantitate $aa + bb + cc$ inchoanda videtur, quae huiusmodi numero $2(xx + 3yy)$ certe eſt aequalis; et cum debeat eſſe

$$4(xx + 3yy) = ff + 3aa = gg + 3bb = hh + 3cc$$

euidens

euidens eſt numerum $xx + 3yy$ factores habere debere, quos conſtat eiusdem eſſe formae. Statui igitur poterit

$$xx+3yy=(mm+3nn)(pp+3qq)(rr+3ss) \text{ et } 4(xx+3yy)$$

octo modis ad formam $AA+3BB$ referri poteſt, vnde ternas illas eligi oportet. Foret nempe

$$a = 2m(ps+qr)+2n(3qs-pr)$$
$$b = m((3q+p)s \pm (q-p)r) \pm n(3(q-p)s \mp (3q+p)r)$$
$$c = n((3q-p)s \pm (q+p)r) \pm n(3(q+p)s \mp (3q-p)r)$$

et effici reſtat $aa+bb+cc = 4(xx+3yy)$.

Verum hoc modo calculus fit ſatis prolixus, niſi forte certis artificiis tractabilior reddi poteſt.

RESO-

RESOLVTIO AEQVATIONIS

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

PER NVMEROS TAM RATIONALES, QVAM INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Haec forma latiſſime patens, quae inſignem partem Analyſeos Diophanteae complectitur, pro varia indole numerorum A, B, C, D, E, F plures in ſe continet caſus, qui vulgo diuerſis methodis tractari ſolent. Hic autem ſingulari modo eius reſolutionem ſine radicis extractione ita docebo, vt ſolutio non ſolum ad numeros rationales, ſed etiam integros accommodari poſſit.

1. In genere quidem reſolutionem huius aequationis tradere non licet, quia ſaepe vſu venire poteſt, vt ea ſit impoſſibilis, certiſſimum autem criterium poſſibilitatis ſolutionis ſine dubio eſt, ſi vnicus ſaltem caſus, quo huic aequationi ſatisfiat, fuerit cognitus. Ponamus igitur hoc contingere caſu quo $x=a$ et $y=b$, ita vt reuera ſit:

$$Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F=0$$

et quemadmodum ex hoc caſu cognito, alii ſiue

 nume-

numero finiti, ſiue infiniti, erui queant, hic ſum oſtenſurus.

2. Subtrahatur iſta aequatio ab ipſa propoſita generali, vt obtineatur haec:

$$A(x^2-a^2)+2B(xy-ab)+C(y^2-b^2)+2D(x-a)$$
$$+2E(y-b)=0$$

cuius ſingula membra praeter ſecundum factorem habent vel $x-a$, vel $y-b$, at membrum ſecundum pluribus modis in duas partes reſolui poteſt, quarum altera habeat factorem $x-a$, altera $y-b$,

$$xy-ab=x(y-b)+b(x-a)=y(x-a)+a(y-b)$$

vt autem ambae litterae x et y, parem rationem ineant, hac reſolutione vtamur:

$$2(xy-ab)=(x-a)(y+b)+(x+a)(y-b);$$

quo facto aequatio noſtra ſequentem induet formam

$$A(x-a)(x+a)+B(x-a)(y+b)+B(x+a)(y-b)+C(y-b)(y+b)$$
$$+2D(x-a)+2E(y-b)=0.$$

3. Conſideretur nunc ratio quantitatum $x-a$ et $y-b$ tamquam data, ac ſtatuatur

$\frac{x-a}{y-b}=\frac{p}{q}$, ita vt ſit: $qx-aq=py-bp$,

qua ratione introducta noſtra aequatio euadet:

$$Ap(x+a)+Bp(y+b)+Bq(x+a)+Cq(y+b)+2Dp+2Eq=0$$

ex quibus binis aequationibus vtramque quantitatem quaeſitam x et y definire licebit. Quum enim poſterior ſit

$$(x+a)(Ap+Bq)+(y+b)(Bp+Cq)+2Dp+2Eq=0,$$

prior

prior vero praebeat:

$$y = \frac{qx - aq + bp}{p};$$

hic valor in illa ſubſtitutus dat:

$$(Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)x + Aap^2 + 2Cbpq - Caq^2 + 2Dp^2 + 2Epq = 0$$
$$+ 2Bbp^2$$

vnde colligitur

$$x = -\frac{a(Ap^2 - Cq^2) - 2b(Bpp + Cpq) - 2Dp^2 - 2Epq}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}$$

hincque

$$y = +\frac{b(Ap^2 - Cq^2) - 2a(Bqq + Apq) - 2Dpq - 2Eq^2}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}.$$

4. Ecce ergo iam ſumus aſſecuti ſolutionem generaliſſimam aequationis propoſitae in numeris rationalibus, quia enim ambos numeros p et q pro arbitrio aſſumere licet, euidens eſt, omnes plane ſolutiones in his formulis contineri debere. Quod autem ſolutiones in numeris integris attinet, manifeſtum eſt tales exhiberi non poſſe niſi ambo numeratores illarum fractionum diuiſionem admittant per communem denominatorem $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, id quod fieri nequit niſi hic denominator ad numerum ſatis exiguum ſe reduci patiatur. Statim ergo hinc excludi oportet caſus, quibus $B^2 < AC$, ſiue quibus $AC - B^2$ eſt numerus poſitiuus, tum enim quicunque valores loco p et q accipiantur; formulam $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, non infra certum valorem deprimere licebit.

5. Quod ſi ergo numeri A, B et C ita fuerint comparati, vt per certos numeros p et q for-

mula $A p^2 + 2 B p q + C q^2$ ad exiguum numerum, ſiue vnitatem, ſiue binarium tam poſitiue quam negatiue ſumtum redigi queat, omnes partes binarum formularum pro x et y inuentarum abibunt in numeros integros. Poſito autem iſto numero $= \omega$, ita vt his caſibus ſit ω vel ± 1; vel ± 2, ob $A p^2 + 2 B p q + C q^2 = \omega$, reperitur

$$p = - \frac{B q \pm \surd((B B - A C) q^2 + A \omega)}{A};$$

ſic formula

$$(B B - A C) q^2 + A \omega$$

debebit eſſe quadratum, quod quidem plerumque fieri poterit, quia pro ω ſumi poteſt vel $+1$, vel -1, vel $+2$, vel -2, dummodo $B B - A C$ fuerit numerus poſitiuus non quadratus, etiamſi ſine dubio dantur caſus, quibus ω maiorem ſortitur valorem. Tum vero habebitur:

$$x = \tfrac{a}{\omega}((q^2 - A p^2) - \tfrac{2b}{\omega}(B p p + C p q) - \tfrac{2D}{\omega} p^2 - \tfrac{2E}{\omega} p q$$

$$y = \tfrac{b}{\omega}(A q^2 - C p^2 - \tfrac{2a}{\omega}(B q q + C p q) - \tfrac{2D}{\omega} p q - \tfrac{2E}{\omega} q^2.$$

6. Vtrum igitur noſtra aequatio admittat ſolutiones in numeris integris, nec ne? iudicium facillime inſtituitur; conſideretur enim formula $BB - AC$, quae ſi fuerit numerus poſitiuus non quadratus, ſemper adeo infinitis modis numerum q aſſignare licebit, vt formula illa radicalis abeat in numerum rationalem, indeque definietur alter numerus p, quibus adhibitis impetrabimus binos numeros ſatisfacientes x et y. Sufficiet autem pro q vnicum valorem idoneum inueniſſe, dum ex eo pro x et y ſucceſſi-

ſucceſſiue innumerabiles valores ſatisfacientes deduci poſſunt, id quod operae pretium erit clarius oſtendiſſe. Ponamus ſcilicet ex numeris primo ſatisfacientibus a et b, hoc modo prodiiſſe ſequentes:

$$x = \zeta a + \eta b + \theta \quad \text{et} \quad y = \lambda a + \mu b + \nu$$

atque ſi iam hi pro a et b adhibeantur, per easdem formulas nouos deducemus valores pro x et y, qui denuo loco a et b aſſumti praebebunt iterum alios idoneos valores pro x et y, et ita porro.

7. Sint numeri qui hoc modo ſucceſſiue pro x reperiuntur,

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IIII} \text{ etc.}$$

numeri autem pro y reſpondentes ſint:

$$b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IIII} \text{ etc.}$$

atque habebimus ſequentes aequationes:

$$\begin{aligned} a^{I} &= \zeta a + \eta b + \theta; & b^{I} &= \lambda a + \mu b + \nu \\ a^{II} &= \zeta a^{I} + \eta b^{I} + \theta; & b^{II} &= \lambda a^{I} + \mu b^{I} + \nu \\ a^{III} &= \zeta a^{II} + \eta b^{II} + \theta; & b^{III} &= \lambda a^{II} + \mu b^{II} + \nu \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ex his relationibus eliminando litteras b, b^{I}, ſatis ſimplex relatio concluditur, inter valores continuos, a, a^{I}, a^{II}, quae ita ſe habet:

$$a^{II} = (\mu + \zeta) a^{I} + (\eta\lambda - \mu\zeta) a + \theta(1 - \mu) + \eta\nu.$$

Simili modo eliminando litteras a, a^{I}

$$b^{II} = (\mu + \zeta) b^{I} + (\eta\lambda - \zeta\mu) b + \lambda\theta + \nu(1 - \zeta),$$

vnde patet vtramque ſeriem eſſe recurrentem ſecundi ordinis, ſecundum eandem ſcalam relationis:

$$\zeta+\mu\,,\quad \eta\lambda-\zeta\mu$$

vtrinque autem inſuper numerum quendam abſolutum addi oportet.

8. Cognita hac ſcala relationis formetur haec aequatio quadratica

$$z^2=(\zeta+\mu)z+(\eta\zeta-\zeta\mu)$$

cuius binae radices ſunt:

$$z=\frac{\zeta+\mu}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{\zeta-\mu}{2}\right)^2+\eta\lambda\right)}$$

quarum poteſtatibus exprimi poſſunt termini generales vtriusque ſeriei. Quo hoc clarius reddatur, ſit prioris ſeriei

$$a,\ a',\ a'',\ a'''\ \text{etc.}$$

terminus quotuscunque $= x$, alterius vero ſeriei:

$$b,\ b',\ b'',\ b'''\ \text{etc.}$$

terminus generalis y, et poſito breuitatis gratia

$$\frac{\zeta+\mu}{2}=r\quad\text{et}\quad\sqrt{\left(\left(\frac{\zeta-\mu}{4}\right)^2+\eta\lambda\right)}=\sqrt{s}\,,$$

pro priori ſerie ſtatuatur

$$x=f(r+\sqrt{s})^n+g(r-\sqrt{s})^n+b,$$

eritque valor ſequens

$$x'=f(r+\sqrt{s})(r+\sqrt{s})+g(r-\sqrt{s})(r-\sqrt{s})^n+b$$

huncque ſequens

$$x''=f(r+\sqrt{s})^2(r+\sqrt{s})^n+g(r-\sqrt{s})^2(r-\sqrt{s})^n+b.$$

Quare cum ex lege progreſſionis eſſe debeat;

$$x''=(\zeta+\mu)x'+(\eta\lambda-\zeta\mu)x+\theta(1-\mu)+\eta\nu$$

vbi

ſi illi valores ſubſtituantur, poteſtates ſponte ſe deſtruunt, ac reſultat

$$b = \frac{\theta(1-\mu)+\eta\upsilon}{(1-\mu)(1-\zeta)-\zeta\lambda}.$$

Pro coëfficientibus autem f et g conſiderentur termini initiales ante definiti, et facto quidem $n = 0$, prodeat $x = a$, hincque erit

$$a = f + g + b,$$

tum vero ponatur $n = 1$ vt prodeat

$$x = a' = \zeta a + \eta b + \theta$$

fiatque ea

$$= f(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s}) + b,$$

et quia

$f + g = a - b$, erit $a' = (a-b)r + (f-g)\sqrt{s} + b)$,

hincque

$$f - g = \frac{a'}{\sqrt{s}} - \frac{(a - b r}{\sqrt{s}} - \frac{b}{\sqrt{s}} = \frac{a' - a r - b(1-r)}{\sqrt{s}}.$$

Eodem modo pro altera ſerie recurrente terminus generalis y reperietur, ita vt in genere nihil amplius deſiderari poſſit.

9. Caeterum vti iam innuimus, dantur caſus, quibus formula $App + 2Bpq + Cqq$, neque ad vnitatem, neque ad binarium deprimi poteſt, conveniet igitur litteras p et q ita aſſumi, vt huic formulae minimus valor concilietur, vnde non parum egregium naſcitur Problema, quo datis numeris A, B, C quaeruntur valores litterarum p et q in integris, vt formula $App + 2Bpq + Cqq$ minimum omnium accipiat valorem.

Alia

Alia Reſolutio eiusdem aequationis.

10. Quum tres termini initiales per A multiplicati, factores habeant

$$(Ax+By+y\sqrt{(C^2-AC)})\ ;\ (Ax+By-y\sqrt{(B^2-AC)})$$

totam aequationem ſub tali forma repraeſentare licebit:

$$(Ax+By+M+(y+N)\sqrt{(B^2-AC)})(Ax+By)+M$$
$$-(y+N)\sqrt{(B^2-AC)})=O,$$

quae euoluta praebet

$$A^2x^2+2ABxy+ACy^2+2AMx+(2MB-2NB^2+2ACN)y$$
$$+M^2-B^2N^2+ACN^2-O=0$$

qua cum forma propoſita comparata aſſequimur:

$$2AD=2AM\ ;\ D=M$$
$$2AE=2MB-2N(B^2-AC)$$
$$AF=M^2-N^2(B^2-AC)-O\text{, hincque}$$
$$M=D;\ N=\frac{BD-AE}{B^2-AC};\ O=D^2-AF-\frac{(BD-AE)}{B^2-AC}.$$

11. Inuentis igitur valoribus M, N et O, ponatur breuitatis gratia $BB-AC=k$, vt aequatio noſtra per factores irrationales expreſſa ſit

$$(Ax+By+D+(y+N)\sqrt{k})(Ax+By+D-(y+N)\sqrt{k})=O.$$

Et quia aſſumimus vnam ſolutionem iam eſſe cognitam, qua ſit $x=a$ et $y=b$, habebimus quoque

$$(Aa+Bb+D+(b+N)\sqrt{k})(Aa+Bb+D-(b+N)\sqrt{k})=O$$

quocirca bina haec producta inter ſe aequalia eſſe debebunt; ſtatuamus hinc breuitatis gratia:

$$Ax+By+M=P\ ;\ (y+N)=Q$$
$$Aa+By+M=G;\ b+N=H$$

ita

ita vt noſtra binorum productorum aequalitas fiat:

$$(P+Q\sqrt{k})(P-Q\sqrt{k}) = O = (G+H\sqrt{k})(G-H\sqrt{k}),$$

vbi notandum, ſi prior factor illius producti, alterutri factori iſtius aequalis ponatur, tum quoque poſteriorem factorem illius ſponte alteri huius aequalem eſſe futurum, quoniam diſcrimen tantum in ſigno quantitatis radicalis $\sqrt{k}$ eſt ſitum. Manifeſtum autem eſt, ſi factores priores inter ſe aequales ſtatuantur et partes tam rationales, quam irrationales ſeorſim aequentur, ſcilicet $F = G$ et $Q = H$, inde ipſum caſum cognitum eſſe proditurum, nempe $x = a$ et $y = b$.

12. Sin autem hoc modo prior factor illius producti, poſteriori huius aequetur, vt ſit

$$P + Q\sqrt{k} = G - H\sqrt{k},$$

noua ſolutio hinc elicietur, aequalitas enim

$Q = -H$ dabit $y + N = -b - N$, ſiue $y = -b - 2N$,

vnde altera conditio $P = G$ dabit

$$Ax - Bb - 2NB + M = Aa + Bb + M \text{ ſeu}$$
$$Ax = Aa + 2Bb + 2NB, \text{ hincque } x = a + \frac{2B(b+N)}{A}.$$

Ergo ex qualibet ſolutione iam inuenta, puta $x = a$ et $y = b$, alia quaſi ſociata ex ea facillime concluditur; quippe quae ſi loco M et N valores aſſumti reſtituantur, praebebit

$$x = a + \frac{2B}{A}\left(b + \frac{BD - AE}{(B^2 - AC)}\right) \quad y = -b - \frac{2(BD - AE)}{B^2 - AC}.$$

Quae quidem ſolutio numeris fractis continetur, niſi forte numeratores fuerint per denominatores ſuos diuiſibiles.

13. Quo autem hinc plures atque adeo infinitas ſolutiones eliciamus, in ſubſidium vocemus formulam $s = \surd(k r^2 + 1)$, quippe quae methodo Pelliana ſemper infinitis modis reſolui poteſt, dummodo k non fuerit vel numerus negatiuus, vel numerus quadratus. Quum enim hinc fiat $ss - kr^2 = 1$, noſtram aequationem hac forma repraeſentare poterimus:

$$P^2 - k Q^2 = (G^2 - k H^2)(s s - k r^2).$$

Hincque per factores irrationales ſtatuamus

$$P + Q\surd k = (G + H\surd k)(s + r\surd k) = Gs + kHr + (Gr + Hs)\surd k$$

ſic enim ſimul toti aequationi ſatisfiet, ſi quidem partes rationales et irrationales ſeorſim aequantur. At irrationales praebent:

$$Q = Gr + Hs,\; y + N = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns;$$
$$y = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns - N.$$

At partes rationales dant:

$$P = Gs + kHr; \text{ ſeu } Ax + By + D = Aas + Abs + Ds + kr + kNr$$

vnde

$$x = s\left(a + \frac{D - BN}{A}\right) + r\left(\frac{kb + kN - B^2 b - BD}{A} - Ba\right) + \frac{BN - D}{A}.$$

14. Nunc igitur loco litterarum M et N reſtituantur valores ſupra inuenti, atque pro noſtris quantitatibus quaeſitis x et y ſequentes reperiuntur formulae, ſi ſcilicet loco k ſcribatur $B^2 - AC$:

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)s + Ba + Cb + E)(-r) + \frac{D - EB}{B^2 - AC}$$
$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)s + (Bb + Aa + D)r + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

vbi

vbi permutatio, quae inter litteras x et y locum habet, manifeſto elucet.

15. Quod ſi hi valores pro x et y inuenti loco a et b ſubſtituantur in iſtis formulis, pro x et y inde noui valores eruentur, qui denuo loco a et b ſumti alios nouos pro x et y praebebunt, et ita porro in infinitum. Verum omnes iſtos valores ſimul in formulis generalibus complecti licebit, vti iam ſupra fecimus. Sequenti autem modo idem negotium multo commodius et ſuccinctius conficietur.

16. Quoniam $ss - krr = 1$ atque adeo omnes poteſtates ipſius $ss - krr$ etiam vnitati aequantur, ponere poterimus

$$P^2 - kQ^2 = (G^2 - kH^2)(ss - krr)^n,$$

hincque per factores irrationales

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

quia autem huius poteſtatis aliae partes ſunt rationales, aliae irrationales per $\sqrt{k}$ affectae, ſtatuamus

$$(s + r\sqrt{k})^n = S + R\sqrt{k}$$

atque vt ante hinc ſequentes valores pro x et y eliciemus

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)S + (Ba + Cb + E)(-R) + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)S + (Bb + Aa + D)R + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}.$$

17. Quum autem ſit $S + R\sqrt{k} = (s + r\sqrt{k})^n$ erit eodem modo $S - R\sqrt{k} = (s - r\sqrt{k})^n$

vnde deducimus

$$S = \tfrac{1}{2}(s + r\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}(s - r\sqrt{k})^n \text{ et}$$

$$R = \frac{1}{2\sqrt{k}}(s + r\sqrt{k})^n - \frac{1}{2\sqrt{k}}(s - r\sqrt{k})^n$$

quibus valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$x = \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC} + \frac{a\sqrt{k} - Ba - Cb - E}{2\sqrt{k}}\right)(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC} + \frac{a\sqrt{k} + Ba + Cb + E}{2\sqrt{k}}\right)(s - r\sqrt{k})^n + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC)} + \frac{b\sqrt{k} + Bb + Aa + D}{2\sqrt{k}}\right)(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC} + \frac{b\sqrt{k} - Bb - Aa - E}{2\sqrt{k}}\right)(s - r\sqrt{k})^n + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

et quia $k = B^2 - AC$ hae formulae ita ſimpliciores euadent:

$$x = \frac{1}{2k}(EB - CD + ak - (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(EB - CD + ak + (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(CD - EB)$$

$$y = \frac{1}{2k}(BD - AE + bk + (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})_n$$

$$+ \frac{1}{2k}(BD - AE + bk - (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(AE - BD).$$

18. Ante iam vidimus, quamlibet ſolutionem $x = a$ et $y = b$ ſuppeditare aliam ſibi quaſi ſociam:

$$x = a + \frac{2B}{A}\left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AB}\right) \text{ et } y = -b - \frac{2(BD - AE)}{B^2 - AC},$$

quia autem ex ipſa indole noſtrae aequationis, litterae x et y inter ſe permutari poſſunt, dummodo

1°. litterae a et b, 2°. litterae A et C et 3^tio litterae D et E inter ſe permutentur, haec conſideratio nobis adhuc aliam ſolutionem ſuppeditabit, ſcilicet

$$x = -a - \frac{2(BE - CD)}{B^2 - AC}; \; y = +b + \frac{2B}{C}\left(a + \frac{BE - CD}{B^2 - AC}\right):$$

Sicque ex eadem ſolutione duae nouae ſociae obtinentur.

19.

19. Haec methodus poſterior aequationem noſtram reſoluendi eo magis eſt notatu digna, quod ex doctrina irrationalium eſt petita, cuius alioquin nullus videtur eſſe vſus in Analyſi Diophantea. Eximium autem huius doctrinae vſum iam pridem in Algebra mea Ruthenice et Germanice edita fuſius oſtendi. Caeterum ad caſus particulares noſtrae aequationis propoſitae hic deſcendere non opus videtur, quum huiusmodi caſus iam paſſim, ſatis ſuperque ſint pertractati.

INSIGNES
PROPRIETATES SERIERVM
SVB HOC TERMINO GENERALI CONTENTARVM

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p+q\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}\left(a-\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p-q\sqrt{k})^n.$$

Auctore

L. EVLERO.

Statim adparet, has ſeries eſſe recurrentes ſecundi ordinis et quemlibet terminum per binos praecedentes determinari; cuiusmodi ſeries etſi iam ſatis ſuperque ſunt pertractatae, tamen nonnullas earum inſignes proprietates hic proponam; inprimis autem operam dabo, vt omnia calculo ſuccincto facillime expediantur, dum alias ad calculos non parum complicatos perueniri ſolet.

§. 1. Breuitatis autem gratia ſtatim ponamus

$$\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{b}{\sqrt{k}}\right) = f;\ \tfrac{1}{2}\left(a-\frac{b}{\sqrt{k}}\right) = g$$

$$p+q\sqrt{k} = v;\ p-q\sqrt{k} = u$$

tum vero ſit etiam $p^2 - kq^2 = r$; ita, vt ſit $p = \sqrt{(kq^2 + r)}$. Hoc modo formula noſtra ita contrahetur

$$k = fv^n + gu^n$$

inde autem mox ſequentes fluunt relationes:

$f+g$

$f + g = a$; $f - g = \frac{b}{\sqrt{k}}$ et $fg = \frac{1}{4}(a^2 - \frac{b^2}{k})$

$v + u = 2p$; $v - u = 2q\sqrt{k}$; $vu = p^2 - kq^2 = r$.

§. 2. Praeterea quo terminos huius ſeriei facilius menti repraeſentare poſſimus; loco x ſcribamus hoc ſignum $[n]$, quippe quo terminus ex exponente n oriundus deſignatur, ſicque ipſa ſeries ſequentibus conſtabit terminis:

$[0]$; $[1]$; $[2]$; $[3]$ etc.

vnde hic ſaltem termini initiales notentur, ſcilicet

$[0] = a$; $[1] = ap + bq$; $[2] = a(p^2 + kq^2) + 2bpq$.

His igitur praenotatis ſequentia problemata tractemus.

Problema Primum.

§. 3. *Definire legem, qua terni termini huius ſeriei immediate ſe inſequentes* $[n]$; $[n+1]$; $[n+2]$ *a ſe inuicem pendent.*

Solutio.

Cum ſit $[n] = f.v^n + g.u^n$; eodemque modo $[n+1] = f.v^{n+1} + g.u^{n+1}$ et $[n+2] = f.v^{n+2} + g.u^{n+2}$; conſideretur haec formula $v^{n+1}(v+u)$, quae ob $v + u = 2p$ fit $= 2p.v^{n+1}$; eadem vero ob $vu = r$ ſiue $u = \frac{r}{v}$ abit in $v^{n+2} + r.v^n$, ita vt nunc habeamus $2pv^{n+1} = v^{n+2} + r.v^n$ ſiue $v^{n+2} = 2p.v^{n+1} - r.v^n$; eodemque modo reperitur $u^{n+2} = 2p.u^{n+1} - r.u^n$. Nunc igitur ſi hae duae formulae addantur, $fv^{n+2} = 2fp.v^{n+1} - fr.v^n$ et $g\,u^{n+2} = 2gp.u^{n+1} - gr.u^n$

ſumma

ſumma erit

$$[n+2] = 2p[n+1] - r[n];$$

vnde patet, noſtram ſeriem eſſe recurrentem, ſcala relationis exiſtente $2p, -r$.

Coroll. 1.

§. 4. Si ergo dentur bini quicunque termini ſucceſſiui huius ſeriei, qui ſint P et Q, ſequens terminus ſemper erit $= 2pQ - rP$.

Coroll. 2.

§. 5. Quodſi ergo pro hac ſcala relationis $2p, -r$ dentur duo termini initiales, A et B, erit, vti ante oſtendimus,

$$A = a \text{ et } B = ap + bq$$

ideoque $a = A$ et $b = \frac{B - Ap}{q}$, exiſtente $kq^2 = p^2 - r$, ita, vt ſit $\frac{b}{\sqrt{k}} = \frac{B - Ap}{\sqrt{(p - r)}}$ hincque ipſe terminus generalis huius ſeriei innoteſcit, quippe qui eſt ipſa noſtra formula propoſita.

Coroll. 3.

§. 6. Ex formulis inuentis patet etiam fore

$$v^{n+2} + u^{n+2} = 2p(v^{n+1} + u^{n+1}) - r(v^n + u^n)$$

vnde deducuntur ſequentes relationes

ſi	erit
$n = 0$	$v^2 + u^2 = 2p(v + u) - 2r$
$n = 1$	$v^3 + u^3 = 2p(v^2 + u^2) - r(v + u)$
$n = 2$	$v^4 + u^4 = 2p(v^3 + u^3) - r(v^2 + u^2)$
$n = 3$	$v^5 + u^5 = 2p(v^4 + u^4) - r(v^3 + u^3)$
$n = 4$	$v^6 + u^6 = 2p(v^6 + u^5) - r(v^4 + u^4)$

etc.

Coroll.

Coroll. 4.

§. 7. Hinc ſi valores inuenti ſucceſſiue ſubſtituantur, reperiemus ſequentem progreſſionem

$$v^0 + u^0 = 2$$
$$v^1 + u^1 = 2p$$
$$v^2 + u^2 = 4p^2 - 2r$$
$$v^3 + u^3 = 8p^3 - 6pr$$
$$v^4 + u^4 = 16p^4 - 16p^2r + 2r^2$$
$$v^5 + u^5 = 32p^5 - 40p^3r + 10pr^2$$
$$v^6 + u^6 = 64p^6 - 96p^4r + 36p^2r^2 - 2r^3$$

etc.

Coroll. 5.

§. 8. Hae expreſſiones ſimpliciores reddentur ſi loco $2p$ ſcribamus litteram ſimplicem s tum enim iſta progreſſio reſultat

$$v^0 + u^0 = 2$$
$$v^1 + u^1 = s$$
$$v^2 + u^2 = s^2 - 2r$$
$$v^3 + u^3 = s^3 - 3rs$$
$$v^4 + u^4 = s^4 - 4rs^2 + 2r^2$$
$$v^5 + u^5 = s^5 - 5rs^3 + 5r^2s$$
$$v^6 + u^6 = s^6 - 6rs^4 + 9r^2s^2 - 2r^3$$

etc.

quae ſeries cum iam ſatis ſit pertractata aliunde nouimus, fore in genere

$$v^n + u^n = s^n - n.r\,s^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.\,2}r^2.\,s^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}r^3.\,s^{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3.\,4}r^4.\,s^{n-8}$$

etc.

atque hinc etiam ſequens problema reſolui poterit.

Problema Secundum.

§. 9. *Definire legem, qua terni termini huius ſeriei per ſaltum ſe inuicem inſequentes inter ſe cohaerent, ſcilicet hi termini* $[n]$; $[n+\nu]$; et $[n+2\nu]$, *denotante* ν *indicem ſaltus, quo termini ſumuntur.*

Solutio.

Cum ergo ſit

$$[n]=f\,v^n+g.\,u^n, \text{ et } [n+\nu]=f.\,v^{n+\nu}+g.\,u^{n+\nu},$$

atque

$$[n+2\nu]=f.\,v^{n+2\nu}+g.\,u^{n+2\nu};$$

conſideretur haec formula $v^{n+\nu}(v^\nu+u^\nu)$, ac ponamus per legem ante aſſignatam eſſe $v^\nu+u^\nu=2\pi$, exiſtente $v^\nu.\,u^\nu=r^\nu$; et formula iſta primo fiet $2\pi.\,v^{n+\nu}$ et quatenus $u^\nu=\frac{r^\nu}{v^\nu}$ eadem dat $v^{n+2\nu}+r^\nu v^n$ ita, vt iam ſit

$$v^{n+2\nu}=2\pi.\,v^{n+\nu}-r^\nu.\,v^n$$

eodemque modo

$$u^{n+2\nu}=2\pi.\,u^{n+\nu}-r^\nu.\,u^n$$

quare ratiocinium, vt ante, inſtituendo nanciſcimur iſtam relationem quaeſitam

$$[n+2\nu]=2\pi[n+\nu]-r^\nu.[n]$$

ope cuius legis termini ſecundum eundem ſaltum procedentes

$$[n+3\nu];\ [n+4\nu];\ [n+5\nu] \text{ etc.}$$

facile reperiuntur.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 10. Cum etiam, vti vidimus, formulae $v^n + u^n$ ſecundum eandem legem progrediuntur ac ſi breuitatis gratia loco 2π ſcribamus σ, progreſſio poſtremi corollarii etiam ad hos ſaltus adcommodabitur, ſi modo loco r ſcribatur r^ν; ſic enim obtinebimus

$$v^0 + u^0 = 2$$
$$v^\nu + u^\nu = \sigma$$
$$v^{2\nu} + u^{2\nu} = \sigma^2 - 2.r^\nu$$
$$v^{3\nu} + u^{3\nu} = \sigma^3 - 3.r^\nu.\sigma$$
$$v^{4\nu} + u^{4\nu} = \sigma^4 - 4.r^\nu.\sigma^2 + 2r^{2\nu}$$
$$v^{5\nu} + u^{5\nu} = \sigma^5 - 5.r^\nu\sigma^3 + 5.r^{2\nu}\sigma$$
$$v^{6\nu} + u^{6\nu} = \sigma^6 - 6.r^\nu\sigma^4 + 9.r^{2\nu}\sigma^2 - 2r^{3\nu}.$$

Coroll. 2.

§. 11. Hoc ergo modo facile eſt, ſaltum ſiue numerum ν tantum efficere, quam quis voluerit, atque adeo ope huius problematis in ſerie noſtra termini quantumuis ab initio remoti ſatis expedite definiri poterunt; id quod ſi ſeriem per ſingulos terminos actu continuare vellemus, nimis operoſum calculum poſtularet.

Problema Tertium.

§. 12. Dato quocunque termino ſeriei noſtrae $[n]$, inuenire eius immediate ſequentem $[n+1]$.

Solutio.

Cum ſit

$$[n] = fv^n + g.u^n \text{ et } [n+1] = fv.v^n + g.u.u^n,$$

 ſi

ſi haec a priore in u ducta ſubtrahatur, remanet

$$u[n]-[n+1]=f(u-v)v^n;$$

at ſi haec ab illa in v ducta ſubtrahatur, remanebit

$$v[n]-[n+1]=g(v-u)u^n.$$

Iam hac duae aequalitates in ſe inuicem ducantur et ob $v^n.u^n=r^n$ proueniet iſta aequatio

$$r[n]^2-2p[n][n+1]+[n+1]^2=-fg.(v-u)^2r^n.$$

At vero eſt

$$(v-u)^2=v^2+u^2-2vu=4p^2-4r;$$

ſicque habebimus

$$r[n]^2-2p[n][n+1]+[n+1]^2-4fg(p^2-r)r^n=0.$$

Quare terminus ſequens $[n+1]$ per aequationem quadraticam ex praecedente $[n]$ ita determinatur, vt ſit

$$[n+1]=p.[n]+\surd((p^2-r)[n]^2-4fg(p^2-r)r^n).$$

Supra autem vidimus eſſe

$$fg=\tfrac{1}{4}(a^2-\tfrac{b^2}{k}) \text{ et } p^2-r=kq^2,$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſolutio noſtra ita ſe habebit

$$[n+1]=p[n]+q\surd(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n).$$

Coroll. I.

§. 13. Quilibet ergo terminus noſtrae ſeriei ita eſt comparatus, vt valor formulae

$$k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n$$

certe ſit numerus quadratus, quandoquidem omnes termini noſtrae ſeriei ſunt rationales.

Coroll.

Coroll. 2.

§. 14. Si ponamus ſeriei binos terminos initiales A et B, ita, vt iis reſpondeant exponentes $n=0$, et $n=1$ ſupra vidimus eſſe

$$a=\mathrm{A} \text{ et } b=\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}p}{q}, \text{ ideoque}$$

$$ka^2-b^2=-\frac{\mathrm{B}^2+2\mathrm{AB}.p-\mathrm{A}^2r}{q^2};$$

quare habebimus

$$[n+1]=p[n]+\sqrt{(kq^2[n]^2+(\mathrm{B}^2-2\mathrm{AB}.p+\mathrm{A}^2r)r^n)}.$$

Problema Quartum.

§. 15. *Dato quocunque ſeriei termino* $[n]$, *inuenire terminum dato interuallo ipſum ſeqnentem ſcilicet* $[n+\nu]$.

Solutio.

Ambo hi termini ita repraeſententur

$$[n]=fv^n+g.u^n \text{ et } [n+\nu]=fv^\nu.v^n+gu^\nu.u^n$$

quarum prior nunc in u^ν, nunc in v^ν ducatur indeque poſterior ſubtrahatur, et ſequentes binae aequationes reſultabunt:

$$u^\nu[n]-[n+\nu]=f(u^\nu-v^\nu)v^n \text{ et}$$

$$v^\nu[n]-[n+\nu]=g(v^\nu-u^\nu)u^n$$

ſi iam vt ante fuerit $v^\nu+u^\nu=2\pi$

vnde ſequitur $v^{2\nu}+u^{2\nu}=4\pi^2-2r^\nu$

duas illas aequationes inuicem multiplicando adipiſcimur

$$r^\nu[n]^2-2\pi.[n][n+\nu]+[n+\nu]^2=-fg(v^\nu-u^\nu)^2r^n.$$

Quia autem eſt

$$(v^\nu - u^\nu)^2 = v^{2\nu} + u^{2\nu} - 2r^\nu = 4\pi^2 - 4r^\nu \text{ et } fg = \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b}{k})$$

relatio inuenta erit

$$[n+\nu]^2 - 2\pi[n][n+1] + r^\nu[n]^2 + (\pi^2 - r^2)(a^2 - \tfrac{b^2}{k})r^n = 0,$$

vnde iterum per extractionem radicis quadratae elicimus

$$[n+\nu] = \pi[n] \surd \left\{ \begin{array}{l} (\pi^2 - r^\nu)[n]^2 \\ -(a^2 - \frac{b^2}{k})(\pi^2 - r^\nu) r^n \end{array} \right\}$$

cuius indoles quo clarius perſpiciatur, ſtatuamus $v^\nu = \pi + \xi \surd k$, eritque $u^\nu = \pi - \xi \surd k$, vnde vtique erit $v^\nu + u^\nu = 2\pi$, at vero

$$v^\nu u^\nu = r^\nu = \pi^2 - k\xi^2, \text{ ita, vt ſit } \pi^2 - r^\nu = k\xi^2;$$

quo valore ſubſtituto fit

$$[n+\nu] = \pi[n] + \xi \surd (k[n]^2 - (ka^2 - b^2)r^n).$$

Coroll. 1.

§. 16. Hic ergo denuo proprietas ante obſeruata inuoluitur, quod nempe iſta formula

$$(k[n]^2 - (ka^2 - b^2) r^n)$$

ſemper debeat eſſe quadratum.

Coroll. 2.

§. 17. Ex terminis autem initialibus

A et B, ob $ka^2 - b^2 = \frac{-B^2 + 2AB.p - A^2 r}{q^2}$

vti ante inuenimus, habebimus

$$[n+\nu] = \pi[n] + \xi \surd (k[n]^2 + (\tfrac{B^2 - 2ABp + A^2 r}{q^2}) r^n).$$

Coroll.

Coroll. 3.

§. 18. Si capiamus $n = 0$, vt ſit $[n] = a$ aequatio noſtra ita ſe habebit

$$[\nu] = \pi a + \xi b;$$

quae eſt inſignis proprietas noſtrae formulae, quae autem ſponte ſe prodit ex eius indole; cum enim ſit

$$[\nu] = f v^\nu + g. u^\nu = f(\pi + \xi \sqrt{k}) + g.(\pi - \xi \sqrt{k});$$ erit

$$[\nu] = \pi(f + g) + \xi \sqrt{k}(f - g) = ,$$

quae formula ob $f + g = a$ et $f - g = \frac{b}{\sqrt{k}}$ reducitur ad $\pi a + \xi b$.

Problema Quintum.

§. 19. *Dato termino ſeriei quocunque* $[n]$ *ex ſequentibus inueſtigare eum, qui ab illo tantum diſtat, quantum ipſe ab initio, hoc eſt inuenire terminum* $[2n]$.

Solutio.

Cum ſit $[n] = f v^n + g. u^n$; quadratis ſumendis erit

$$[n]^2 - fg. r^n = f^2 v^{2n} + g^2. u^{2n}$$

tum vero eſt

$$[2n] = f v^{2n} + g. u^{2n};$$

haec primo in g ducta ab illa ſubtrahatur et remanet

$$[n]^2 - 2fg r^n - g[2n] = f(f - g) v^{2n}$$

deinde poſterior aequatio in f ducta et a priore ſubtracta relinquit

$$[n]^2 - 2fg r^n - f[2n] = g(g - f) u^{2n}$$

hae

hae iam duae aequationes in ſe ducantur et prodibit

$$[n]^4 - (f+g)[2n][n]^2 + fg[2n]^2 - 4fgr^n[n]^2$$
$$+ 2fgr^n(f+g)[2n] + 4f^2g^2.r^{2n} = -fg(f-g)^2r^{2n};$$

cum igitur ſit

$$f+g=a;\ fg=\tfrac{1}{4}(a^2-\tfrac{b^2}{k});\ f-g=\tfrac{b}{\sqrt{k}}$$

his valoribus ſubſtitutis aequatio hanc induet formam:

$$[n]^4 - a[2n][n]^2 + \tfrac{1}{4}(a^2-\tfrac{b^2}{k})[2n]^2$$
$$-(a^2-\tfrac{b^2}{k})r^n[n]^2 + \tfrac{1}{2}(a^2-\tfrac{b^2}{k})a.r^n[2n]$$
$$+\tfrac{1}{4}a^2(a^2-\tfrac{b^2}{k})r^{2n}=0$$

vnde eliciamus $[2n]$, ſubductoque calculo, tandem reperitur, breuitatis gratia loco $a^2-\frac{b^2}{k}$ ſcribendo c

$$[2n] = \tfrac{2a}{c}[n]^2 - ar^n + \tfrac{2b[n]}{ck}\sqrt{([n]^2k - ck.r^n)}$$

et ſubſtituto valore ipſius c

$$[2n] = \frac{2ak}{a^2k-b^2}[n]^2 - ar^n$$
$$-\frac{2b[n]}{a^2k-b^2}\sqrt{(k[n]^2-(a^2k-b^2)r^n)}.$$

Scholion.

§. 20. Quia haec ſolutio ad calculos non parum taedioſos eſt perducta, hoc negotium non modo multo facilius, ſed etiam generalius expediri poſſe obſeruaui. Quae methodus quo clarius percipiatur, ſequentia praemitto.

Hypotheſis.

§. 21. Quemadmodum formulae $fv^n+g.u^n$ charactere deſignauimus; ita iſtam formulam $fv^n-g.u^n$ illi

illi adfinem hoc caractere $[\acute{n}]$ indicemus; quae ergo quantitas ex illa naſcitur, ſi littera g negatiue capiatur.

Corollarium.

§. 22. Cum ſit

$$fv^n - g.u^n = \sqrt{([n]^2 - 4fg.r^n)}$$

erit nouus noſter caracter

$$[\acute{n}] = \sqrt{([n]^2 - 4fg.r^n)},$$

quae formula ita eſt irrationalis, vt per $\sqrt{k}$ multiplicata fiat rationalis; tum autem reſultat formula illa

$$\sqrt{(k[n]^2 - 4fg.kr^n)},$$

quam ante iam obſeruauimus ſemper eſſe rationalem, cui ergo aequatur caracter $[\acute{n}]\sqrt{k}$.

Lemma.

§. 23. Cum ergo ſit

$fv^n + g.u^n = [n]$ et $fv^n - g.u^n = [\acute{n}]$, erit

$$v^n = \frac{[n] + [\acute{n}]}{2f} \text{ et } u^n = \frac{[n] - [\acute{n}]}{2g},$$

atque hinc adipiſcimur

$$v^n + u^n = \frac{(f+g)[n] - (f-g)[\acute{n}]}{2fg}$$

quae eſt ea ipſa formula, quam ſupra, vbi loco n adhibuimus ν, per 2π indicauimus; tum erit

$$v^n - u^n = \frac{-(f-g)[n] + (f+g)[\acute{n}]}{2fg}$$

quae formula conuenit cum ea, quam caſu $n = \nu$ ſupra per $2 \xi \sqrt{k}$ denotauimus.

Problema Sextum.

§. 24. *Datis in ſerie noſtra duobus quibuscunque terminis* $[n]$ *et* $[\nu]$ *inuenire terminum* $[n+\nu]$ *ſimulque eius adfinem* $[\overset{\prime}{n+\nu}]$, *ſiquidem etiam datae erunt formulae* $[n']$ *et* $[\nu']$.

Solutio.

Cum ſit

$$[\nu] = f v^\nu + g.\, u^\nu \text{ et } [\nu'] = f v^\nu - g\, u^\nu$$

multiplicetur illa aequatio per $v^n + u^n$, haec vero per $v^n - u^n$, et obtinebimus binas ſequentes aequationes:

$$[\nu](v^n + u^n) = f v^{n+\nu} + g.\, u^\nu v^n + f v^\nu u^n + g\, u^{n+\nu}$$

$$[\nu'](v^n - u^n) = f v^{n+\nu} - g.\, u^\nu v^n - f v^\nu u^n + g.\, u^{n+\nu}$$

quae duae additae praebent

$$[\nu](v^n + u^n) + [\nu'](v^n - u^n) = 2(f v^{n+\nu} + g.\, u^{n+\nu}) = 2[n+\nu]$$

ſicque iam aſſecuti ſumus terminum quaeſitum $[n+\nu]$; cum autem per lemma praemiſſum ſit

$$v^n + u^n = \frac{(f+g)[n] - (f-g)[n']}{2fg}$$

et $$v^n - u^n = \frac{-(f-g)[n] + (f+g)[n']}{2fg};$$

per formulas mere cognitas conſequimur

$$[n+\nu] = \frac{(f+g)([n][\nu] + [n'][n']) - (f-g)([n'][\nu] + [n][\nu'])}{4fg}.$$

Quia

Quia igitur

$$f+g=a \text{ et } f-g=\frac{b}{\sqrt{k}}, \text{ et } 4fg=a^2-\frac{b^2}{k}=\frac{ka^2-b^2}{k},$$

erit his valoribus ſubſtituendis terminus quaeſitus

$$[n+\nu]=\frac{ak[n][\nu]-b([n][\nu']\sqrt{k}-b([\nu][n'])\sqrt{k}+ak[n'][\nu']}{ka^2-b^2}$$

quod ad formulam adfinem $[n+\nu']$ attinet, iam innuimus eam ex priore naſci, dummodo loco g ſcribatur $-g$, atque hinc orietur

$$[n+\nu']=\frac{-(f-g)([n][\nu]+[n'][\nu'])+(f+g)([n'][\nu]+[n'][\nu]}{4fg}$$

quae in $\sqrt{k}$ ducta et loco f et g valoribus ſubſtitutis dabit

$$[n+\nu']\sqrt{k}=\frac{-kb[n][\nu]+ak[n][\nu']\sqrt{k}+ak[\nu][n']\sqrt{k}-kb[n'][\nu']}{ka^2-b^2}.$$

Coroll. 1.

§. 25. Quo facilius hanc ſolutionem ad formam ſolitam reducere queamus; recordemur eſſe

$$[n']\sqrt{k}=\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}$$

$$[\nu']\sqrt{k}=\sqrt{(k[\nu]^2-(ka^2-b^2)r^\nu)}$$

et

$$[n+\nu']\sqrt{k}=\sqrt{(k[n+\nu]^2-(ka^2-b^2)r^{n+\nu})}.$$

Coroll. 2.

§. 26. Si hic ſumamus $\nu=n$, vt prodeat caſus praecedente problemate tractatus, ſtatim reperimus

$$[2n]=\frac{ak[n]^2-2b[n][n']\sqrt{k}+ak[n']^2}{ka^2-b^2}$$

 et

et formulis affinibus eliſis

$$[2n] = \frac{2ak[n]^2 - a(ka^2-b^2)r^n - 2b[n]\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}}{ka^2-b^2}$$

quae cum ante inuenta congruit.

Coroll. 3.

§. 27. Eodem caſu $\nu = n$ formula affinis colligitur:

$$[2\acute{n}]\sqrt{k} = \sqrt{(k[2n]^2-(ka^2-b^2)r^{2n})} =$$
$$-2kb[n]^2 + 2a[n]\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}$$
$$+b.(ka^2-b^2)r^n$$
$$= \frac{-2kb[n]^2 + b(ka^2-b^2)r^n + 2a[n]\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}}{ka^2-b^2}.$$

Coroll. 4.

§. 28. Ope harum formularum iam facile erit terminos ſeriei ab initio quantumuis remotos aſſignare, quandoquidem ex binis quibuscunque $[n]$ et $[\nu]$ reperitur ſtatim terminus $[n+\nu]$; interim tamen ex lege, quam ſupra iam dedimus, pro terminis $[n]$, $[n+\nu]$, $[n+2\nu]$; $[n+3\nu]$, $[n+4\nu]$ etc. haec ſeries multo facilius, quousque libuerit, continuari poteſt; ſi enim ponatur $v^\nu + u^\nu = 2\pi$; ita, vt ſit

$$2\pi = \frac{(f+g)[n] - (f-g)[\acute{n}]}{2fg}$$
$$= \frac{2ak[n] - 2b[\acute{n}]\sqrt{k}}{ka^2-b^2};$$

lex progreſſionis ita ſe habet

$$[n+2\nu] = 2\pi[n+\nu] - r^\nu[n]$$
$$[n+3\nu] = 2\pi[n+2\nu] - r^\nu[n+\nu)$$

etc. Proble-

Problema Septimum.

§. 29. *Si ſuerit*

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n$$

ſimilique modo

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\alpha + \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\alpha - \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n$$

inuenire aequationem inter x *et* y, *cui iſti valores rationales et integri ſatisfaciant, quicunque integer pro* n *accipiatur.*

Solutio.

Ponamus iterum breuitatis gratia

$$\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right) = f;\quad \tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right) = g$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\alpha + \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right) = \zeta;\quad \tfrac{1}{2}\left(\alpha - \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right) = \eta$$

porro $p + q\sqrt{k} = v$; $p - q\sqrt{k} = u$; $p^2 = kq^2 + r$ et nunc habebimus

$$x = fv^n + g.\, u^n$$
$$y = \zeta v^n + \eta.\, u^n$$

vnde eliminemus litteras v et u, ac primo quidem habebimus

$$\eta x - gy = (\eta f - \zeta g)\, v^n$$

et $$\zeta x - fy = (\zeta g - \eta f)\, u^n$$

quae duae formulae in ſe inuicem ductae ob $vu = r$ dabunt

$$\eta\zeta x^2 - (\zeta g + \eta f)xy + fgy^2 = -(\eta f - \zeta g)^2 r^n.$$

 Nunc

Nunc reſtituantur valores aſſumti ſcilicet

$$\zeta\eta = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \tfrac{\beta^2}{k});\quad fg = \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b^2}{k})$$

$$\zeta g + \eta f = \tfrac{1}{2}(a\alpha - \tfrac{b\beta}{k})$$

et

$$(\eta f - \zeta g)^2 = \tfrac{1}{4k}(a^2\beta^2 - 2ab\alpha\beta + \alpha^2 b^2)$$

atque noſtra aequatio quaeſita erit

$$\tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \tfrac{\beta^2}{k})x^2 - \tfrac{1}{2}(a\alpha - \tfrac{b\beta}{k})xy + \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \tfrac{b^2}{k})y^2$$
$$+ \tfrac{1}{4k}(a^2\beta^2 - 2ab\alpha\beta + \alpha^2 b^2)r^n = 0$$

ſiue per $4k$ multiplicando

$$(\alpha^2 k - \beta^2)x^2 - 2(a\alpha k - b\beta)xy + (a^2 k - b^2)y^2$$
$$+ (a\beta - \alpha b)^2 r^n = 0$$

quae tota eſt rationalis, eique ſatisfaciunt ipſi valores pro x et y aſſumti.

Corollarium.

§. 30. Comparetur haec aequatio inuenta cum forma generali

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dr^n = 0$$

atque ſatisfieri oportet ſequentibus conditionibus

1°. $(a\beta - \alpha b)^2 \frac{A}{D} = (k\alpha^2 - \beta^2)$

2°. $(a\beta - \alpha b)^2 \frac{B}{D} = (ka\alpha - b\beta)$

3°. $(a\beta - \alpha b)^2 \frac{C}{D} = (ka^2 - b^2)$

quarum prima per tertiam diuiſa ſtatim ſuppeditat

$$k = \frac{Ab^2 - C\beta^2}{Aa^2 - C\alpha^2}.$$

Coroll.

Coroll. 2.

§. 31. Subſtituatur hic valor tam in prima, quam in ſecunda aequatione ac peruenietur ad iſtas aequalitates

$$(a\beta - \alpha b)^2 \frac{A}{D} = \frac{A\alpha^2 b^2 - a^2\beta^2}{A a^2 - C\alpha^2}$$

$$(a\beta - \alpha b)^2 \frac{B}{D} = \frac{A a \alpha b^2 - C a \alpha \beta^2 - A a^2 b\beta + C\alpha^2 b\beta}{A a^2 - C\alpha^2}$$

quarum haec per illam diuiſa praebet

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{C\beta - Bb}{B\beta - Ab}.$$

Coroll. 3.

§. 32. Statuamus nunc $a = \gamma\alpha$, et $b = \delta\beta$ vt prodeat

$$\gamma = \frac{C - B\delta}{B - A\delta};$$

vnde ſequitur

$$\gamma - \delta = \frac{A\delta^2 - 2B\delta + C}{B - A\delta}$$

et $\gamma + \delta = \frac{C - A\delta^2}{B - A\delta}$;

prima aequatio transformatur in hanc:

$$\frac{\gamma - \delta}{D} = \frac{-\gamma - \gamma}{A\alpha^2\gamma^2 - C\alpha^2}$$

vnde fit

$$\alpha^2 = \frac{-D(\gamma + \delta)}{(A\gamma^2 - C)(\gamma - \delta)}.$$

Coroll. 4.

§. 33. Valorem autem ipſius γ ſubſtituendo reperitur

$$A\gamma^2 - C = \frac{-(B^2 - AC)(C - A\delta^2)}{(B - A\delta)^2}$$

hinc-

hincque colligitur

$$\alpha^2 = \frac{D.(B - A\delta)^2}{(B^2 - AC)(A\delta^2 - 2B\delta + C)}$$

ſicque omnibus conditionibus eſt ſatisfactum et nunc quaeſtio huc reducitur, vt quaeratur numerus δ talis, vt iſta forma reuera fiat quadratum, quod fit, ſi quadratum reddatur haec forma

$$D.(B^2 - AC)(A\delta^2 - 2B\delta + C).$$

Coroll. 5.

§. 34. Tali autem numero pro δ inuento habebitur numerus α, nec non γ; numerus autem β arbitrio noſtro permititur; hincque porro deducitur $a = \gamma\alpha$ et $b = \delta\beta$; tum vero prodit

$$k = \beta^2 \frac{A\delta^2 - C}{A\alpha^2 - C\gamma^2};\ \text{indeque}$$

$$\frac{\beta^2}{k} = \frac{A\alpha^2 - C\gamma^2}{A\delta^2 - C}$$

et $\frac{b^2}{k} = \frac{\delta^2\beta^2}{k} = \frac{A\alpha^2\delta^2 - C\gamma^2\delta^2}{A\delta^2 - C}$.

Quia ergo formulae $\frac{\beta}{\gamma k}$ et $\frac{b}{\gamma k}$ in calculo noſtro tantum occurrunt, nihil amplius arbitrarii reſtat.

Scholion.

§. 35. Hoc autem modo pro quouis valore exponentis n vnica tantum reperitur ſolutio, eos ſcilicet valores ipſarum x et y complectens, qui huic exponenti n reſpondent; verum quia numeri p et q adhuc arbitrio noſtro ſunt permiſſi, eos infinitis modis ita definire licet, vt fiat $p^2 - kq^2 = r$, quod quo facilius perſpiciatur, quaeruntur numeri s et t, vt ſit $s^2 - kt^2 = 1$ quibus inuentis vbique

loco

loco $(p + q\sqrt{k})^n$ ſcribatur $(p + q\sqrt{k})^n (s + t\sqrt{k})^\lambda$ et loco $(p - q\sqrt{k})^n$ ſcribatur

$$(p - q\sqrt{k})^n (s - t\sqrt{k})^\lambda,$$

vbi exponens λ pro quouis numero n infinitis modis variari poteſt, ſicque pro quouis exponente n infinitae ſolutiones noſtris formulis exhibebuntur.

Scholion. 2.

§. 36. Inprimis autem hic mirandum videtur, quod littera δ, qua vniuerſa ſolutio adſtruitur, neque a numero r neque ab exponente n pendeat, ſed ex ſolis litteris, A, B, C et D definiatur; interim tamen numerum r non omnino pro lubitu aſſumere licet, ita enim comparatus eſſe debet, vt fieri poſſit $p^2 - kq^2 = r$, id quod ab indole numeri k pendet. Supra autem inuenimus valorem $\frac{\beta^2}{k}$, vnde oritur

$$\frac{\beta}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{A\alpha^2 - C\alpha^2}{A\delta^2 - C}} = \alpha . \sqrt{\frac{A\gamma^2 - C}{A\delta^2 - C}}$$

$$= \frac{\alpha}{B - A\delta}\sqrt{(BB - AC)}$$

$$= \frac{\alpha}{B - A\delta}\sqrt{(B^2 - AC)} = \frac{\alpha(B^2 - AC)}{(B - A\delta)\sqrt{(B^2 - AC)}}$$

quae ſi capiatur $\beta = \frac{\alpha(B^2 - AC)}{B - A\delta}$

erit $\sqrt{k} = \sqrt{B^2 - AC}$,

ſicque per hunc numerum k determinatur indoles numerorum, quos pro r aſſumere licet.

DE RESOLVTIONE IRRATIONALIVM

PER FRACTIONES CONTINVAS, VBI SIMVL NOVA QVAEDAM ET SINGVLARIS SPECIES MINIMI EXPONITVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In ſuperiore diſſertatione de reſolutione aequationis $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, totum negotium praecipue ad hanc quaeſtionem erat deductum, vt pro litteris x et y valores in numeris integris inueſtigentur, quibus formulae $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ minimus valor inducatur. Tres autem hic potiſſimum conſiderandi ſunt caſus, prouti haec formula vel duos factores habet imaginarios, quod fit ſi $BB - AC$ fuerit numerus negatiuus, vel factores inter ſe aequales, quod fit ſi $BB - AC = 0$, vel denique ſi eius factores fuerint reales, quod fit ſi $BB - AC$ numerus poſitiuus. Primo autem caſu haec quaeſtio minimi nullam attentionem meretur, quoniam ſolutio nulla plane difficultate laborat. Secundus vero caſus multo minus negotium faceſſit, quum formula abeat in quadratum cuius radicem facillime minimam reddere licet. Solus ergo

ergo tertius caſus ſupereſt, qui accuratiorem inueſtigationem poſtulat, vnde quidem inſuper excludi conuenit caſus, quibus formula $BB - AC$ eſt numerus quadratus, et ambo factores adeo rationales euadunt, tum enim valor formulae propoſitae adeo ad nihilum redigi poterit, ita vt quaeſtio minimi hic ne locum quidem habeat.

2. Soli ergo nobis relinquuntur caſus, quibus numerus $BB - AC$ eſt numerus poſitiuus ſed non quadratus, cuiusmodi eſt iſta formula: $mxx - nyy$, denotantibus litteris m et n numeros integros poſitiuos, eiusmodi tamen vt non vterque ſit quadratus, tum enim euidens eſt iſtam formulam ad nihilum reduci non poſſe, niſi tam x quam y euaneſcat, quem caſum tamen vtpote obuium excludi oportet. Cum ergo haec formula $mxx - nyy$ ad nihilum redigi ſe non patiatur, quaeſtio ſine dubio notatu digna eſt cenſenda, qua litterarum x et y ii valores in integris quaeruntur, quibus ipſa formula $mx^2 - ny^2$ minimum omnium adipiſcatur valorem. Si alter numerorum m et n vnitati aequetur, ſemper formulam ad vnitatem vsque deprimere licebit, qui certe eſt minimus valor cyphra excepta. Si enim fuerit $m = 1$ ex Theoremate Pelliano notiſſimo conſtat, ſemper effici poſſe $xx - nyy = 1$, ſiue $x = \sqrt{(nyy + 1)}$, dummodo n non fuerit numerus quadratus, atque adeo hoc non ſolum vnico modo praeſtari poteſt, ſed etiam infinitis, quemadmodum iam ab ipſo Pellio eſt demonſtratum. Sin autem alter numerus n vnitati aequetur, formula

$m x x - y y$ hac methodo ad $- 1$ deprimitur, qui caſus aeque pro minimo eſt habendus ac $+ 1$, dum in ea inueſtigatione, quae ad hanc quaeſtionem anſam dedit, diſcrimen ſigni non ſpectatur.

3. His ergo caſibus remotis, quo alter numerus m vel n vnitati aequatur, quaeſtio noſtra potiſſimum verſatur circa formulam $m x x - n y y$, quippe ad quam ſemper formulam generalem $A x x - 2 B x y + C y^2$ reuocare licet. Si enim in genere ſtatuatur $x = t + B u$ et $y = A v$, facta ſubſtitutione formula generalis abit in hanc formam:

$$A t t - A (B^2 - A C) u u$$

ſicque formula noſtra aſſumta $m x x - n y y$ aeque late patere eſt cenſenda, atque ipſa propoſita trinomialis. Etiamſi autem neque m, neque n vnitati aequetur, ſaepenumero vſu venire poteſt, vt formulam noſtram quoque ad vnitatem vsque deprimere liceat, idque vel ſtatim manifeſto occurrit, veluti in hac forma: $3 x x - 2 y y$, quae ad vnitatem redigitur ſumtis $x = 1$ et $y = 1$, vel non ſtatim ſe offert, vti fit in $9 x x - 5 y y$ quae poſito $x = 3$ et $y = 4$ ad vnitatem redit, quicquid autem ſit, vtique euenire poteſt, vt minimus valor noſtrae formulae vnitatem excedat, ac tum iudicium de minimo plerumque ſummis difficultatibus inuolutum deprehenditur ceu fit in hac formula $13 x x - 7 y y$, quam vsque ad binarium deprimi poſſe non facile perſpicitur, ſi ſcilicet ponatur $x = 15$ et $y = 11$. At ſi m et n fuerint numeri praegrandes, iudicium multo

multo operoſiores calculos requirit, quamobrem methodus certa etiam in his caſibus minimum inueſtigandi analyſin haud contemnendo incremento locupletare videtur.

4. Antequam autem hanc ipſam methodum explicare adgrediar; plurimum oſtendiſſe iuuabit, ſemper infinitis modis idem minimum obtineri poſſe. Atque hoc adeo generalius ita demonſtrari poteſt: Quodſi vnicus caſus conſtet, quo formula $mxx-nyy$ aequalis fiat dato numero k, tum ſemper infiniti valores pro x et y reperiri poſſunt, qui ad eundem numerum k deducant. Sit enim caſu illo cognito $x=a$ et $y=b$, ita vt ſit $maa-nbb=k$ et nunc numeros x et y ita definiri oportet, vt fiat $mxx-nyy=maa-nbb$, id quod ſequenti modo commodiſſime praeſtabitur. Ante omnia quaerantur numeri p et q, vt fiat $pp-mnqq=1$, id quod infinitis modis ſemper fieri poſſe conſtat, dummodo mn non fuerit numerus quadratus, vti hic aſſumimus, atque nunc quaeſito ſatisfieri manifeſtum eſt, ſi ſtatuatur

$$mxx-nyy=(maa-nbb)(pp-mnqq)^\lambda,$$

quod quo facilius fieri poſſit, ſumamus factores etſi irrationales et ponamus

$$x\sqrt{m}+y\sqrt{n}=(a\sqrt{m}+b\sqrt{n})(p+q\sqrt{mn})^\lambda$$

tum enim mutato ſigno radicalis $\sqrt{n}$, ſponte fiet

$$x\sqrt{m}-y\sqrt{n}=(a\sqrt{m}-b\sqrt{n})(p-q\sqrt{mn})^\lambda,$$

ſicque alteri tantum harum duarum aequationum ſa-

tisfeciſſe ſufficiet. Quia autem euolutio formulae $(p + q \sqrt{mn})^{\lambda}$ alternatim terminos rationales et irrationales radicali $\sqrt{mn}$ affectos praebet, ſit P ſumma terminorum rationalium et $Q \sqrt{mn}$ ſumma irrationalium, ita vt ſit

$$(p + q \sqrt{mn})^{\lambda} = P + Q \sqrt{mn}$$

ſimilique modo

$$(p - q \sqrt{mn})^{\lambda} = P - Q \sqrt{mn}.$$

Nunc igitur aequatio noſtra erit

$$x \sqrt{m} + y \sqrt{n} = (a \sqrt{m} + b \sqrt{n})(P + Q \sqrt{mn}) \text{ ſiue}$$

$$x \sqrt{m} + y \sqrt{n} = (aP + nbQ) \sqrt{m} + (bP + maQ) \sqrt{n}$$

vbi tam partes ſigno $\sqrt{n}$, quam partes ſigno $\sqrt{m}$ affectae, ſeorſim ſunt inter ſe aequandae, atque hinc ſtatim elicimus ſequentes valores

$$x = aP + nbQ; \quad y = bP + maQ,$$

ſimulque patet multitudinem harum ſolutionum revera eſſe infinitam.

5. His praemiſſis ipſam noſtram quaeſtionem adgrediamur, quaeſituri valores litterarum x et y, quibus formula $mxx - nyy$ minimum ſortiatur valorem, qui ſit $= k$, ac ſtatim quidem euidens eſt his caſibus formulam $mxx - nyy$ propius ad nihilum redigi, quam vllis aliis caſibus, ſicque pro x et y eiusmodi inueſtigandi ſunt valores, quibus proxime fiat $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt{mn}}{m}$, quocirca negotium iam huc eſt perductum, vt quaerantur fractiones rationales $\frac{x}{y}$, quae tam prope aequentur formae irrationali

nali $\frac{\sqrt{mn}}{m}$, quam quidem fieri poteſt, non maioribus numeris pro x et y adhibendis.

6. Hoc autem Problema iam olim a Walliſio propoſitum expeditiſſime reſoluitur, ſi formula $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ in fractionem continuam conuertatur, ſimili ſcilicet operatione, qua vulgo maximus communis diuiſor duorum numerorum quaeri ſolet. Si enim hoc modo peruentum fuerit ad hanc fractionem continuam:

$$\frac{\sqrt{mn}}{m} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{etc.}}}}}$$

continui hi quoti in ſeriem diſponantur, ac primo quidem ipſi α ſubſcribatur fractio $\frac{1}{0}$, ipſi β vero $\frac{\alpha}{1}$, ac deinceps ex binis fractionibus continuo ſequens formatur, dum vltimae tam nominator quam denominator per indicem ſupra ſcriptum multiplicetur hisque productis, tam numerator quam denominator penultimae fractionis reſpectiue addantur. Sequenti ſcilicet modo

$$\begin{array}{ccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \\ \frac{1}{0}, & \frac{\alpha}{1}, & \frac{\alpha\beta+1}{\beta}, & \frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}, & \frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta} \text{ etc.} \end{array}$$

7. Omnes iſtae fractiones hac gaudent proprietate, vt quaelibet valorem formulae $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ propius exhauriat, quam fieri poterit numeris non maioribus adhibendis. Verum etiam inter has ipſas fra-

ctiones

ctiones ingens intercedit diſcrimen, quod aliae aliis, caeteris quidem paribus magis appropinquent. Eae autem maxime adpropinquare ſunt compertae, quae maximos indices ſibi habent inſcriptos, ſi ergo illae pro $\frac{x}{y}$ accipiantur, iam certi ſumus iſtis numeris pro x et y aſſumtis, formulae noſtrae $mxx - nyy$ minimum valorem induci. Simul vero notari oportet inter hos quotos ſucceſſiuos α, β, γ, δ, ε etc. ſemper dari periodos, in quibus idem quotorum ordo recurrit, omnes ergo fractiones iisdem maxime quotis ſuſcriptae omnes quoque valores idoneos pro x et y ſuppeditabunt, quibus formula noſtra $mxx - nyy$ eundem minimum valorem nanciſcitur.

8. Quo autem operationes quibus iſti quoti facillime eruuntur, clarius explicare valeam, exemplum primo determinatum expediamus, quo formula propoſita ſit $7xx - 13yy$, ita vt iam proxime fieri debeat $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{91}}{7}$, vbi tantum notetur eſſe $\sqrt{91} > 9$ et < 10. Nunc ergo operatio vti pro maximo diviſore inſtituatur: ac primo diuidi oportet $\frac{\sqrt{91}}{7}$ per 7, vnde primus quotus prodit $= 1$, reſiduum vero $= \sqrt{91} - 7$ per quod praecedens diuiſor 7 debet diuidi, multiplicetur vterque numerus per $\sqrt{91} + 7$, ac diuiſor iam erit 42, diuidendus autem $7(\sqrt{91} + 7)$, qui per ſeptenarium depreſſi, praebent diuiſorem $= 6$ et diuidendum $= \sqrt{91} + 7 > 16$, vnde ſecundus quotus colligitur 2, ac reſiduum fiet $\sqrt{91} - 5$, per quod 6 debet diuidi. Multiplicando per $\sqrt{91} + 5$, diuiſor erit 66 et diuidendus $6(\sqrt{91} + 5)$, ac per 6 depri-

deprimendo, iam per 11 diuidi debet $\sqrt{91}+5$, vnde tertius quotus ſit 1, reſiduo manente $\sqrt{91}-6$, per quod praecedens diuiſor 11 debet diuidi. Quae operatio vlterius hic repraeſentatur

multipl. per	diuid. per	Quot.
$\frac{11}{\sqrt{91}-6}$ $\sqrt{91}+6$ fit	$\frac{11(\sqrt{91}+6)}{55}$ 11	$\frac{\sqrt{91}+6}{5}$ 3 N. 4
$\frac{5}{\sqrt{91}-9}$ $\sqrt{91}+9$	$\frac{5(\sqrt{91}+9)}{10}$ 5	$\frac{\sqrt{91}+9}{2}$ 9 N. 5
$\frac{2}{\sqrt{91}-9}$ $\sqrt{91}+9$	$\frac{2(\sqrt{91}+9)}{10}$ 2	$\frac{\sqrt{91}+9}{5}$ 3 N. 6
$\frac{5}{\sqrt{91}-6}$ $\sqrt{91}+6$	$\frac{5(\sqrt{91}+6)}{55}$ 5	$\frac{\sqrt{91}+6}{11}$ 1 N. 7
$\frac{11}{\sqrt{91}-5}$ $\sqrt{91}+5$	$\frac{11(\sqrt{91}+5)}{66}$ 11	$\frac{\sqrt{91}+5}{6}$ 2 N. 8
$\frac{6}{\sqrt{91}-7}$ $\sqrt{91}+7$	$\frac{6(\sqrt{91}+7)}{42}$ 6	$\frac{\sqrt{91}+7}{7}$ 2 N. 9
$\frac{7}{\sqrt{91}-7}$ $\sqrt{91}+7$	$\frac{7(\sqrt{91}+7)}{42}$ 7	$\frac{\sqrt{91}+7}{6}$ 2 N. 10

Vlterius calculum producere non eſt opus, quia haec poſtrema diuiſio cum ſecunda conuenit et iam periodus ſecunda incipit, vbi notandum loco primi quoti 1 hic eius duplum occurrere, id quod in huiusmodi diuiſionibus ſemper vſu venit.

9. Quoti ergo ordine inuenti ſequenti modo progrediuntur:

1, 2, 1, 3, 9, 3, 1, 2 | 2, 2, 1, 3, 9, 3, 1, 2

inter quos maxime eminent 9 ideoque nullum amplius eſt dubium, quin illae fractiones, quae his quotis ſubiiciuntur, formulae $7xx-13yy$ omnium valorum minimum concilient. Adponamus igitur has fractiones ſequenti modo

1.	2.	1.	3.	9
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{11}$

 vnde

vnde patet fractionem nobis ſatisfacientem fore $\frac{x}{y}=\frac{15}{11}$ ſiue $x=15$ et $y=11$. Hinc autem $7xx=1575$ et $13xx=1573$, vnde minimus valor ſine vllo dubio eſt binarius, quem diuinando non tam facile quisquam detexerit.

10. Si has operationes, quibus illi quoti continui reperiuntur, attentius perpendamus, calculum non mediocriter contrahi poſſe facile perſpicere licet. Sit enim $\sqrt{k}$ quantitas illa irrationalis, quam formula in fractionem continuam conuertenda inuoluit, numerus autem integer proxime minor, quam $\sqrt{k}$, ſit $=e$ et ponamus peruentum iam eſſe ad diuiſionem, qua formula $\sqrt{k}+r$ diuidi debet per numerum p, ita vt quotus hinc oriundus ſit $q<\frac{e+r}{p}$ eritque reſiduum $=\sqrt{k}+r-pq$ et quia $pq>r$ (ſaltem quando operationes iam ordine progrediuntur), vocemus $pq-r=r'$ ita vt iam reſiduum ſit $\sqrt{k}-r'$, vnde pro ſequente diuiſione habebimus diuiſorem $=\sqrt{k}-r'$ et diuidendum $=p$, multiplicetur vterque per $\sqrt{k}+r'$ et fiat $\frac{k-r'r'}{p}=p'$ (vidimus enim ſemper in decurſu operationum, formulam $k-r'r'$ diuiſibilem fore per p) et iam ſequens diuiſio ita erit comparata, vt ſit diuiſor $=p'$ et diuidendus $\sqrt{k}+r'$, vnde naſcetur quotus $q'<\frac{e+r'}{p'}$ atque hinc ſimili modo tertia et ſequentes diuiſiones conficientur.

11. Ex prima igitur illa operatione, qua formulam $\sqrt{k}+r$ diuidi oportet per numerum p, notentur tantum numeri r et p, vnde deducitur

quotus

quotus $q < \frac{e+r}{p}$; deinde ſumatur $r' = pq - r$ et $p' = \frac{k - r'r'}{p}$, hincque fiet $q' < \frac{e+r'}{p'}$; ſimili modo capiatur porro $r'' = p'q' - r'$ et $p'' = \frac{k - r''r''}{p'}$, hincque $q'' < \frac{e+r''}{p''}$. Quas operationes ſequente ſchemate repraeſentamus:

r	p	$q < \frac{e+r}{p}$
$r' = pq - r$	$p' = \frac{k - r'r'}{p}$	$q' < \frac{e+r'}{p'}$
$r'' = p'q' - r'$	$p'' = \frac{k - r''r''}{p'}$	$q'' < \frac{e+r''}{p''}$
$r''' = p''q'' - r''$	$p''' = \frac{k - r'''r'''}{p''}$	$q''' < \frac{e+r'''}{p'''}$
etc.	etc.	etc.

Hocque modo progreſſio quotorum q, q', q'', q''' etc. facillime inueniri poſſe videtur.

12. Dilucidemus hanc regulam exemplo, quo formula $5xx - 38yy$ minimum ſit reddenda, ſeu fractio $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{190}}{5}$ per fractionem infinitam euoluenda. Hic igitur erit $k = 190$, $e = 13$, $p = 5$ et $r = 0$, vnde totus calculus ſequenti modo inſtituetur:

$r = 0$	$p = 5$	$q = 2 < \frac{13+0}{5}$
$r' = 10$	$p' = \frac{190-100}{5} = 18$	$q' = 1 < \frac{13+10}{18}$
$r'' = 8$	$p'' = \frac{190-64}{18} = 7$	$q'' = 3 < \frac{13+8}{7}$
$r''' = 13$	$p''' = \frac{190-169}{7} = 3$	$q''' = 8 < \frac{13+13}{3}$
$r'''' = 11$	$p'''' = \frac{190-121}{3} = 23$	$q'''' = 1 < \frac{13+11}{23}$
$r''''' = 12$	$p''''' = \frac{190-144}{23} = 2$	$q''''' = 12 < \frac{13+12}{2}$
$r^{\cdots\cdots} = 12$	$p^{\cdots\cdots} = \frac{190-144}{2} = 23$	$q^{\cdots\cdots} = 1 < \frac{13+12}{23}$
$r^{\cdots\cdots} = 11$	$p^{\cdots\cdots} = \frac{190-121}{23} = 3$	$q^{\cdots\cdots} = 8 < \frac{13+11}{3}$
$r^{\cdots\cdots} = 13$	$p^{\cdots\cdots} = \frac{190-169}{3} = 7$	$q^{\cdots\cdots} = 3 < \frac{13+13}{7}$
$r^{\cdots\cdots} = 8$	$p^{\cdots\cdots} = \frac{190-64}{7} = 18$	$q^{\cdots\cdots} = 1 < \frac{13+8}{18}$
$r = 10$	$p^{\cdots\cdots} = \frac{190-100}{18} = 5$	$q^{\cdots\cdots} = 4 < \frac{13+10}{5}$
etc.	etc.	etc.

Calculum vlterius proſequi non eſt opus, quum iam pateſcat quotorum ordo

2, 1, 3, 8, 1, 12, 1, 8, 3, 1 | 4, 1, 3, 8, 1, 12, 1, 8

vnde fractio continua oritur

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{38}{5}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8.}}}}}}}$$

Tum vero quum maximus horum quotorum ſit 12, ei reſpondebit valor minimus formulae propoſitae $5xx - 38yy$, at fractio $\frac{x}{y}$ ita definietur 2, 1,

2, 1, 3, 8, 1, 12

$\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{91}{33}$, $\frac{102}{37}$

ſicque pro caſu minimi habemus $x = 102$ et $y = 37$, vnde $5xx = 52010$ et $38.yy = 52022$, ergo differentia $= -2$, quia autem inter quotos etiam eminet 8, eique ſubiacet fractio $\frac{11}{4}$, ſumendo $x = 11$ et $y = 4$, colligitur valor formulae $5xx - 38.yy = 605 - 608 = -3$, qui valor poſt illum ſine dubio eſt minimus.

13. Plura huius generis exempla non afferimus, ſed quo haec methodus ſuccincta ad vſum ampliorem accommodetur, inueſtigemus fractiones continuas pro ſingulis multiplis ipſius $\sqrt{2}$, plurimum enim iuuabit, relationem inter hos valores perpendiſſe, ſiquidem hoc argumentum de fractionibus continuis neutiquam adhuc ſatis eſt exploratum. Quotos autem tantum pro ſingulis his multiplis adpoſuiſſe ſufficiet:

Pro $\sqrt{2}$

Quoti 1, 2, 1, 2, 1, 2

Pro $2\sqrt{2}$

Quoti 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4

Pro $3\sqrt{2}$

Quoti 4, 4, 8, 4, 8, 4, 8

Pro $4\sqrt{2}$

Quoti 5, 1, 1, 1, 10, 1, 1

Pro $5\sqrt{2}$

Quoti 7, 14, 14, 14, 14, 14, 14

Pro $6\sqrt{2}$

Quoti 8, 2, 16, 2, 16, 2, 16

Pro $7\sqrt{2}$

Quoti 9, 1, 8, 1, 18, 1, 8.

14. Hae progreſſiones eo magis ſunt notatu dignae, quod tantopere a ſe inuicem diſcrepant, etiamſi ipſae quantitates iis expreſſae tam ſimplicem rationem inter ſe teneant. Neque vero tantum multipla tantam gignunt differentiam in fractionibus continuis, ſed etiam ipſa additio adhuc maius diſcrimen parit, ſi ſcilicet ad $\sqrt{2}$ quaepiam fractio rationalis addatur, id quod exemplo formulae $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ illuſtremus, vbi adeo vſu venit, vt primae operationes peculiarem euolutionem requirant, dum quotos a ſequentibus periodis diuerſos praebent. Ponatur ergo $\frac{x}{y}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{8}}{2}$. Primo igitur per 2 diuidatur $1+\sqrt{8}$ et quotus erit 1; reſiduum vero $\sqrt{8}-1$ per quod diuidi debet 2, multiplicetur vtrinque per $\sqrt{8}+1$, vt per 7 diuidi debeat $2\sqrt{8}+2=\sqrt{32}+2$, et nunc operatio in ordinem ſubit, hic ſcilicet eſt $k=32$; $e=5$; $r=2$ et $p=7$ et operationes ita ſe habebunt:

$r=2$	$p=7$	$q=1$
$r=5$	$p=1$	$q=10$
$r=5$	$p=7$	$q=1$
$r=2$	$p=4$	$q=1$
$r=2$	$p=7$	$q=1$
$r=5$	$p=1$	$q=10$
$r=5$	$p=7$	$q=1$
$r=$ etc.	etc.	etc.

Quum

Quum igitur primus quotus fuerit 1 a prioribus prorſus ſeparandus, ſeries quotorum erit:

$$1 \mid 1,\ 10,\ 1,\ 1,\ 1,\ 10,\ 1 \mid 1,\ 10$$

quae ſeries eo maiorem attentionem meretur, quod a praecedentibus toto coelo diſcrepat.

15. Sumamus aliud exemplum $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} + \sqrt{2} = \frac{1 + \sqrt{18}}{3}$, vnde reſultat primus quotus $= 1$ et reſiduum eſt $\sqrt{18} - 2$ per quod diuidi oportet 3, ſiue multiplicando per $\sqrt{18} + 2$, diuiſor fit 14 diuidendus autem $3\sqrt{18} + 6 = \sqrt{162} + 6$, cuius euolutio ſequenti modo repraeſentatur:

$$k = 162;\ e = 12;$$

$r = 6$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 12$	$p = 1$	$q = 24$
$r = 12$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 8$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 12$	$p = 2$	$q = 12$
$r = 12$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 12$	$p = 1$	$q = 24$
$r = 12$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 8$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 12$	$p = 2$	$q = 12$

etc.

Series

Series igitur quotorum eſt

$1 \mid 1, 2, 1, 24, 1, 2, 1, 2, 12, 2 \mid 1, 2, 1, 24, 1, 2$

vbi excluſo primo, reliqui ſecundum denos periodum conſtituunt.

16. Quum hic ſit $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{18}}{3}$, habebimus $3x - y = y\sqrt{18}$ reddamus hanc aequationem rationalem et prodibit

$xx - 6xy = 17yy$; ſiue $9xx - 6xy - 17yy = 0$.

Hinc ergo diſcimus, ſi propoſita fuerit haec formula trinomialis $9xx - 6xy - 17yy$, cuiusmodi valores litteris x et y tribui debeant, vt haec formula minimum nanciſcatur valorem. Scilicet quotis modo inuentis ſubſcribantur fractiones more ſolito, atque ea, cui maximus quotus eſt inſcriptus, dabit valores ipſarum x et y, quocirca has fractiones hic ſubiiciamus:

1,	1,	2,	1,	24
$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{2}{1}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{7}{4}$.

Pro caſu ergo minimi habemus $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$, ſiue $x = 7$ et $y = 4$ vnde fit

$9xx = 441$; $6xy = 168$; $17yy = 272$

ergo ipſa formula abit in $+1$, qui valor vtique eſt omnium minimus.

17. Quod ſi autem hanc formulam modo ſupra expoſito tractare et ad duos terminos redigere vellemus, ob $A = 9$ $B = -3$; $C = -17$, ponendo $x = t + 3u$ et $y = 9u$, prodiret haec formula $9tt - 1458uu = 9(tt - 162uu)$, quae formula certe nunquam

quam minor euadere poteſt quam nouem, ex quo intelligimus, ſi huiusmodi formularum valores minimos inueſtigare voluerimus, neutiquam licere eas ad duos terminos reducere, quandoquidem hoc modo earum natura penitus mutaretur, quocirca neceſſe eſt, tales formulas, data opera euoluere, id quod in ſequentibus problematibus ſumus expedituri.

Problema I.

Si formula $A x^2 - 2 B x y + C y^2$, caſu quo $x = a$ et $y = b$ praebeat valorem $= c$, inuenire infinitos alios valores pro x et y, qui eundem valorem c producant, ſiquidem quantitas $B^2 - A C$ fuerit numerus poſitiuus non quadratus.

Solutio.

18. Quum igitur ſit

$$A a^2 - 2 B a b + B b^2 = c,$$

requiritur, vt fiat

$$A x^2 - 2 B x y + C y^2 = A a^2 - 2 B a b + C b^2.$$

Iam quaerantur ante omnia numeri p et q, vt fiat

$$p p - 2 B p q + A C q q = 1,$$

id quod ſemper fieri licet, quum hinc ſit

$$p = B q + \sqrt{((B^2 - A C) q q + 1)}$$

cuius reſolutio a Problemate Pelliano pendet, dummodo $B^2 - A C$ fuerit numerus poſitiuus non quadratus. Statuamus ergo $B^2 - A C = k$, vt fieri debeat

$$p = B q + \sqrt{(k q^2 + 1)},$$

 ita

ita vt quaeri oporteat numerum q, vt formula kq^2+1 fiat quadratum. Hoc ergo facto ſtatuamus:

$$Ax^2-2Bxy+Cy^2=(Aa^2-2Bab+Cbb)(pp-2Bpq+ACqq)$$

quod productum cum ipſa forma propoſita conuenire, ita per factores irrationales oſtendimus. Quum enim ſit

$$Ax^2-2Bxy+Cy^2=\frac{1}{A}(Ax-By+y\sqrt{k})(Ax-By-y\sqrt{k})$$

et $$Aa^2-2Bab+Cy^2=\frac{1}{A}(Aa-Bb+b\sqrt{k})(Aa-Bb-b\sqrt{k})$$

et

$$pp-2Bpq+ACq^2=(p-Bq+q\sqrt{k})(p-Bq-q\sqrt{k})$$

ſtatuamus

$$Ax-By+y\sqrt{k}=(Aa-Bb+b\sqrt{k})(p-Bq+q\sqrt{k})$$

tum enim ſponte fiet ſumendo $\sqrt{k}$ negatiue

$$Ax-By-y\sqrt{k}=(Aa-Bb-b\sqrt{k})(p-Bq-q\sqrt{k})$$

vnde ſufficiet alteram aequationem tantum euoluiſſe, ſi modo partes rationales et irrationales ſeorſim inter ſe aequentur. Prodibit igitur

$$Ax-By=(Aa-Bb)(p-Bq)+bq(B^2-AC)$$
$$y=q(Aa-Bb)+b(p-Bq)$$

qui valor in priori aequatione ſubſtitutus praebet

$$Ax=By+(Aa-Bb)(p-Bq)+kbq$$

hincque $x=ap-Cbq$, ita vt valores quaeſiti ſint

$$x=ap-Cbq;\ y=bp+Aaq-2Bbq,$$

atque hinc adhuc alia ſolutio formari poteſt, quoniam permutatis litteris A et C tam litterae x et y, quam

quam a et b inter ſe permutantur, litterae vero p et q eaedem manent, ſcilicet

$$x = ap + Cbq - 2Baq;\ y = bp - Aaq.$$

Inuenta autem vnica ſolutione, valores pro x et y reperti ſcribentur in locum litterarum a, et b, ſicque denuo noua ſolutio eruitur atque hinc ſimili modo infinitas alias ſucceſſiue elicere licebit.

Coroll. 1.

19. Quin etiam adhuc alias ſolutiones impetrare licet, ſi alii factores inter ſe combinentur, veluti ſi ponamus

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq + q\sqrt{k})$$

hinc orientur iſtae aequationes

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq$$
$$y = q(Aa - Bb) - b(p - Bq) = Aaq - bp$$

hincque $Ax = Aap - 2Bbp + ACbq$

ſeu $\quad x = ap + Cbq - \frac{2B}{A}bp,$

quae autem ſolutio non eſt integra, niſi $2Bbp$ per A ſit diuiſibile. Permutatio autem porro hanc ſuppeditat ſolutionem:

$$x = Cbq - ap;\ y = bp + Aaq - \frac{2B}{C}ap.$$

Coroll. 2.

20. Vtemur nunc etiam hac combinatione

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb + b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k})$$

hincque obtinebimus

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq$$
$$y = -(Aa - Bb)q + b(p - Bq) = bp - Aaq$$
$$x = ap - 2Baq + Cbq.$$

Quae ſolutio iam permutatione in problematis ſolutione eſt eruta.

Coroll. 3.

21. Eodem modo ſi hos factores adhibeamus

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k})$$

easdem ſolutiones reperimus, quas in primo Corollario iam inuenimus, permutatione ſcilicet adhibita.

Coroll. 4.

22. Verum adeo infinitas ſolutiones ſimul exhibere poterimus, ſi loco factorum $p - Bq \pm q\sqrt{k}$, eorum poteſtates quascunque vſurpamus, quarum quidem exponentes ſunt numeri integri. Si enim euoluta formula $(p - Bq + q\sqrt{k})^n$, terminos irrationales ponamus $= Q\sqrt{k}$, rationales vero $P - BQ$, ita vt iam P et Q infinitos valores in ſe inuoluant, omnes praecedentes ſolutiones generales reddentur, ſi modo litterarum p et q loco, ſcribantur litterae P et Q.

Problema II.

Propoſita formula $Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$, in qua $BB - AC$ ſit numerus poſitiuus non quadratus, inuenire eos valores pro litteris x et y, quibus ipſa formula ad minimum valorem perducatur.

Solutio.

Solutio.

23. Hoc problema ſimili modo ſoluetur, quo ſupra formulam binomialem tractauimus, ſcilicet ipſa noſtra formula aequetur nihilo ex eiusque reſolutione quaeratur fractio $\frac{x}{y}$, quae poſito vt ante $B^2 - AC = k$, reperitur $\frac{x}{y} = \frac{B \pm \sqrt{k}}{A}$ quocirca iſtam formulam irrationalem in fractionem continuam reſolui oportet, quaerendo ſcilicet ſeriem quotorum continuorum, quibus ſi more ſolito fractiones ſubſcribantur, eae quae maximis quotis reſpondent, loco $\frac{x}{y}$ ſumtae, formulae propoſitae minimum valorem inducent et quia hic $\sqrt{k}$ tam negatiue, quam poſitiue accipere licet, geminas ſolutiones aſſignare licebit, quae quidem plerumque inter ſe conuenient. Id quod clariſſime exemplis oſtendetur.

Exemplum.

24. Sit propoſita iſta formula $5xx - 6xy - 7yy$, vnde fit $\frac{x}{y} = \frac{3 \pm \sqrt{44}}{5}$. Valeat primo ſignum ſuperius et formula $\frac{3 + \sqrt{44}}{5}$ dabit primum quotum $= 1$, ex quo oritur reſiduum $\sqrt{44} - 2$, per quod diuidi oportet 5. Multiplicetur vtrinque per $\sqrt{44} + 2$ vt prodeat diuiſor 40 et diuidendus $5(\sqrt{44} + 2)$, qui deprimuntur ad 8 et $\sqrt{44} + 2$ nunc iam regula ſupra data vti poterimus, vti hic videre licet

$k = 44; \quad e = 6$

$r = 2$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 1$	$q = 12$
$r = 6$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 5$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 4$	$p = 4$	$q = 2$
$r = 4$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 5$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 1$	$q = 12$

qui quoti cum ante inuento hanc ſeriem conſtituunt

1, 1, 12, 1, 1, 1, 2, 1 | 1, 1, 12 etc.

vnde fractiones quotis 12 ſubſcriptae quaeſito ſatisfacient, quarum prima eſt $\frac{2}{1}$ ita vt ſit $x = 2$ et $y = 1$ vnde formula propoſita acquirit valorem $+ 1$.

At ſi ſumamus

$$\frac{x}{y} = \frac{3 - \sqrt{44}}{5}, \text{ ſiue } \frac{-y}{x} = \frac{5}{\sqrt{44} - 3} = \frac{5(\sqrt{44} + 3)}{35} = \frac{\sqrt{44} + 3}{7}$$

vnde poſito vt ante $k = 44$ et $e = 6$, habemus

$r = 3$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 4$	$p = 4$	$q = 2$

atque hic ſubſiſtimus, quia eaedem diuiſiones iam ſupra occurrerunt et nunc ſeries quotorum erit

1, 2, 1, 1, 1, 12, 1, 1 | 1, 2, 1 etc.

prima autem fractio quoto 12 reſpondens hic fit $\frac{11}{8}$, ſumatur ergo $x = 8$ et $y = -11$, atque noſtrae formulae valor euadit $+ 1$.

Exem-

Exemplum II.

25. Propoſita formula $7xx - 20xy + 14y^2$ minimum reddenda, cuius valor caſu $x = 1$ et $y = 1$ ſtatim fit $+1$ certe minimum. Hic ergo fractio $\frac{x}{y}$ proxime debet eſſe aequalis formulae $\frac{10 + \sqrt{2}}{7}$, vnde ſtatim primus quotus oritur $= 1$ et reſiduum erit $3 + \sqrt{2}$ vnde pro ſecundo quoto habemus $\frac{7}{3 + \sqrt{2}} = \frac{7(3 - \sqrt{2})}{7} = \frac{3 - \sqrt{2}}{1}$ ſicque quotus $= 1$, et reſiduum $= 2 - \sqrt{2}$. Pro tertio quoto habemus $\frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, ſicque quotus $= 1$, et reſiduum $\sqrt{2}$ quare pro quarto habemus $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, vnde ſequentes quoti ſunt vti ſupra inuenimus 1, 2, 2, 2 etc., integra ergo ſeries quorum erit

1, 1, 1 | 1, 2, 2, 2, 2.

Quamquam hae operationes initio irregulares videntur, eas tamen ſecundum regulam praeſcriptam euoluere licet, hic enim eſt ſtatim $k = 2$ $e = 1$, $r = 10$ et $p = 7$, vnde calculus ita procedet:

$r = +10$	$p = +7$	$q = 1$
$r = -3$	$p = -1$	$q = 1$
$r = +2$	$p = +2$	$q = 1$
$r = +0$	$p = +1$	$q = 1$
$r = +1$	$p = +1$	$q = 2$
$r = +1$	$p = 1$	$q = 2$

hincque ſuperior ſeries quotorum oritur, vnde valores fractionis $\frac{x}{y}$ ſequenti modo procedent:

1, 1,

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 1. & 1. & 1. & 2. & 2. & 2. & 2 \\ \frac{1}{0}. & \frac{1}{1}. & \frac{2}{1}. & \frac{3}{2}. & \frac{5}{3}. & \frac{13}{8}. & \frac{31}{19}. & \frac{75}{46} \end{array}$$

quarum ſecunda ſtatim dat caſum minimi ante memoratum. Tertia dat $+2$, quarta -1, quinta dat $+1$, ſexta -1 etc. Iidem valores ſine dubio prodire debent, ſi in fractione pro $\frac{x}{y}$ capiatur $\sqrt{2}$ negatiue, vt habeatur $\frac{10-\sqrt{2}}{7}$, quam etiam per regulam noſtram euoluere licebit, dummodo ita repraeſentetur: $\frac{\sqrt{2}-10}{-7}$, ita vt ſit $r=-10$ et $p=-7$, vnde calculus erit

$$k=2,\; e=1$$

$$\begin{array}{l|l|l} r=-10 & p=-7 & q=+1 \\ r=+\;3 & p=+1 & q=+4 \\ r=+\;1 & p=+1 & q=\;\;2 \\ r=+\;1 & p=+1 & q=\;\;2. \end{array}$$

Ex quibus quotis ſequentes fractiones formantur

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{5}{4} & \frac{11}{9} & \frac{27}{22} \end{array} \text{ etc.}$$

quarum ſecunda formulam reducit ad $+1$, tertia ad -1, quarta ad $+1$ etc. Notatu dignum hic occurrit, quod hae fractiones a praecedentibus tantopore diſcrepent, atque nihilo ſecius eadem minima producant. Sed ſupra iam oſtendimus huiusmodi formulam eosdem valores recipere poſſe, dum loco x et y diuerſi valores ſubſtituuntur.

Exem-

Exemplum III.

26. Sit propoſita formula $25xx - 70xy + 46yy$ minimum reddenda, hic ergo proxime eſſe oportet $\frac{x}{y} = \frac{7 + \sqrt{3}}{5}$, vnde primus quotus fit $= 1$ et reſiduum $= 2 + \sqrt{3}$ ergo pro ſecundo quoto habetur fractio $\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{1} = \frac{10 - \sqrt{75}}{1}$ hincque quotus $= 1$. Tota autem operatio per regulam noſtram expediri poteſt, ſi fractio noſtra per 5 multiplicando ad hanc formam reducatur $\frac{35 + \sqrt{75}}{25}$, vbi eſt $k = 75$, $e = 8$, $r = 35$ et $p = 25$, vnde calculus ſequitur

$r = 35$	$p = 25$	$q = +1$
$r = -10$	$p = -1$	$q = +1$
$r = +9$	$p = +6$	$q = 2$
$r = 3$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = +1$	$q = 16$
$r = 8$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 1$	$q = 16$
etc.		

Quoti ergo cum fractionibus ita ſe habebunt:

$$\begin{array}{ccc|cccc|cc} 1, & 1, & 2, & 1, & 16, & 1, & 1 & 1, & 16 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{117}{35}, & \frac{124}{39}, & \frac{241}{74}, & \frac{365}{113} \end{array} \text{ etc.}$$

euidens eſt ergo fractiones indicibus 16 ſubſcriptas quaeſito ſatisfacere debere, quod fit ſi $x = 7$ et $y = 4$

$y = 4$ tum autem formula noſtra abit in $+1$; ſi in prima formula radicali tribuatur ſignum -1, vt prodeat $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{75} - 35}{-25}$, quae per regulam euoluta praebet ob $k = 75$ et $e = 8$, $r = -35$, $p = -25$, q

$r = -35$	$p = -25$	$q = 1$
$r = +10$	$p = +1$	$q = 18$
$r = 8$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = +6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = +1$	$q = 16$
$r = 8$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 11$	$q = 1$
etc.	etc.	etc.

Hinc autem quoti cum fractionibus ita procedent

$$1;\quad 18 \mid 1;\quad 1;\quad 1;\quad 16 \mid 1;\quad 1$$
$$\tfrac{1}{0};\quad \tfrac{1}{1};\quad \tfrac{19}{18};\quad \tfrac{20}{19};\quad \tfrac{39}{37};\quad \tfrac{59}{56};\quad \tfrac{98}{93};\quad \tfrac{157}{149}.$$

Secunda fractio indici 18 reſpondens ſine dubio producit valorem minimum ſcilicet $+1$, quod ex priori caſu concludi nequit, quum ibi haec fractio $\frac{1}{1}$ exiguo quoto ſit ſubſcripta, verum hoc neutiquam eſt mirandum, propterea quod hi valores litterarum x et y ſunt valde exigui, principium autem ſupra ſtabilitum, quo fractiones maximis quotis reſpondentes accipere iubemur proprie numeris maioribus conuenit atque vtique euenire poteſt, vt valo-

valores minimis numeris expreſſi ab hac regula recedant.

27. Ex his exemplis abunde perſpicitur, quo modo regula noſtra aeque facili ac concinna in omnibus caſibus vti conueniat, imprimis autem ea optimo ſucceſſu adhiberi poterit in Problemate illo Pelliano famoſiſſimo ſoluendo, vbi quaeruntur numeri x et y vt ſit $y = \sqrt{(kxx + 1)}$, tum enim vtique oportebit eſſe proxime $\frac{y}{x} = \sqrt{k}$, quandoquidem formula $yy - kxx$ minima fieri debet, minimum autem iam ſponte conſtat eſſe $= 1$, prodiens ſi $x = 0$ et $y = 1$. Veluti ſi fuerit $k = 13$, cui conuenit $e = 3$ ac primo fit $r = 0$, $p = 1$, ſicque calculus ita progredietur:

$r = 0$	$p = 1$	$q = 3$
$r = 3$	$p = 4$	$q = 1$
$r = 1$	$p = 3$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 3$	$q = 1$
$r = 1$	$p = 4$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 1$	$q = 6$
$r = 3$	$p = 4$	$q = 1.$

Vnde quoti cum fractionibus $\frac{y}{x}$ erunt

$$3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1 \mid 6,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1 \mid 6 \text{ etc.}$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{11}{3}\quad \frac{18}{5},\ \frac{119}{33},\ \frac{137}{38},\ \frac{256}{71},\ \frac{393}{109},\ \frac{649}{180} \text{ etc.}$$

vbi maximi quoti ſunt ſex, quia autem $\frac{y}{x}$ maius

 eſſe

eſſe debet quam $\sqrt{k}$ fractiones autem hic reſultantes alternatim ſuperant et deficiunt ab iſto valore, pro caſu noſtro eas accipi oportet, quae locis imparibus conſiſtunt, ergo vndecima harum fractionum, quae dat $y = 649$ et $x = 180$ quaeſito ſatisfacit, fractio autem priori 6 ſubſcripta reſoluit aequationem $y = \sqrt{(13xx - 1)}$.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

VERA DETERMINATIO CENTRI OSCILLATIONIS IN CORPORIBVS QVALIBVSCVNQVE FILO FLEXILI SVSPENSIS EIVSQVE AB REGVLA COMMVNI DISCREPANTIA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Solent Philoſophi huius ſaeculi, longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecunda vibrantis in diuerſis terrae locis inquiſituri, globulum aliudue corpus filo tenuiſſimo atque flexiliſſimo ſuſpendere minimasque eiusdem oſcillationes cum oſcillationibus penduli in horologio, ſollicite prius exploratis, comparare indeque de accurata longitudine penduli ſimplicis ad minuta ſecunda vibrantis iudicare idque cum tentant nihil negligunt, quod vel centeſima vnius lineae parte iſtam longitudinem alterare poſſit: ponduſculum fili ad pondus corporis ſuſpenſi applicatum ſcrupuloſe inquirunt, excurſionum penduli rationem habent, quia maiores paullo tardius abſoluuntur in circulo quam minores, actionem quoque aëris in corpus ſuſpenſum et quis inde expectari debeat effectus examinant, caloris itidem effectum

effectum in longitudine menſurae, qua vtuntur ad dimetiendam longitudinem fili accurate determinandam aliasque huiuſcemodi circumſtantias, vtcunque exigui momenti, quisque pro ſuo ingenii modulo et in experiundo ſcrupuloſitate, probe perpendunt. His omnibus adhibitis cautelis denique cognoſcitur, non ſolum quotnam pendulum propoſitum confecerit dato tempore oſcillationes ſed et quotnam perfecturum fuiſſet, ſi filum adhiberi potuiſſet omnis gravitatis expers, ſi excurſiones penduli re vera veluti infinite paruae fuiſſent, ſi calor datum habuiſſet gradum, ſi aër omnis abfuiſſet etc. Haec omnia vtique rectiſſime ſe habent; at quod, reliquum eſt, id potiſſimum ſcrupulum mouet. Scilicet in pendulo propoſito inquirunt in centrum oſcillationis, ſecundum leges communes a magno Hugenio primum inuentas et demonſtratas tumque diſtantiam inter punctum ſuſpenſionis praefatumque centrum oſcillationis pro vera longitudine penduli ſimplicis iſochroni aſſumunt. Quid vero de hac vltima operatione cenſendum ſit, conſtitui in hac diatriba ad accuratam trutinam perpendere.

§. 2. In theoria Oſcillationum Hugeniana ſyſtemata oſcillantia ſupponuntur, quae in ſingulis punctis figuram ſuam perfecte conſeruant ita, vt omnes totius ſyſtematis partes communi motu angulari circa axem rotationis ferantur, inter oſcillandum id idem contingeret in noſtris, quas examinabimus, oſcillationibus, ſi loco fili flexilis adhiberetur filum rigidum corpori ita infixum, vt ſimul filum et

corpus

corpus ipſi annexum communi motu angulari ferri cogantur atque vt ipſum filum cum axe corporis appenſi conſtanter in directum ſit poſitum; voco autem axem corporis lineam, quae a puncto ſuſpenſionis per centrum grauitatis ducta cenſetur. Iam vero apparet, hanc hypotheſin in ſyſtemate noſtro minime praeſupponi poſſe nec debere; fieri enim poteſt et reuera ita fit, vt filum flexile cum axe corporis angulum efformet inter oſcillandum data lege variabilem, vnde oſcillationes oriantur toto coelo diuerſae ab oſcillationibus Hugenianis. Reuera in vtroque oſcillationum genere formulae pro pendulis ſimplicibus iſochronis, ex veris legibus mechanicis deductae, nihil plane inter ſe commune habent, quamuis in fine calculi numerici plerumque parum a ſe inuicem differant, nimium tamen ſemper quam vt diſcrepantia negligi poſſit, niſi corpus filo appenſum exiguum valde volumen occupet, quo quidem in caſu ambae theoriae eodem recidere cenſeri poterunt. Haec vt tanto melius intelligantur, liceat in memoriam reuocare, quae olim in Commentariis veteribus Academiae demonſtraui, quaeque ad praeſens noſtrum inſtitutum imprimis pertinent.

§. 3. Omne corpus, quod circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem rotatur, punctum habet, quod vocaui centrum virium viuarum, in quo ſi tota maſſa concentrata putetur, eadem a rotatione vis viua generetur, quae corpori rotato in eſt; hoc punctum non difficulter pro omni ſyſtemate determinatur; demonſtraui autem egregiam eius

proprietatem, quod nempe oſcillationes corporis, circa axem horizontalem per centrum virium viuarum tranſeuntem priorique axi parallelum, ſint brachyſtochronae atque adeo citius perficiantur, quam ſi in quocunque alio axe perficiantur. Vocetur iam diſtantia centri virium viuarum a centro grauitatis $= a$; tum ſi corpus ſuper omni alio axe praefatis parallelo et horizontali oſcilletur, cuius diſtantia a centro grauitatis dicatur A, demonſtraui fore diſtantiam centri oſcillationis, pro hypotheſi communis velocitatis angularis $= A + \frac{aa}{A}$: haec ſimpliciſſima formula omnium eſt commodiſſima atque per ſe indicat, quod centrum oſcillationis et punctum ſuſpenſionis ſint duo puncta conuertibilia ita, vt vtroque modo oſcillationes eiusdem durationis perficiantur.

Si pro corpore ſphaera homogenea accipiatur, cuius radius $= r$, fit $a = r\sqrt{\frac{2}{5}}$ et diſtantia centri oſcillationis $= A + \frac{2rr}{5A}$ atque ſi eadem ſphaera in ipſa ſua ſuperficie fuerit ſuſpenſa, erit diſtantia centri oſcillationis $= \frac{7}{5}r$. Pro virga recta vniformiter graui fit $a = l\sqrt{\frac{1}{3}}$, vbi l ſemilongitudinem virgae denotat, adeoque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis pro virga verticaliter ſuſpenſa $= A + \frac{ll}{3A}$ ſi virga recta a ſummitate ſua fuerit ſuſpenſa, fiet haec diſtantia $= \frac{4}{3}l$.

§. 4. Sic igitur, pro hypotheſi rigiditatis in toto ſyſtemate, res tota breuiſſime expeditur; at vero cum filum corpus ſuſpendens in puncto, quo ad ſe inuicem connectuntur, inflexionem patitur, proble-

problema noſtrum aliter eſt aggrediendum; facilius fere eſt ſolutionem mente concipere, quam conceptam plane atque dilucide exponere, praeſertim cum hic ſermo ſit de oſcillatiunculis minimis ſimulque variationibus momentaneis infinities minoribus. Concipiatur in vtraque figura noſtra filum *a c* grauitatis expers, cui in puncto *c* annexum ſit corpus graue cuiuscunque figurae: fuerit *c r* axis corporis filo *a c* annexi: fuerit centrum grauitatis corporis in *t*; conſideretur praeterea in axe corporis aliud punctum *f*, in quo poſitum putetur centrum oſcillationis pro corpore circa punctum *c* oſcillante, quaſi ſublato filo *a c*, quod adeoque centrum oſcillationis ad theoriam communem Hugenianam redit. Tab. I. Fig. 2. 3.

Ponatur nunc ſyſtema propoſitum *a c r* inter oſcillandum perueniſſe in ſitum *a b q* atque puncta *c*, *t*, *f* deſcripſiſſe arculos valde paruos *c b*, *t g*, *f d* qui pro lineolis rectis horizontalibus haberi poterunt, ſi iisdem conuenienter vtamur.

Si vero integra corporis maſſa in puncto *t* vel *g* ceu centro grauitatis ponatur concentrata eiusque pondus exprimatur linea verticali *g l*: haecque potentia reſoluatur in *g h* tantum non verticalem et potentiolam valde paruam *g m* veluti horizontalem; apparet filum *a b* ſic tendi veluti a toto corporis pondere et ob reactionem ſuam originem dare potentiae contrariae, quam exprimam linea *b n* in ipſa fili longitudine ſumta, eritque *b n* proxime aequalis ipſi *g l*. Producatur axis *q b* vsque in *s* atque reſolua-

ſoluatur potentia $b\,n$ in duas laterales $b\,p$ et $b\,o$, ſic fiet, vt potentiae $b\,p$ et $g\,h$ ſint inter ſe aequales et contrariae, ſolae itaque remanent potentiolae $g\,m$ et $b\,o$, a quibus motus oſcillatorius quouis tempuſculo ſiue accelerari ſiue retardari poſſit: directiones autem harum potentiolarum poterunt cenſeri veluti horizontales ſimulque ad axem $b\,q$ perpendiculares ob paruitatem inſignem oſcillationum. Notetur autem haſce duas potentiolas horizontales, prouti ſunt diuerſimode applicatae ita etiam diuerſos exercere effectus: prior $g\,m$, in centro grauitatis applicata, cenſenda eſt omnibus et ſingulis elementis corporis eandem vim acceleratricem veluti horizontalem imprimere ſicque pro quouis tempuſculo, ſi ſola agat, parallelismum in axe $b\,q$ conſeruare. Licebit igitur, ratione potentiolae $g\,m$, fingere integram corporis maſſam concentratam atque translatam in punctum b huicque puncto applicatam potentiam $g\,m$ ſub directione horizontali $b\,c$; Idem quoque licebit pro omni alio puncto in axe $b\,q$ ſumto.

Progredior ad alteram potentiolam $b\,o$ explicandam: haec vtique vnico puncto b tota applicata eſt atque in diuerſa elementa corporis diuerſas impreſſiones facit. Hic iterum vſu venit vtiliſſimum theorema meum ante plurimos annos cum Academia communicatum, quod haec potentia impendatur in rotationem corporis circa punctum d, quod foret centrum oſcillationis corporis ſi in puncto b ſuſpenſum eſſet. Ergo potentiola $b\,o$ nullam impreſ-

impreſſionem facit in punctum d, quod hic tanquam centrum rotationis conſiderari debet; verum vt appareat, quanta inde oritura ſit vis acceleratrix in ſummitate b, quoduis elementum corporis diminui debet in ratione quadratica diſtantiae $b\,d$ ad diſtantiam elementi a puncto d poſteaque aggregatum elementorum hac lege diminutorum maſſam formabit, quae integra in punctum b translata cenſenda eſt; ſic potentiola $b\,o$ ad hanc maſſam applicata efficiet vim acceleratricem pro puncto b.

Denique ex combinatione vtriusque potentiolae $g\,m$ et $b\,o$ deriuabitur vis acceleratrix abſoluta tam pro puncto b quam pro puncto d; tum tandem poſtulat iſochronismus, vt ambae vires iſtae acceleratrices fiant diſtantiis $b\,c$ et $d\,f$ proportionales. Atque his principiis integra problematis noſtri ſolutio ſuperinſtruenda eſt.

§. 5. Sit longitudo fili $a\,c = l$; diſtantia $c\,f = \lambda$ (eſt autem punctum f centrum oſcillationis pro corpore ex ſe ipſo in puncto c ſuſpenſo) atque diſtantia inter centrum grauitatis corporis eiusque praefatum centrum oſcillationis ſiue $t\,f = L$: ex hiſce tribus longitudinibus datis erit longitudo penduli ſimplicis, cum oſcillationibus noſtris iſochroni, determinanda. Sit $b\,c = \alpha$ ductaque verticali $b\,e$ ponatur $d\,e = \beta$ erit ante omnia relatio inter β et α definienda; haec vero maxima parte pendet a diverſitate diuerſoque agendi modo potentiolarum horizontalium $g\,m$ et $b\,o$: poſito igitur pondere cor-

 poris

poris oſcillantis $= p = g\,l$; fiet (ob ſimilitudinem triangulorum $b\,e\,d$ et $g\,l\,m$) $g\,m = \frac{\beta}{\lambda} p$, quae potentiola cum aequaliter agat in ſingula corporis elementa ſub directione horizontali, erit vis acceleratrix vbique $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$, intelligendo per m maſſam corporis, nominatimque in punctis d et b.

Ad dignoſcendam alteram potentiolam $b\,o$, producenda erit linea $a\,b$ vsque in u: ſic fiet $u\,e = \frac{\lambda}{l}\alpha$ atque $d\,u = \beta - \frac{\lambda}{l}\alpha$. Eſt vero potentia $b\,n = p$; ergo, ob ſimilitudinem trianguli $b\,d\,u$ cum triangulo $n\,o\,b$ fit potentiola $b\,o = (\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\alpha}{l})p$. Iſta potentia impenditur in rotationem corporis circa punctum d, in quo adeoque nullum exercet effectum ſic vt integra vis acceleratrix pro puncto d maneat $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$. Verum enim vero in puncto b noua oritur vis acceleratrix, ad cuius determinationem requiritur vt ſecundum praecedentem paragraphum definiatur maſſa in b ſubſtituenda, quae ſi dicatur μ, docent leges mechanicae eſſe $\mu = \frac{L}{\lambda} m$; igitur vis acceleratrix genita a potentiola $(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\alpha}{l})p$, ad maſſam $\frac{L}{\lambda} m$ applicata, fit $= (\frac{\beta}{L} - \frac{\lambda\alpha}{L\,l})\frac{p}{m}$, eſtque haec vis acceleratrix contraria illi, quae a potentia $g\,m$ antea orta fuerat, vnde nunc vis acceleratrix abſoluta pro puncto b fit $= (\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\beta}{L} + \frac{\lambda\alpha}{L\,l})\frac{p}{m}$, quam vidimus eſſe pro puncto d ſimpliciter $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$.

Quoniam in ſyſtemate noſtro oſcillationes ſupponuntur regulares, oportet vt ambo puncta b et d ſimul

ſimul perueniant in c et f, quod vt fiat requiritur vt vires acceleratrices in b et d ſint proportionales viis ſimul perficiendis bc et df ſiue α et $\alpha + \beta$, vnde ſequens deducitur analogia:

$\left(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\beta}{L} + \frac{\lambda\alpha}{Ll}\right)\frac{p}{m} : \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m} :: \alpha : \alpha + \beta$ ſiue $Ll\beta - \lambda l\beta + \lambda\lambda\alpha : Ll\beta = \alpha : \alpha + \beta$,

quae in aequationem conuerſa dat

$$\beta\beta + \frac{\lambda l - \lambda\lambda}{\lambda l - Ll}\,\alpha\beta = \frac{\lambda\lambda}{\lambda l - Ll}\,\alpha\alpha :$$

Hinc denique

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda\lambda - \lambda l \pm \sqrt{(4\lambda\lambda \times (\lambda l - Ll) + (\lambda l - \lambda\lambda)^2)}}{2\lambda l - 2Ll}.$$

Haec aequatio paullo fit concinnior ſi ponatur $\lambda - L = L'$, ita vt ſit linea ct ſiue diſtantia centri grauitatis a puncto $c = L'$ hoc modo obtinetur

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda\lambda - \lambda l \pm \sqrt{(4\lambda\lambda L' l + (\lambda l - \lambda\lambda)^2)}}{2L'l}.$$

§. 6. Inuento valore $\frac{\beta}{\alpha}$ facile nunc eſt determinare longitudinem quaeſitam penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus noſtris. Scilicet iam innoteſcit vis acceleratrix pro ſingulis punctis in axe bq ſumtis vna cum eorum diſtantia ab axe verticali cr: hinc ſtatim reperitur ratio inter pendulum ſimplex et inter pendulum datum: ſeligatur, verbi gratia, punctum d, pro quo diſtantia ab axe verticali eſt $df = \beta + \alpha$ et vix acceleratrix, vi praecedentis paragraphi, $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$ vel ſimpliciter $= \frac{\beta}{\lambda}$, quando quidem pondus corporis p poteſt exprimi per ipſam maſſam m: foret itaque pendulum quaeſitum $= bd = \lambda$, ſi loco diſtantiae df haberetur diſtantia de; vnde ſequitur eſſe longitudinem λ multipli-

tiplicandam per rationem $\frac{df}{de}$, id eſt, per $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. Eſt igitur vera penduli noſtri ſimplicis longitudo $\frac{\alpha+\beta}{\beta}\lambda$, quae eſt ipſa longitudo sf vel sd, ſubſtituto autem pro quantitate $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ valore in fine paragraphi praecedentis indicato, inuenitur denique longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$= \lambda + \frac{2L'l}{\lambda - l \pm \sqrt{[4L'l + (l-\lambda)^2]}}.$$

Idem inuenitur valor ſi loco puncti d aſſumatur punctum b, pro quo inuenimus in praecedente paragrapho vim acceleratricem

$$= \left(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\beta}{L} + \frac{\lambda\alpha}{Ll}\right)\frac{p}{m}:$$

ponatur rurſus $\lambda - L = L'$ atque $p = m$: ſic fiet vis acceleratrix pro puncto $b =$

$$\frac{\lambda\lambda\alpha - L'l\beta}{\lambda\lambda l - \lambda L'l};$$

vnde nunc longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$= \frac{\lambda\lambda l\alpha - \lambda L'l\alpha}{\lambda\lambda\alpha - L'l\beta} = \frac{\lambda\lambda l - L'l}{\lambda\lambda - L'l\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Subſtituatur pro $\frac{\beta}{\alpha}$ valor eius in fine paragraphi praecedentis expreſſus, atque ſic inuenietur longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$= \frac{2l\lambda - 2lL'}{\lambda + l \mp \sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2}},$$

quam pro puncto d inueneramus

$$= \lambda + \frac{2L'l}{\lambda - l \pm \sqrt{4L' + (l-\lambda)^2}}:$$

Equidem diuerſi ab inuicem prima fronte videntur ambo valores; attamen, recte inſtituto calculo, perfecte inter ſe aequales deprehenduntur. §. 7.

§. 7. In vtraque formula, longitudinem penduli ſimplicis exprimente, eadem occurrit quantitas radicalis, quae vtique tam affirmatiue quam negatiue accipi poteſt. Patet exinde, corpora e filo flexili ſuſpenſa duobus modis oſcillationes ſuas perficere poſſe, quarum configurationes ab inuicem valde diverſae ſint quaeque ſingulae ratione temporis, in quamuis oſcillationem inſumti, inſigniter differant, ſi non ad vnum eundemque modum pertineant: tanto magis exinde eluceſcit, quod ſua indole toto coelo differant oſcillationes noſtrae pro filo flexili ab oſcillationibus communiter aſſumtis pro filo rigido ſeu inflexibili, quod nempe in ſolo puncto ſuſpenſionis *a* flexionem admittat. Attamen, hac non obſtante diuerſitate, primum oſcillationum noſtrarum genus, ad normam figurae primae formatarum, parum admodum differt ſua duratione ab oſcillationibus Hugenianis, quae ratio eſſe videtur, quod nemo adhuc, quantum quidem ſcio, vllam diuerſitatem ſuſpicatus ſit, praeſertim in corporibus quorum integer axis multo minor fuerit longitudine fili. Atque haec me mouit ratio, vt id examinis in me ſuſciperem, viſurus quid calculus diſcriminis indicet et an vlla in determinanda vera longitudine penduli ſimplicis iſochroni ad minuta ſecunda vibrantis diuerſitas ſenſibilis inde pro globulis ſuſpenſis minoribus oriri debeat nec ne? Poſtulat hoc inſtitutum meum, vt ſeorſim prius agam de oſcillationibus principalibus tardioribus, quibus inſeruit ſignum ſuperius, quando ſigna ambigua, $\mp$ vel $\pm$ occurrunt.

De oſcillationibus principalibus tardioribus.

§. 8. Duo ſunt caſus, qui oſcillationes noſtras per ſe reddunt obuias, quosque adeo formulae praemiſſae, ſi ratae ſint, indicare debent: *primus* eſt quo ponitur longitudo fili ſiue $l = 0$, et qui longitudinem penduli facere debet $= \lambda$: Id vero ex formula noſtra primo loco poſita deducitur ſi pro quantitate radicali ſubſtituatur $\lambda + \frac{2 L' l}{\lambda} - l$ neglectis nimirum altioribus dimenſionibus longitudinis l: hoc facto fit denominator huius formulae $= \lambda + l - \lambda - \frac{2 L' l}{\lambda} + l = 2 l - \frac{2 L' l}{\lambda}$ atque integra formula fit $= \lambda$; altera vero formula immediate eandem dat concluſionem. *Secundus* caſus eſt, quo ponuntur quantitates λ et L' veluti infinite paruae habita ratione ad longitudinem fili; tunc vero pro quantitate radicali ponenda eſt quantitas $l - \lambda + 2 L'$ quae ſi ſubtrahatur ab quantitate $\lambda + l$ relinquit $2 \lambda - 2 L'$; vnde prior formula in fine paragraphi ſexti poſita fit in hoc caſu ſimpliciter $= l$, plane vt prouideri poterat, quia hic caſus repraeſentat pendulum, quod dicitur ſimplex. Id idem indicat quoque altera formula.

§. 9. Deſcendamus ad exempla theoriae noſtrae vere accommoda 1°. ponatur $l = \lambda$, dabit vtraque noſtra formula longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $= l + \sqrt{L' l}$: at vero pro theoria communi fit eadem longitudo $= l + \frac{2 l L'}{l + L'}$; prior excedit alteram, quaecunque fuerit corporis conformatio, quia diſtantia L' ſemper minor eſt quam λ ſiue, in hoc

hoc exemplo, minor quam l: fuerit, verbi gratia, $L' = \frac{5}{4}\,l$ fiet longitudo penduli iſochroni pro hypotheſi flexibilitatis $= l + \frac{1}{2}\,l\,\sqrt{3} = 1.866\,l$, in hypotheſi rigiditatis $= l + \frac{6}{7}\,l = 1.857\,l$; igitur exceſſus prioris ſuper alteram fit $= \frac{9}{1000}\,l$ ſiue = ducenteſimae ſeptimae parti longitudinis penduli ſimplicis iſochroni.

Si fuerit $l = 3\frac{1}{2}$; $\lambda = 4$ et $L' = 3$, fit $\sqrt{4\,L'l + (l - \lambda)^2} = 6\frac{1}{2}$ atque ambae formulae paragraphi ſexti faciunt longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $= 7$, in altera vero hypotheſi haec longitudo fit $= 6\frac{25}{26}$: hic igitur differentia inter vtrumque pendulum fit $= \frac{1}{26}$, quae facit centeſimam octuageſimam ſecundam partem longitudinis penduli ſimplicis iſochroni.

§. 10. Ex ambobus exemplis patet, paruulam inter vtramque hypotheſin interuenire differentiam, etiamſi corpora appenſa dimenſiones habeant praegrandes. Etenim ſi de pendulis ad minuta ſecunda vibrantibus ſermo ſit, differentia inter ambo pendula in allatis exemplis vix duas lineas cum dimidia attingit; facile autem eſt prouidere, multo minoris momenti fore diſcrimen, ſi corpuſcula minora filis longioribus appendantur; quod profecto faciunt Phyſici, cum in longitudinem veram penduli pro minutis ſecundis omni, qua fieri poteſt arte accuratiſſime inquirunt. Ipſa haec a magnis Viris adhibita diligentia atque accuratio, qua momentoſiſſimum argumentum ad centeſimas vsque partes vnius

lineae conficere ſatagunt, aliquid, ni fallor, ponderis hiſce diſcuſſionibus impertiet. Exemplo vtar, quod experimentum inſtitui ſolitum perfecte imitetur.

§. 11. Aſſumatur pro corpore globus metallicus homogeneus, cuius radius ſit $=5$ lin. Paris. isque ſuſpenſus fuerit ſilo 435 lin. longo. Hae poſitiones faciunt $l=435$; $L'=5$: $\lambda=7$: eritque quantitas radicalis $\sqrt{4L'l+(l-\lambda)^2}=438,04566$ totusque denominator in prima formula finali paragraphi ſexti $=3,95434$ et ipſa longitudo penduli ſimplicis quaeſiti $=\frac{1740,0000}{3,95434}=440,0229$ lin. Hic idem valor oritur, ſi vtamur altera formula in fine paragraphi ſexti expoſita, niſi quod vltima figura numeri fere vnitate deficiat, quia nimirum quantitas radicalis nondum ſufficiente accuratione adhibita fuit.

Supereſt vt iſtum valorem penduli ſimplicis iſochroni, ſecundum veras mechanicae leges inuentum, comparemus cum ea longitudine penduli, qualis methodo communiter adhibita determinatur, quaeque exprimitur formula $l+L'+\frac{L'}{l+L'}\times\overline{\lambda-L'}$ ſiue numero $435+5+\frac{5}{440}\times 2=440\frac{1}{44}=440.0227$ lin. vbi notandum, quod prior numerus tantillum exceſſu, alter defectu peccet, et quod vera differentia, inter vtramque theoriam, decies milleſimam vnius lineae particulam parum excedat, quae differentia longe minima intra trimeſtre vix vnum minutum ſecundum valeret iniicere, tantam equidem confor-

mita-

mitatem inter vtrumque oſcillationum genus plane diuerſum ab inuicem atque formulis algebraicis, omni ſimilitudine deſtitutis, expreſſum ante inſtitutum calculum non expectaſſem. Nunc autem nemo tam ſcrupuloſus erit, vt vllam in corporibus minoribus filo ſuſpenſis correctionem adhibere velit: Aliter interim ſe res habet in corporibus maioribus, filo breuiori ſuſpenſis, pro quibus theoria Hugeniana nullo modo admitti poteſt, niſi debita correctio ad ductum theoriae noſtrae adhibeatur. Progredior ad alterum oſcillationum genus, quod argumentum praeſens admittit.

De oſcillationibus acceſſoriis celerioribus.

§. 12. Oſcillationes, de quibus nunc ſermo eſt, ſe componunt ad conformationem figurae ſecundae, vbi puncta analoga iisdem deſignantur literis, quibus pro figura prima vſi ſumus: lineas autem punctatas vna cum litteris ad eas pertinentibus apponere non neceſſe duxi. In hac itaque figura ſecunda denotat rurſus ac vel ab longitudinem fili; cr vel bq axem corporis oſcillantis, cuius centrum grauitatis in t vel g; centrum vero oſcillationis, pro ſuppoſita ſuſpenſione in puncto c vel b, iterum eſt in f vel d; ambae figurae in eo eſſentialiter differunt, quod in prima figura puncta b et d ſint ad easdem partes, in figura ſecunda ſint ad partes contrarias poſita et cum in figura prima recta sf et sd deſignet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni, erit etiam pro figura ſecunda linea sf vel sd lon-

gitudo penduli ſimplicis iſochroni pro oſcillationibus, quas nunc commentor. Notetur imprimis, quod pro hac oſcillationum claſſe ſignum inferius ſit ſeligendum, quoties in formulis §. §. 5 et 6. expoſitis quantitas radicalis occurrit.

§. 13. Notari hic meretur ſitus puncti s, quo axis corporis oſcillantis perpetuo axem verticalem interſecat. Ponatur primo longitudo fili $l = 0$ tum indicant ambae formulae paragraphi quinti longitudinem penduli iſochroni $= 0$, plane ac ſi rapiditate infinita oſcillationes perficiantur; verum enim vero aduertatur, oſcillationes ſupponi veluti infinite paruas: oportet itaque vt ſit arculus $b\,c$ veluti infinities minor longitudine fili, quod ipſum cum ponatur $= 0$, ſimul arculus $b\,c$ ponendus erit $= 0$; ergo totus motus oſcillatorius ad perfectam reductus erit quietem.

Melius nobis conſulemus, ſi filo mediocris ſupponatur longitudo, dum quantitates λ et L' ſtatuantur veluti infinitae; tunc autem intelligemus ex formulis noſtris, fore pendulum iſochronum $s\,d = \frac{\lambda - L'}{\lambda} \times l$ atque adeo veluti infinities breuius ac ſunt longitudines L' et λ: hinc ſequitur oſcillationes proxime ita fieri, ac ſi corpus minimas perficiat rotatiunculas reciprocas circa punctum d ſiue propemodum circa centrum oſcillationis, quod corpus habet, ſi ex puncto c ſuſpenſum fuerit. Si e contrario corpus filo infinite longo ſuſpenſum putetur, dabit vtraque formula in paragrapho ſexto demonſtra-

monſtrata, longitudinem penduli ſimplicis iſochroni ſiue $ds = \lambda - L' = db - gb = dg$: Igitur punctum s cadit in punctum g ſiue in centrum grauitatis corporis. Hinc diſcimus, centrum rotationum minimarum reciprocarum ſemper fieri circa punctum medium inter extremos limites d et g, nec vnquam pendulum iſochronum maius fieri longitudine $\lambda - L'$ vel longitudine, quam §. 5. vocaui L.

§. 14. Conſideremus ambo exempla, paragrapho nono aſſumpta pro oſcillationibus primi ordinis explicandis. Quod ſi itaque rurſus ponatur $l = \lambda$, obtinetur pendulum iſochronum, pro oſcillationibus noſtris ſecundi ordinis, $= l - \sqrt{L' l}$ atque ſi porro ponatur $L' = \frac{3}{4}\lambda$, fiet hoc pendulum $= l - \frac{1}{2} l \sqrt{3} = 0,134\, l$. in caſu ſpecialiſſimo, quo longitudo fili poneretur duorum pedum, foret pendulum quaeſitum $= 0,268$ ped. atque formaret propemodum ducentas oſcillationes intra tempus vnius minuti primi, id quod reuera ita ſe habere experimento cognoui in virga terete vniformiter craſſa tres pedes longa et filo duorum pedum ſuſpenſa, vbi oſcillationes binas quasque numerabam. In altero, quod §. 9. attuli exemplo, vbi $l = 3\frac{1}{3}$; $\lambda = 4$ et $L' = 3$, quod foret pro virga terete vniformiter craſſa, ſex pedes longa et filo $3\frac{1}{3}$ ped. longo, fit sd ſiue pendulum iſochronum $= \frac{1}{3}$ ſiue $=$ quartae parti diſtantiae ft vel dg. Caeterum commode id fit, cum pro corpore ſuſpenſo teres aſſumitur virga ſiue bacillus cylindricus, ideo quod in his minimae oſcillationes celerrime repetitae melius diſtinguantur.

§. 15.

§. 15. Attentione imprimis dignum puto in hoc argumento, quod indicaui paragrapho decimo tertio de effectu fili modo breuioris modo longioris pro eodem corpore ſuſpenſo. Scilicet quod euaneſcente filo punctum s incidat in ipſum punctum d vel f et quod poſito filo veluti infinitae longitudinis, idem interſectionis punctum s incidat in punctum g vel t; igitur pendulum iſochronum cum oſcillationibus, de quibus hic ſermo eſt, ſimper breuius eſt diſtantia a centro grauitatis ad centrum oſcillationis, quod reſpondet corpori ex puncto c ſuſpenſo id eſt, ſemper minor quantitate paruula L § 5. definita, vnde intelligitur in omni experimento celerrimas fore huiusmodi oſcillationes, niſi quis corpora praegrandia adhibere velit. Sic in poſteriori exemplo praecedentis paragraphi, vbi $\lambda = 4$ et $L' = 3$ atque $L = 1$, ſi pro longitudine l accipiatur $\frac{1}{4}$, quae paruula eſt, reperitur pendulum iſochronum $= \frac{20}{303}$ ſiue paullo minus quam $\frac{1}{15}$; ergo ds vel $fs < \frac{1}{15}$ ſiue minor decima quinta parte diſtantiae ft. Verum etiamſi filum adhibeatur longiſſimum, veluti ſi ponatur $l = 100$, pendulum iſochronum nondum attingit longitudinem tf; et enim fit iſtud pendulum proxime $= \frac{100}{103}$.

§. 16. Sequitur nunc *Theorema*, quod viſum eſt quam maxime elegans, ſcilicet quod ſumma amborum pendulorum, vtrique oſcillationum generi reſpondentium, ſit ſemper $= l + \lambda$ ſiue $=$ longitudini af ſiue in prima ſiue in ſecunda figura. Demonſtratio huius theorematis in eo poſita eſt; quod

quod ſi in formula priori paragraphi ſexti, ſi primo ſignum ſuperius, quantitati radicali praefixum, atque deinde ſignum inferius ſumatur, ſit ſumma ambarum quantitatum reſultantium ſemper $= l + \lambda$; et enim inſtituto calculo reperitur

$$\frac{2l\lambda - 2lL'}{\lambda + l - \sqrt{4lL' + (l-\lambda)^2}} = \frac{2l\lambda - 2lL'}{\lambda + l + \sqrt{4lL' + (l-\lambda)^2}} = l + \lambda.$$

Exinde ceu *corollarium* deducitur, quod ſit diſtantia as in figura prima ſemper aequalis diſtantiae sf in figura ſecunda ſiue aequalis longitudini penduli iſochroni pro oſcillationibus ſecundi ordinis. Igitur, in figura prima, indicat sf longitudinem penduli iſochroni pro oſcillationibus poſterioribus.

De oſcillationibus vtriusque generis coexiſtentibus.

§. 17. In vtroque genere oſcillationes erunt ſimplices, ſi elongationes initiales punctorum d et b a punctis e et c rationem inter ſe habeant, quam indicat aequatio finalis paragraphi quinti. Quid autem erit ſi praefata puncta d et b alias habuerint diſtantias initiales? Id genus quaeſtionum a nemine, quod ſciam, tractatum fuerat, cum in actis Berolinenſibus theoriam de oſcillationibus coëxiſtentibus in ſyſtemate determinato exponerem eiusque praeſertim vſum oſtenderem, cum ſyſtema propoſitum ex numero partium finito, vtcunque tamen magno vel paruo, componitur; Dico autem fore tunc, vt ambo oſcillationum genera ſimul exiſtant in ſyſtemate propoſito et ita quidem coëxiſtant, vt pro ra-

 tione,

tione, qua puncta d et b ab initio diducta fuerint, fiant vel oſcillationes de primo genere vel etiam de ſecundo genere ſenſibiliores: at vero ſemper eadem orietur ratio inter ambo pendula iſochrona, illa nempe, quae intercedit inter

$$\lambda + l + \sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2} \text{ atque } \lambda + l - \sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2}$$

conf. §. 6. permixtio huiusmodi oſcillationum efficiet, vt motus oſcillatorius abſolutus appareat valde irregularis atque perturbatus, etiamſi ſit ex duabus oſcillationum ſpeciebus perfecte regularibus compoſitus. Duo tamen in ſyſtemate ſunt puncta litera s indicata, quae motu ſimplici oſcillant, alterum in figura prima conſpicuum, quod ſimpliciter oſcillationes de ſecundo genere format, alterum in figura ſecunda notatum, quod ſimplices facit oſcillationes primi generis.

§ 18. Patet ex proportione inter ambo pendula ſimplicia iſochrona, quam modo indicaui, fieri poſſe, vt tempore vnius oſcillationis de prima claſſe, abſoluatur datus numerus integer N oſcillationum de ſecunda claſſe: tunc vero oſcillationes primae claſſis erunt veluti irregulariter-regulares, quandoquidem poſt quamlibet oſcillationem fundamentalem omnia ſimul ad quietem momentaneam erunt reducta; ſatisfiet huic conditioni, ſi ſequens inſtituatur analogia

$$\lambda + l + \sqrt{4L'l - \lambda\sqrt{(l-\lambda)^2}} : \lambda\sqrt{l - \sqrt{L' + (l-\lambda)^2}} :: NN : 1 :$$

haec analogia ſuppeditat talem aequationem

$$(NN-1)(\lambda + l) = (NN+1)\sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2},$$

cui

cui innumeris modis ſatisfieri poteſt: Abſit tunc vt huiusmodi oſcillationes coëxiſtentes in ſyſtemate pro ſimplicibus oſcillationibus primi generis accipiamus, cum liberum ſit etiam numerum fractum pro N accipere, in quo caſu ridiculum foret, motum vibratorium compoſitum pro ſimplici habere: fuerit, verbi gratia $N = \frac{13}{3}$, tunc vno eodemque tempore abſoluentur tres oſcillationes primi generis atque tredecim ſecundi generis. Argumentum iſtud vnico illuſtrabo exemplo.

§. 19. Sumatur pro corpore ſuſpendendo bacillus teres, vniformiter craſſus et grauis, pro quo habetur $L' = \frac{3}{4}\lambda$ et quaeratur longitudo fili l hac conditione, vt quatuor praeciſe abſoluantur vibrationes ſecundi generis, dum vnica perficitur vibratio primi generis: tunc talis orietur aequatio $15(\lambda + l) = 17\sqrt{lL + l\lambda + \lambda\lambda}$ ſiue $225\lambda\lambda + 450\lambda l + 225 ll = 289 ll + 289\lambda l + 289\lambda\lambda$ ſiue $64 ll - 161\lambda l = -64\lambda\lambda$, vnde oritur $l = \frac{161}{128}\lambda \pm \frac{\sqrt{9537}}{128}\lambda$: Igitur duobus modis quaeſtioni ſatisfieri poteſt; primus proxime eſt cum ſumitur $l = 2.02\,\lambda$, alter cum fit $l = 0,495\,\lambda$. Pro minoribus numeris N fiunt radices imaginariae. Caeterum ambas vibrationum claſſes facile eſt diſtinguere atque numerare.

DETERMINATIO
MOTVS OSCILLATORII,
IN PRAECEDENTE DISSERTATIONE PERTRACTATI, EX PRIMIS MECHANICAE PRINCIPIIS PETITA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab. I. Fig. 4. 5. Figura concipiatur in plano verticali deſcripta, cui axis girationis in A ſit normalis, vnde ducta notetur recta verticalis A V, a qua pro dato tempore $= t$ filum A B declinet angulo B A V $= \vartheta$. Filo autem in B alligatum ſit corpus B M N, cuius centrum grauitatis reperiatur in C, ex quo per B recta C B D producta verticali occurrat in puncto D, cum ea faciens angulum C D V $= \Phi$, tum vero vocetur longitudo fili A B $= a$ et interuallum B C $= b$, ipſum autem filum A B concipiatur grauitatis expers, corporis autem annexi B M N pondus ſeu maſſa vocetur $=$ M, iam in hoc corpore concipiatur axis ad planum verticale normalis per centrum grauitatis C ductus, cuius reſpectu ſit corporis momentum inertiae $= Mcc$, vnde ſi corpus fuerit globus radio B C $= b$ deſcriptus, notum eſt fore $cc = \frac{2}{5}bb$, generatim autem calculum ad alia quae-

quaecunque corpora accommodare licet, dummodo memoratus axis per C ductus ſimul fuerit vnus ex axibus principalibus cuiusque corporis, quia aliter corpus circa eum libere girari non poſſet ſed motum quendam turbinatorium acciperet.

§. 2. His poſitis, vt in motum huius corporis B M N quatenus filo A B eſt allegatum, inquiramus, vires illud ſollicitantes perpendere debemus, duae autem tantum occurrunt huiusmodi vires, altera vis grauitatis ponderi corporis M aequalis, directionem habens verticalem C E ipſi centro grauitatis C applicata, altera vero vis corpori in puncto B eſt applicata tenſioni fili A B aequalis quam littera T deſignemus. Iam in corpore B M N duplex motus eſt conſiderandus, alter progreſſiuus, quo centrum grauitatis C fertur, quem ſecundum directiones fixas C E et C Q commodiſſime reſoluimus: Alter eſt cuius motus giratorius circa centrum grauitatis C, quem ex variabilitate anguli C D V $=\Phi$ diiudicari oportet; quemadmodum igitur vterque motus per vires ſollicitantes determinari debeat, prima mechanicae principia luculenter declarant.

§. 3. Primo igitur motum progreſſiuum centri grauitatis C inueſtigemus, quem in finem vocemus coordinatas A Q $= x$ et Q C $= y$, ac manifeſtum eſt fore $x = a\,\text{coſ.}\,\vartheta + b\,\text{coſ.}\,\Phi$ atque $y = a\,\text{ſin.}\,\vartheta + b\,\text{ſin.}\,\Phi$, tum vero tenſio fili $=$ T pro directione verticali P A, dat vim $=$ T coſ. ϑ at pro directione horizontali B P vim $=$ T ſin. ϑ, grauitas autem

 ſeu

ſeu pondus corporis $= M$ pro ſola directione verticali ſuppeditat vim $= M$ deorſum tendentem, pro directione autem horizontali nullam. Hinc autem principia mechanicae ſumto elemento temporis dt conſtante ac denotante g altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo libere delabuntur, ſequentes duas aequationes ſuppeditant

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{M - T\,coſ.\,\vartheta}{M}, \quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-T\,ſin.\,\vartheta}{M}$$

quae formulae ita ſunt comparatae, vt tempus iam in minutis ſecundis exprimant, indeque ad quoduis tempus in minutis ſecundis expreſſum, ſtatus corporis clariſſime definiatur, vtcunque etiam motus fuerit irregularis.

§. 4. Pro motu autem giratorio corporis circa axem in centro grauitatis C conceptum, vis grauitatis $CE = M$ nullum plane praebet momentum; tenſio autem fili T, qua corpus in directione BA vrgetur ob angulum $ABD = \Phi - \vartheta$ reſpectu iſtius axis praebet momentum $= Tb\,ſin.\,(\Phi - \vartheta)$ quod angulum girationis $BDP = \Phi$ imminuere tendit, hoc vero momentum per momentum inertiae Mcc diviſum, exhibebit retardationem motus giratorii, quae ergo hac aequatione exprimetur

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb\,ſin.\,(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$$

quae aequatio cum duabus praecedentibus coniuncta, omnia determinat, quae ad motus cognitionem deſiderari poſſunt, ex his enim tribus aequationibus ad quoduis tempus t ternas noſtras incognitas angulos ſcilicet

ſcilicet ϑ et Φ cum tenſione T definire licebit, quantaecunque etiam fuerint penduli excurſiones, quibus autem generatim euoluendis hic non immoror.

§. 5. Contemplabor enim, cum illuſtri Auctore ſuperioris diſſertationis, tantum oſcillationes quam minimas, ita vt bini anguli ϑ et Φ ſemper ſpectari queant tanquam infinite parui, hinc ſinus iſtorum angulorum ipſis aequales, coſinus vero vnitati aequales cenſeri poterunt, ideoque habebimus noſtras coordinatas $x = a + b$ et $y = a\vartheta + b\Phi$, ex quo ternae noſtrae aequationes ſequentes induent formas

I. $0 = \frac{M - T}{M}$

II. $\frac{a\,dd\vartheta + b\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-T\vartheta}{M}$

III. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$.

ex quarum prima ſtatim ſponte innoteſcit quantitas tenſionis fili $T = M$, ſemper ſcilicet ipſi ponderi corporis M erit aequalis, hoc igitur valore ſubſtituto duae reliquae noſtrae aequationes erunt

prior $\frac{a\,dd\vartheta + b\,dd\Phi}{2g\,ds^2} = -\vartheta$ et altera $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-b\Phi + b\vartheta}{cc}$

ac ſi ex poſteriore loco $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}$ eius valor in priore ſubſtituatur, fiet

$$\frac{a\,dd\vartheta}{2g\,dt^2}\,\frac{-bb\Phi + bb\vartheta}{cc} = -\vartheta \text{ ſiue } \frac{dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \frac{bb\Phi - bb\vartheta - cc\vartheta}{acc}$$
$$= \frac{bb\Phi - (bb + cc)\vartheta}{acc}$$

quae combinata cum altera

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-b\Phi + b\vartheta}{cc}$$

omnia

omnia continet quae, ad ſolutionem problematis requiruntur.

§. 6. Quo autem harum aequationum differentialium integralia indagemus, eas inter ſe ita combinemus, vt talis forma prodeat

$$\frac{A\,dd\vartheta + B\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{N(A\vartheta + B\Phi)}{acc},$$

reuera autem prodit

$$\frac{A\,dd\vartheta + B\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{Abb\Phi - A(bb+cc)\vartheta}{acc} - \frac{Bab\Phi + Bab\vartheta}{ac}$$

neceſſe eſt igitur, vt fiat

I. $AN = -A(bb+cc) + Bab$ et II. $NB = Abb - Bab$

ex priore ergo

$$ABN = -AB(bb+cc) + BBab$$

ex altera vero

$$ABN = AAbb - ABab$$

qui duo valores inter ſe aequati praebent

$$AAbb + AB(bb+cc-ab) = BBab$$

vnde per reſolutionem colligimus

$$\frac{A}{B} = \frac{ab - bb - cc \pm \surd(aabb + 2ab^3 - 2abcc + (bb+cc)^2}{2bb};$$

ponamus iam breuitatis gratia

$$\frac{ab - bb - cc}{2bb} = p \quad \text{et} \quad \frac{\surd(aabb + 2ab^3 - 2abcc + (bb+cc))^2}{2bb} = q,$$

quandoquidem ex tribus quantitatibus cognitis a, b et c hinc litterae p et q facile determinantur, atque hinc pro fractione $\frac{A}{B}$ geminum valorem adipiſcimur alterum $\frac{A}{B} = p + q$, alterum $\frac{A}{B} = p - q$, quorum vtrumque ſeorſim euoluamus.

§. 7.

§. 7. Ex priore igitur habemus $A = p + q$ et $B = 1$ vnde obtinemus

$ABN = (p+q)^2 bb - (p+q)ab$, ergo $N = (p+q)bb - ab$ atque hinc aequatio differentio differentialis prior euadet

$$\frac{(p+q)\,dd\vartheta + dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{((p+q)bb - ab)((p+q)\vartheta + \Phi)}{acc}$$

atque hinc ſumendo q negatiue, ſtatim formatur altera aequatio

$$\frac{(p-q)\,dd\vartheta + dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{((p-q)bb - ab)((p-q)\vartheta + \Phi)}{acc}.$$

§ 8. Introducamus nunc loco angulorum ϑ et Φ duos alios angulos u et v ponendo $(p+q)\vartheta + \Phi = u$ et $(p-q)\vartheta + \Phi = v$ vt fiat $\vartheta = \frac{u-v}{2q}$

et $\Phi = \frac{u+v}{2} - p\frac{(u-v)}{2q}$

quo facto impetramus ſequentes duas aequationes differentio differentiales

$$\frac{ddu}{2g\,dt^2} = \frac{-u(ab-(p+q)bb)}{acc} \text{ et } \frac{ddv}{2g\,dt^2} = \frac{-v(ab-(p-q)bb)}{acc}$$

quarum altera inſeruit quantitati u determinandae, altera vero ipſi v, quandoquidem hae duae quantitates u et v non amplius inuicem ſunt permixtae.

§ 9. Ad has aequationes integrandas introducamus duas nouas litteras ſubſidiarias, ſtatuamusque

$$\frac{2g(ab-(p+q)bb)}{acc} = mm \text{ et } \frac{2g(ab-(p-q)bb)}{acc} = nn$$

vt aequationes noſtrae integrandae ad has formas ſimpliciſſimas reuocentur

$$\frac{ddu}{dt^2} = -mmu, \text{ et } \frac{ddv}{dt^2} = -nnv$$

 quarum

quarum integralia bis ſumta reperiuntur per methodos cognitas

$u = C\,\text{ſin.}\,mt + D\,\text{coſ.}\,mt$ et $v = E\,\text{ſin.}\,nt + F\,\text{coſ.}\,nt$

vbi litterae C, D, E, F quantitates conſtantes quascunque ex circumſtantiis motus determinandas deſignant; quia autem per hypotheſin anguli u et v perinde ac principales ſemper manere debent quaſi infinite parui, etiam has conſtantes infinite paruas eſſe oportet.

§. 10. His igitur conſtantibus rite conſtitutis, quia numeri m et n dantur, ad quoduis tempus t ab initio elapſum et in minutis ſecundis expreſſum ambo anguli u et v definiuntur, atque ex his porro ipſi anguli ϑ et Φ concludentur, quibus ſtatus penduli hoc tempore determinatur.

§. 11. His igitur probe perpenſis, manifeſtum eſt, Problema quod hic tractamus maxime eſſe complicatum, ſi quidem ſolutio maxime generalis deſideretur. Solutiones autem particulares inde fieri poterunt plus vel minus ſimplices prouti literarum C, D, E et F vna pluresue capiantur euaneſcentes, quibus autem euoluendis hic non immoror, cum in ſuperiori diſſertatione omnia quae huc pertinent feliciſſime ſint euoluta.

§. 12. Caeterum hic obſeruaſſe iuuabit, hanc ſolutionem eatenus ſemper locum habere poſſe, quatenus formulae $ab-(p+q)bb$ et $ab-(p-q)bb$ ambae habeant valores poſitiuos, quod ſi enim ponatur $ab - pbb = rbb$, hae formulae in ſequentes transmutan-

mutantur $(r-q)bb$ et $(r+q)bb$, exiſtente $r=\frac{ab+bb+cc}{2bb}$, quare quum ſit $rr>qq$, ob $r+q$ quantitatem poſitiuam, poſitiuum quoque nanciſcetur valorem $r-q$; perpetuo autem tenendum eſt longitudinem fili A B non pro lubitu diminui poſſe, ſi enim nimis breue ſtatuatur, angulus ϑ non amplius ſpectari poterit vt valde exiguus, ſed potius ingentem obliquitatem accipere poſſet, etiamſi alter angulus Φ maneat infinite paruus. Neque vero caſum quo corpus B M N immediate ex axe A ſuſpenditur ita interpretari licet, quaſi filum A B eſſet quam breuiſſimum, quam ob cauſſam conſideratio pendulorum conſuetorum ex A ſuſpenſorum toto coelo a praeſente Problemate diſcrepare eſt cenſenda, vnde nemini mirum videri debet, ſi iſte caſus ex noſtra analyſi deriuari nequit, interim tamen etiam ex noſtris formulis generalibus non difficulter deducitur, dummodo angulus ϑ non tanquam infinite paruus ſpectetur.

Euolutio concinnior huius ſolutionis.

§. 13. Cum tota ſolutio ex tribus quantitatibus datis a, b, c ſit repetenda, ſtatuatur primo $\frac{b+cc}{b}=f$ quae eſt ea ipſa quantitas, quam illuſtris Auctor ſuperioris diſſertationis littera a deſignauit, dum longitudinem fili A B poſuit $=b$ quae hic eſt $=a$, hinc ſtatim modo ſimpliciori habebimus

$$p=\frac{a-f}{2b} \text{ et } q=\frac{\sqrt{(a-f)^2+4ab)}}{2b},$$

vnde deducimus

$$mm = \frac{bg(a+f-\sqrt{(a-f)^2+4ab})}{acc} \text{ et}$$

$$nn = \frac{bg(a+f+\sqrt{(a-f)^2+4ab})}{acc}.$$

Ponamus autem porro breuitatis gratia $\sqrt{((a-f)^2 + 4ab)} = h$, vt ſit $q = \frac{h}{2b}$ fietque

$$mm = \frac{bg(a+f-h)}{acc} \text{ et } nn = \frac{bg(a+f+h)}{acc},$$

tum verò bina membra quibus anguli u et v exprimebantur ſuccinctius ita contrahi poſſunt, vt ſit

$$u = C \text{ ſin. } (mt + \mu) \text{ et } v = E \text{ ſin. } (nt + \nu),$$

vbi litterae C, E et μ, ν denotant conſtantes per integrationem ingreſſas, quas ex motu initiali definiri oportet vti mox videbimus.

§. 14. Quia deinde habuimus:

$$\vartheta = \frac{u-v}{2q} \text{ et } \Phi = \frac{u+v}{2} - \frac{p(u-v)}{2q}$$

nunc erit

$$\vartheta = \frac{b(u-v)}{h} \text{ et } \Phi = \frac{u+v}{2} - \frac{a-f(u-v)}{2h} \text{ ſiue } \Phi = \frac{(h-a+f)u}{2h} + \frac{(h+a-f)v}{2h}$$

vnde ſi loco v et u valores ante dati ſubſtituantur nanciſcimur

$$\vartheta = \frac{Cb}{h} \text{ ſin. } (mt + \mu) - \frac{Eb}{h} \text{ ſin. } (nt + \nu) \text{ et}$$

$$\Phi = \frac{C(h-a+f)}{2h} \text{ ſin.} (mt + \mu) + \frac{E(h+a-f)}{2h} \text{ ſin.} (nt + \nu)$$

ex quibus formulis ad datum quoduis tempus t ambo anguli ϑ et Φ aſſignari poterunt, vnde totus penduli motus innoteſcet.

§. 15. Vt vero etiam ipſa celeritas angularis vtriusque motus pateſcat, notandum eſt celeritatem angu-

angularem, qua bini anguli ϑ et Φ increſcunt, eſſe $\frac{d\vartheta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ quae igitur ex noſtris formulis fient

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{mCb}{b} \text{coſ.} (mt + \mu) - \frac{nEb}{b} \text{coſ.} (nt + \nu)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{mC(b - a + f)}{2b} \text{coſ.} (mt + \mu) + \frac{nE(b + a - f)}{2b} \text{coſ.} (nt + \nu)$$

atque hinc iam pro ipſo motus initio, quo erat tempus $t = 0$, non ſolum ipſos angulos ϑ et Φ ſed etiam eorum celeritates angulares tam filo quam corpori primum impreſſas aſſignare poterimus, erat enim ipſo motus initio vbi $t = 0$

$$\vartheta = \frac{Cb}{b} \text{ſin.} \mu - \frac{Eb}{b} \text{ſin.} \nu$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{mCb}{b} \text{coſ.} \mu - \frac{nEb}{b} \text{coſ.} \nu$$

$$\Phi = \frac{C(b - a + f)}{2b} \text{ſin.} \mu + \frac{E(b + a - f)}{2b} \text{ſin.} \nu$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{mC(b - a + f)}{2b} \text{coſ.} \mu + \frac{nE(b + a - f)}{2b} \text{coſ.} \nu$$

quae quatuor quantitates cum ex dato motu initiali ſint cognitae, hinc quatuor noſtras conſtantes C, E et angulos μ et ν definire licebit, ita vt deinceps pro quouis tempore t noſtrae formulae determinatos valores ſint exhibiturae.

§. 16. Cum in has determinationes gemini anguli $(mt + \mu)$ et $(nt + \nu)$ ingrediantur, qui adeo inter ſe incommenſurabiles eſſe poſſunt; motus vtique maxime complicatus exſurget, niſi forte alteruter angulus ex calculo egrediatur, id quod vſu venit, ſi fuerit vel $C = 0$ vel $E = 0$, quibus caſibus motus regularis motui pendulorum ſimplicium ſimilis exorietur.

§. 17. Sit igitur primo $E = o$ ita vt motus determinatio tantum a ſolo angulo $(mt + \mu)$ pendeat atque manifeſtum eſt, poſt tempus $t = \frac{\pi}{m}$ ſec. vbi π denotat ſemiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$. ſinum anguli $(mt + \mu)$ priori fore aequalem at ſigno diuerſo affectum, vnde hoc tempore $t = \frac{\pi}{m}$ pendulum vnam oſcillationem peregiſſe cenſendum erit; ſimili modo ſi fuerit $C = o$, oſcillationes iterum euadent regulares et ſingulae abſoluentur tempore $t = \frac{\pi}{m}$ ſecund.

§. 18. Sin autem neque $E = o$ neque $C = o$, motus maxime erit irregularis, interim tamen eum mente ſaltem tanquam ex duplici motu regulari compoſitum ſpectare licebit, quorum altero oſcillationes peragantur tempore $\frac{\pi}{m}$ ſec. altero vero tempore $t = \frac{\pi}{n}$ ſec. prorſus vti Illuſtris Auctor ſuperioris diſſertationis ingenioſiſſime ex ſuis principiis concluſit, atque hoc obſeruato facile erit pulcherrimum conſenſum inter vtramque ſolutionem agnoſcere, etiamſi ex diuerſiſſimis principiis ambae ſint erutae.

Digreſſio ad oſcillationes finitas.

§. 19. Hanc quaeſtionem methodo Bernoulliana ne tentare quidem licet, prima autem motus principia iam initio tres nobis ſuppeditauerunt aequationes, quibus plena huius quaeſtionis ſolutio continetur, quae poſito

$x = a \text{ coſ.} \vartheta + b \text{ coſ.} \Phi$ et $y = a \text{ ſin.} \vartheta + b \text{ ſin.} \Phi$ erant

I.

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{1 - T\,\text{coſ.}\,\vartheta}{M} \qquad \text{II.}\ \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-T\,\text{ſin.}\,\vartheta}{M}$$

$$\text{III.}\ \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-T\,b\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$$

totum ergo negotium huc redit, vt iſtae aequationes per integrationem eo perducantur, vt ſingula motus phaenomena inde definiri queant, quae inueſtigatio ſi minus ſuccedat, imperfectioni Analyſeos potius quam mechanicae erit tribuendum.

§. 20. Statim autem hinc vnam integrationem exſequi licet, ſi enim prima multiplicetur per

$$dx = -a\,d\vartheta\ \text{ſin.}\ \vartheta - b\,d\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi$$

ſecunda vero per

$$dy = a\,d\vartheta\ \text{coſ.}\ \vartheta + b\,d\Phi\ \text{coſ.}\ \Phi$$

aggregatum colligitur fore

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{2g\,dt^2} = dx \begin{cases} +\frac{T}{M}(ad\vartheta\,\text{ſin.}\vartheta\,\text{coſ.}\vartheta + bd\Phi\,\text{coſ.}\vartheta\,\text{ſin.}\Phi) \\ -\frac{T}{M}(ad\vartheta\,\text{ſin.}\vartheta\,\text{coſ.}\vartheta + bd\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\vartheta) \end{cases}$$

vbi in terminis fractionem $\frac{T}{M}$ continentibus partes priores ſe deſtruunt, poſteriores vero contrahuntur in $b\,d\Phi$ ſin. $(\Phi - \vartheta)$ ita vt habeamus

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{2g\,dt^2} = dx\,\frac{T}{M}\,(b\,d\Phi\ \text{ſin.}\ (\Phi - \vartheta)$$

cui ſi addatur tertia aequatio per $cc\,d\Phi$ multiplicata, reſultabit ita aequatio integrabilis

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + cc\,d\Phi\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = dx$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dx^2 + dy^2 + cc\,d\Phi^2}{4g\,dt^2} = x + k$$

deno-

denotante k conſtantem integratione ingreſſam, haecque aequatio inuoluit conſeruationem virium viuarum.

§. 21. Quia tenſio fili T nondum conſtat, eam ex noſtris aequationibus eliminemus, vbi

I^{ma} ſin. ϑ − II^{da} coſ. ϑ praebet

$$\frac{ddx\,\text{ſin.}\,\vartheta - ddy\,\text{coſ.}\,\vartheta}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\vartheta$$

vt autem inſuper aliam aequationem a tenſione fili liberam obtineamus, euoluamus hanc combinationem

I^{ma} ſin. Φ − II^{da} coſ. Φ vnde fit

$$\frac{ddx\,\text{ſin.}\,\Phi - ddy\,\text{coſ.}\,\Phi}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\Phi - \frac{T}{M}\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)$$

cum nunc ex tertia aequatione ſit

$$\frac{cc\,d\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{T}{M}\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)$$

haec ab illa in b ducta, ſubtracta relinquet

$$\frac{b\,ddx\,\text{ſin.}\,\Phi - b\,ddy\,\text{coſ.}\,\Phi - cc\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = b\,\text{ſin.}\,\Phi$$

in quibus duabus aequationibus integralis ante inventa iam continetur.

§. 22. Eliminemus autem inſuper litteras x et y, vt binos tantum angulos variabiles ϑ et Φ cum tempore t in calculum introducamus et cum ſit

$dx = -a\,d\vartheta\,\text{ſin.}\,\vartheta - b\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $dy = a\,d\vartheta\,\text{coſ.}\,\vartheta + b\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ erit

$ddx = -a\,dd\vartheta\,\text{ſin.}\,\vartheta - a\,d\vartheta^2\,\text{coſ.}\,\vartheta - b\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - b\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi$ et

$ddy = a\,dd\vartheta\,\text{coſ.}\,\vartheta - a\,d\vartheta^2\,\text{ſin.}\,\vartheta + b\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - b\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi$

vnde colligitur fore

$ddx\,\text{ſin.}\,\vartheta - ddy\,\text{coſ.}\,\vartheta = -a\,dd\vartheta - b\,dd\Phi\,\text{coſ}\,(\Phi-\vartheta) + b\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,(\Phi-\vartheta)$

$ddx\,\text{ſin.}\,\Phi - ddy\,\text{coſ.}\,\Phi = -a\,dd\vartheta\,\text{coſ}\,(\Phi-\vartheta) - a\,d\vartheta^2\,\text{ſin.}\,(\Phi-\vartheta) - b\,dd\Phi$

his

his igitur valoribus ſubſtitutis binae noſtrae aequationes has induent formas:

$$\text{I.}\quad \frac{a\,dd\vartheta - b\,dd\Phi\,\text{coſ.}(\Phi-\vartheta) + b\,d\Phi^2\,\text{ſin.}(\Phi-\vartheta)}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\vartheta$$

$$\text{II.}\quad \frac{ab\,dd\vartheta\,\text{coſ.}(\Phi-\vartheta) - ab\,d\vartheta^2\,\text{ſin.}(\Phi-\vartheta) - bb\,dd\Phi - cc\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = b\,\text{ſin.}\,\Phi$$

aequatio autem integrata quam ſupra inuenimus hanc induet formam

$$\frac{a\,d\vartheta^2 + 2ab\,d\vartheta.d\Phi\,\text{coſ.}(\Phi-\vartheta) + (bb+cc)d\Phi^2}{4g\,dt^2} = \text{coſ.}\,\vartheta + b\,\text{coſ.}\,\Phi + k.$$

§. 23. Hic ante omnia notatu digna occurrit haec combinatio

$$\text{I}^{ma}\; b\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{II}^{da}\; (-\,\text{ſin.}\,\vartheta)$$

quae praebet hanc formam

$$-ab\,dd\vartheta\,(\text{coſ.}\,\vartheta\,\text{ſin.}(\Phi-\vartheta)) + ab\,d\vartheta^2\,\text{ſin.}(\Phi-\vartheta)\,\text{ſin.}\,\vartheta$$
$$-bb\,dd\Phi\,(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}(\Phi-\vartheta)) + bb\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}(\Phi-\vartheta) + cc\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\vartheta : 2g\,dt^2$$

$= 0$ et per ſin. $(\Phi - \vartheta)$ diuidendo

$$-ab\,dd\vartheta\,\text{coſ.}\,\vartheta + ab\,d\vartheta^2\,\text{ſin.}\,\vartheta - bb\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + bb\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{cc\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\vartheta}{\text{ſin.}(\Phi-\vartheta)} = 0$$

interim tamen fateri cogor me hinc nullam aliam aequationem integralem elicere poſſe, vnde vlteriorem harum aequationum euolutionem aliis ſuſcipiendam relinquo. Miſſa igitur hac ſpeculatione, examinemus accuratius quantum minimae ſaltem huius generis oſcillationes a motu pendulorum ſimplicium diſcrepare poſſint.

Comparatio iſtarum oſcillationum minimarum cum motu penduli ſimplicis per euolutionem caſus determinati inſtituta.

§. 24. Ante omnia igitur neceſſe eſt, vt motum penduli ordinarii ad ſimilem formam analyticam reuocemus. Concipiamus igitur filum $AB = a$ tanquam virgam rigidam etiamnum grauitatis expertem, cui corpus B M N in B ita ſit affixum vt A B C ſit linea recta neque in B vlla inflexio oriri queat; quod ſi iam ad tempus datum t declinatio huius penduli V A B dicitur $= \eta$ ob momentum inertiae corporis B M N reſpectu axis girationis $A = M((a+b)^2 + cc)$ habebitur iſta aequatio differentialis

$$\frac{dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{(a+b)\,\text{ſin.}\,\eta}{(a+b)^2 + cc}$$

vbi ob oſcillationes minimas loco ſin. η ſcribere licet ipſum angulum η, hinc igitur ſi breuitatis gratia faciamus

$$\frac{2g(a+b)}{(a+b)^2 + cc} = ll,$$

poſt duplicem integrationem reperitur fore

$$\eta = A\,\text{ſin.}\,(lt + \lambda)$$

vbi A et λ ſunt conſtantes arbitrariae, ex qua formula intelligitur tempus vnius cuiusque oſcillationis fore $= \frac{\pi}{l}$ ſec.

§. 25.

§. 25. Vt iam caſum determinatum ad calculum reuocemus, ſit corpus annexum B M N globus ex materia homogenea confectus et ſtatuamus

I°. Longitudinem fili $AB = a = 3$ digit.

II°. Radium globi $BC = b = 1$ digit.

III°. Hinc autem fiet $cc = \frac{2}{5}bb = \frac{2}{5}$

hic autem digitos intelligamus decimales pedis rhenani ita vt fiat altitudo $g = 156\frac{1}{4}$ digit. his poſitis pro motu penduli rigidi colligimus fore $ll = \frac{6250}{82} = 76,21951$ hincque $l = 8,73038$ vnde tempus vnius oſcillationis prodit $= 0,35984$ ſec.

§. 26. Faciamus nunc etiam calculum pro noſtro pendulo flexili, quod non differt a praecedente niſi quod globus hic etiam circa punctum B girari poſſit ex §. 13. deriuemus valores

I°. $f = \frac{b + cc}{b} = \frac{7}{5} = 1,40000$

II°. $a - f = 1,60000$ et

III°. $h = \sqrt{((a-f)^2 + 4ab)} = 3,81575$

vnde porro colligimus

$$mm = \frac{bg(a + f + h)}{acc} = \frac{(156,250)(0,58424)}{1,20000} = 76,07332$$

hinc $m = 8,72200$ porro

$$nn = \frac{bg(a + f + h)}{acc} = \frac{(156,250)(8,21575)}{1,20000} = 1069,768 \text{ et}$$

hinc $n = 32,70730$

pro ipſis autem angulis ϑ et Φ habemus

$\frac{b}{h} = 0,26207$, $\frac{h - a + f}{2h} = 0,29036$ et $\frac{h + a - f}{2h} = 0,70967$

hincque anguli ϑ et Φ ita definientur

$$\vartheta = 0,26207\,C\,\text{ſin.}\,(mt+\mu) - 0,26207\,E\,\text{ſin.}\,(nt+\nu) \text{ et}$$
$$\Phi = 0,29036\,C\,\text{ſin.}\,(mt+\mu) + 0,70967\,E\,\text{ſin.}\,(nt+\nu)$$

denique pro vtroque motu angulari inuenimus

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2,28578\,C\,\text{coſ.}\,(mt+\mu) - 8,57160\,E\,\text{coſ.}\,(nt+\nu) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = 2,53253\,C\,\text{coſ.}\,(mt+\mu) + 23,21159\,E\,\text{coſ.}\,(nt+\nu)$$

his inuentis ſumamus primo pendulum initio huiusmodi motum accepiſſe, vt fuerit $E = O$ et euidens eſt motum oſcillatorium fore regularem, et vnamquamque oſcillationem abſolui tempore $= \frac{\pi}{m} = 0,36019$, quod tempus ergo paulisper maius eſt quam in pendulo rigido, quod erat $0,35984$ ſec. idque in ratione $1029 : 1028$ ita vt dum pendulum rigidum abſoluit 1029 vibrationes, flexile tantum abſoluat 1028. Vt nunc definiamus quomodo pendulum ad talem motum regularem ſit incitandum, ponamus initio vbi $t = O$ totum motum a quiete incepiſſe ſicque fuerit neceſſe eſt $\mu = \nu = 90$ gr. ex quo initio ob $E = O$ erat $\vartheta = 0,26207\,C$ et $\Phi = 0,29036\,C$ vnde patet ratio inter hos duos angulos initiales quae erat $\vartheta : \Phi = 9 : 10$. Caeterum ſi filum A B prae radio globi B C adhuc longius acciperetur differentia inter vtrasque oſcillationes multo minor eſſet proditura ita vt pro longioribus filis pro euaneſcente haberi poſſit.

§. 27. Conſideremus etiam alterum motum regularem quo $C = O$ et tempus vnius cuiusque

oſcil-

oſcillationis $= \frac{\pi}{n} = 0,09605$ ideoque fere quater breuius quam caſu praecedente; ad talem autem motum pendulum initio ex quiete incitabitur ſi ob $C = O$ et $b = 90$ gr. capiatur angulus $\vartheta = -0,26207\,E$ et $\Phi = 0,70967\,E$ penduli igitur figura ipſo initio ita comparata fuerit neceſſe eſt, vt producto radio BC vsque ad verticalem in o ſit proxime $BO = 1,1079$ ita vt centrum globi durante hoc motu vix a linea verticali recedat quandoquidem rectae AB et BO eandem inter ſe teneant rationem quam anguli Φ et ϑ.

§. 28. Contemplemur vero etiam alium motum mixtum et quidem eum, qui oritur, ſi initio centrum globi C in ipſam directionem fili AB productam incidat hincque pendulum ſubito demittatur, vt vterque motus a quiete incipiat, fueritque declinatio penduli VABC $= \alpha$ ideoque $\vartheta = \Phi = \alpha$. Quia igitur initio ſit $t = O$ et $\mu = \nu = 90$ gr. habebimus

$$\alpha = 0,26207\,C - 0,26207\,E \text{ et}$$
$$\alpha = 0,29036\,C + 0,70967\,E$$

ex priore ſit

$C = E + 3,81575\,\alpha$ qui valor in altera ſubſtitutus dat $E = -0,10795\,\alpha$ hinc $C = 3,70780\,\alpha$.

§. 29. Quia nunc litteras C, E per angulum minimum α datum determinauimus et anguli μ et ν inuenti ſunt recti vnde ſit

$$\text{ſin.}(mt+\mu)=\text{coſ.}\,mt \quad \text{et} \quad \text{ſin.}(nt+\nu)=\text{coſ.}\,nt$$

tum vero

$$\text{coſ.}\,mt+\mu)=-\text{ſin.}\,mt \quad \text{et} \quad \text{coſ.}(nt+\nu)=-\text{ſin}\,nt.$$

Pro motu penduli ſequentes formulas penitus determinatas habebimus

I°. $\vartheta=0,97172\,\alpha\,\text{coſ.}\,mt+0,02829\,\alpha\,\text{coſ.}\,nt$

II°. $\Phi=1,07625\,\alpha\,\text{coſ.}\,mt-0,07661\,\alpha\,\text{coſ.}\,nt$

III°. $\frac{d\vartheta}{dt}=-8,47539\,\alpha\,\text{ſin.}\,mt-0,92533\,\alpha\,\text{ſin.}\,nt$

IV°. $\frac{d\Phi}{dt}=-9,39031\,\alpha\,\text{ſin.}\,mt+2,50572\,\alpha\,\text{ſin}\,nt$

vbi vti inuenimus eſt $m=8,72200$ et $n=32,70717$.

§. 30. Ex his ergo formulis ad datum tempus quodcunque t in minutis ſecundis expreſſum, non ſolum poſitio fili A B et corporis annexi B M N ſed etiam vtriusque motus angulis definiri poterit. Statim autem manifeſtum eſt ob terminos poſteriores angulum nt inuoluentes motum oſcillatorium aliquantisper perturbari debere; interim tamen quia haec membra prioribus multo ſunt minora, haec perturbatio ſatis erit exigua; quantopere autem ob hanc cauſam in dinumerandis oſcillationibus aberrari poſſit, aliquanto accuratius inueſtigemus, ſi quidem iam ſupra obſeruauimus oſcillationes huius penduli flexilis tam parum ab oſcillationibus eiusdem penduli, ſi eſſet rigidum, diſcrepare, et tempore 1028 oſcillationum vnica tantum oſcillatione errari.

§. 31.

§. 31. Quo autem facilius in has perturbationes inquiramus, obſeruemus ſi poſteriora membra deeſſent motum ita futurum eſſe regularem, vt tempus vnius cuiusque oſcillationis futurum ſit $t = \frac{\pi}{m} = 0,36019$ ſec. concipiamus igitur totum tempus in huiusmodi interualla diuiſum et ob membra poſteriora in initio cuiusque horum interuallorum neque filum A B neque ipſum corpus B M N in maxima digreſſione a ſitu verticali A V reperietur ſed interdum vel iam praeteriiſſe vel nondum eo pertigiſſe deprehendetur, tum vero etiam neque filum neque corpus ad quietem erit redactum quia tum neque $\frac{d\vartheta}{dt}$ neque $\frac{d\Phi}{dt}$ penitus euaneſcent; quod quo clarius pateat elapſa iam ſint λ huiusmodi interualla temporis ita vt ſit $mt = \lambda\pi$ fierique poterit vt tum prodeat

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,92533\,\alpha \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = 2,50572\,\alpha$$

ponamus igitur ſumto $mt = \lambda\pi + \omega$ pendulum penitus ad quietem reduci, eritque pro filo

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{0,92533}{8,47589} = \frac{1}{9}$$

proxime, cui tempus reſpondet $= \frac{1}{78}$ ſec. ita vt in aeſtimatione ſiue initii ſiue finis cuiusque oſcillationis errari poſſit, parte circiter ſeptuageſima vnius minuti ſecundi, quare cum huiusmodi tantilli errores in numeratione oſcillationum ne quidem percipi queant, ob hanc rationem ne minima quidem perturbatio motus oſcillatorii reſultare eſt cenſenda;

omnes

omnes autem aberrationes penitus ad nihilum redigentur, ſi longitudo fili prae magnitudine globi adhuc maior accipiatur, quemadmodum in experimentis fieri ſolet, vbi etiam prior error memoratus $\frac{1}{1528}$ multo magis diminuitur, vnde concludimus dummodo longitudo fili ad radium globi maiorem teneat rationem quam 3 : 1 tum in motu oſcillatorio nullum plane errorem a flexibilitate penduli eſſe metuendum.

DE

DE PRESSIONE PONDERIS IN PLANVM CVI INCVMBIT.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quantam preſſionem planum a pondere incumbente ſuſtineat, in elementis doceri ſolet, ſcilicet ſi planum fuerit horizontale preſſionem ipſi ponderi eſſe aequalem, ſin autem ad horizontem ſit inclinatum, eam preſſionem in ratione ſinus totius ad coſinum inclinationis eſſe minuendam; tum vero vtroque caſu directionem preſſionis in planum eſſe normalem, et per centrum grauitatis corporis tranſire. Hoc autem de tota tantum preſſione, quam planum ſuſtinet, eſt intelligendum; neutiquam vero ab Auctoribus definitur, quantis viribus ſingula plani puncta, quibus pondus ſuſtinetur, vrgeantur.

2. Haud equidem memini ſimpliciſſimum caſum, quo pondus ternis pedibus plano inſiſtit, euolutum videre; quem autem ſequenti modo ſatis concinne expedire licet: Inſiſtant plano terni pedes in punctis A, B, C et recta ex centro grauitatis ad planum normaliter ducta cadat in punctum O, tum Tab. II. Fig. 1.

 ductis

ductis rectis O A, O B, O C, item lateribus A B, B C, C A; tota preſſio ſe habebit ad preſſionem in puncto A, vel B, vel C, quemadmodum area totius trianguli A B C ad aream trianguli, ſiue B O C, ſiue A O C, ſiue A O B; ex quo intelligitur preſſiones ſingulorum pedum inter ſe aequales non fore, niſi punctum O in ipſum centrum grauitatis trianguli A B C incidat.

3. Verum ſi pondus quatuor pedibus plano inſiſtat, determinatio ſingularum preſſionum non ſolum multo magis ardua deprehenditur, ſed etiam prorſus incerta et lubrica videtur; ſtatim enim ac illi pedes, non exactiſſime inter ſe fuerint aequales, ita vt omnes plano pariter innitantur, manifeſtum eſt totum pondus a ternis tantum pedibus ſuſtentari et quartum penitus fore ſuperfluum; atque haec incertitudo multo magis locum habet, ſi numerus pedum adhuc fuerit maior, vel ſi pondus baſi quadam continua plano incumbat; tum enim niſi tam ipſum planum, quam baſis corporis perfecte inter ſe congruant et leuiſſimae aſperitates in iis promineant plerumque totum pondus in tribus tantum punctis ſuſtentabitur.

4. Ne autem perfectiſſima illa pedum aequalitas, qualem vix admittere licet, negotium faceſſat, concipiamus planum ſiue ſolum cui pondus incumbit, non adeo eſſe durum, vt nullam plane impreſſionem recipere poſſit, ſed quaſi panno eſſe obductum, cui pedes illi aliquantillum ſe immergere queant;

queant; vbi quidem tuto aſſumere licet impreſſionem cuiusque pedis proportionalem eſſe vi, qua ſolo innititur, atque hoc principio conceſſo, totum hoc negotium facile expediri poterit. Neminem autem pannus ille preſſioni cedens offendat, etſi enim illi mollitiem quandam tribuimus, eam tamen quousque libuerit, diminuere licebit; ita vt tandem indolem ſoli illius, cui pondus reuera inſiſtit, adipiſcatur.

5. Conſideremus igitur quatuor pedes, quorum extremitates A, B, C, D in plano terminentur, qui ſolo innixi in pannum illum per ſpatiola A α, B β, C γ, D δ penetrent, quae ſpatiola quidem adeo tamquam infinite parua ſpectare licebit. Hoc autem poſito, primum puncta α, β, γ, δ tanquam pedum extremitates, etiamnunc in eodem plano erunt poſita; deinde vero ipſa iſta ſpatiola A α, B β, C γ, D δ preſſionibus quibus ſinguli pedes ſolo innituntur, cenſenda ſunt proportionalia. Hinc igitur viciſſim ſi in punctis A, B, C, D ſuper plano erigantur perpendicula A α, B β, C γ, et D δ quae ſint ipſis preſſionibus in his punctis proportionalia, neceſſe eſt, vt puncta α, β, γ, δ reperiantur in eodem plano, atque hoc eſt principium, cui totam noſtram inueſtigationem tuto ſuperſtruere poterimus, idque eo magis, quod iam non amplius idea illius panni, neque impreſſiones in eo factae, in cenſum veniunt, hae enim ideae, hic tantum in ſubſidium noſtrae imaginationis ſunt vocatae.

Principium Generale.

Tab. II. Fig. 3. 6. Siue pondus pluribus pedibus innitatur, ſiue baſi incumbat plana cuiuscunque figurae, ſit punctum M ſiue extremitas cuiuspiam pedis, ſiue elementum quodpiam baſis pro quo preſſio quaeritur. Concipiatur ibi perpendiculariter erecta linea $M\mu$ ipſi preſſioni proportionalis, atque neceſſe eſt, omnia iſta puncta μ in quopiam plano terminari; hoc igitur principio ſtabilito, quemadmodum pro omnibus caſibus preſſionem in ſingulis baſis punctis definiri oporteat, hic ſum expoſiturus.

7. Primum igitur in indolem plurium atque adeo infinitorum punctorum in eodem plano exiſtentium inquiramus, quem in finem ſit recta FG interſectio, qua planum cui pondus incumbit, a plano illo per omnia puncta μ tranſeunte interſecatur, quae quia vti incognita ſpectari debet, ſumamus pro lubitu axem quendam fixum AB, ad quem poſitionem punctorum M referamus ope normalium MN ad hunc axem ductarum, ac vocemus coordinatas $AN = x$, $NM = y$ et ipſum perpendiculum $M\mu$ preſſionem referens $= z$, ita vt punctum μ more ſolito ternis coordinatis x, y et z inter ſe normalibus definiatur. Tum vero pro interſectione ante memorata FG, ponamus ſpatium $AF = f$, angulum $AFG = \zeta$, inclinationem autem binorum planorum $= \theta$. Iam ex puncto M, pariterque ex N ad hanc rectam FG ducantur normales MV, NL, et NT parallela ipſi FG, ac iungatur recta μV. Nunc igitur

igitur ex triangulo N F L, obtinemus ob

$TN = f + x$, $FL = (f+x) \text{coſ.} \zeta$, $NL = (f+x) \text{ſin.} \zeta$;

tumvero ex triangulo M N T vbi angulus N M T itidem eſt ζ, colligimus

$NT = y \text{ ſin.} \zeta$, $MT = y \text{ coſ.} \zeta$,

hinc itaque concludimus

$MV = y \text{ coſ.} \zeta + (f + x) \text{ ſin.} \zeta$ et
$FV = (f + x) \text{ coſ.} \zeta - y \text{ ſin.} \zeta$;

quare quum ſit angulus M V $\mu = \theta$, conſequimur

$$z = (f + x) \text{ ſin.} \zeta . \text{Tang.} \theta + y \text{ coſ.} \zeta . \text{Tang.} \theta .$$

8. Hinc igitur intelligitur relationem ternarum coordinatarum x, y et z ſemper huiusmodi aequatione expreſſum iri $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, vbi ſcilicet litterae α, β, γ ſunt conſtantes; comparatione autem huius formulae cum ante inuenta, inſtituta, adipiſcimur hos valores

$$\alpha = f \text{ſin.} \zeta . \text{Tang.} \theta ; \ \beta = \text{ſin.} \zeta \text{Tang.} \theta ; \ \gamma = \text{coſ.} \zeta \text{Tang.} \theta$$

vnde viciſſim ex cognitis α, β, et γ innoteſcunt valores

$$f = \frac{\alpha}{\beta}; \ \text{Tang.} \zeta = \frac{\beta}{\gamma}; \ \text{Tang.} \theta = \frac{\beta}{\text{ſin.} \zeta} = \frac{\gamma}{\text{coſ.} \zeta},$$

quibus poſitio plani per puncta μ tranſeuntis determinatur.

Problema Generale.

9. Quaecunque fuerit figura baſis $f g h k$, qua corpus quodpiam ſolo plano incumbit, inueſtigare omnes preſſiones, quas ſingula baſis elementa, ſuſtinent. Tab. II. Fig. 4.

 Solutio.

Solutio.

Denotet G preſſionem totalem corporis incumbentis, et recta ex eius centro grauitatis in planum perpendiculariter demiſſa, incidat in punctum O, ac ſumtis pro arbitrio binis axibus A B ac A C inter ſe normalibus, ad eos ex O agantur perpendiculares O F et O G, vocenturque $AF = f$ et $AG = g$, tum vero pro puncto baſis quocunque M ponantur coordinatae $AX = x$ et $XM = AY = y$, ipſa autem preſſio quaeſita in puncto M vocetur $= z$, modo autem vidimus, poni oportere $z = \alpha + \beta x + \gamma y$. Quum autem haec preſſio z reſpondeat elemento baſis $M\,m$ cuius areola $= dx\,dy$, ipſa preſſio quam haec areola ſuſtinet, erit $z\,dx\,dy$, cuius integrale ob geminam variabilem x et y bis ſumtum, preſſioni totali hoc eſt ponderi G aequale ſtatui debet, hoc autem integrale duplicatum more recepto repraeſentemus per $\int\int z\,dx\,dy$, ita vt eſſe debeat $\int\int z\,dx\,dy = G$ ideoque loco z eius valore ſubſtituto habebimus hanc aequationem:

$$\alpha \int\int dx\,dy + \beta \int\int x\,dx\,dy + \gamma \int\int y\,dx\,dy = G.$$

10. Hac aequatione autem effectus preſſionis nondum exhauritur, ſed inſuper neceſſe eſt, vt etiam ſumma omnium momentorum Elementarium reſpectu cuiusuis axis, aequetur momento preſſionis totalis G in puncto O applicatae, reſpectu eiusdem axis; ſufficit autem hanc aequalitatem pro binis tantum axibus A B et A C conſtituiſſe, quandoquidem demonſtratum eſt, eam ad omnes axes vtcunque aſſum-

aſſumtos extendi. Referamus ergo haec momenta primo ad axem A B, pro quo momentum preſſionis totalis fit $= Gg$, preſſionis autem elementaris $= zydxdy$, ita vt integralibus duplicatis, vt ante ſumendis, eſſe debeat $\int\int yzdxdy = Gg$, ſiue

$$\alpha\int\int ydxdy + \beta\int\int xydxdy + \gamma\int\int yydxdy = Gg.$$

Simili modo reſpectu axis A C, momentum preſſionis totalis eſt Gf, preſſionis vero elementaris $= xzdxdy$, ita vt eſſe debeat $\int\int zxdxdy = Gf$, ſiue euoluendo:

$$\alpha\int\int xdxdy + \beta\int\int xxdxdy + \gamma\int\int xydxdy = Gf.$$

11. Quod ſi ergo ſingula haec integralia per totam baſin $fghk$, cuiuscunque fuerit figurae, extendantur, tres reſultabunt aequationes:

$$\text{I.} \quad \alpha\int\int dxdy + \beta\int\int xdxdy + \gamma\int\int ydxdy = G$$

$$\text{II.} \quad \alpha\int\int ydxdy + \beta\int\int xydxdy + \gamma\int\int yydxdy = Gg$$

$$\text{III.} \quad \alpha\int\int xdxdy + \beta\int\int xxdxdy + \gamma\int\int xydxdy = Gf$$

ex quibus ternas noſtras incognitas α, β, γ expedite definire licebit, quibus inuentis, pro quocunque baſeos puncto M, preſſio quam planum ibi ſuſtinet, erit $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, hocque modo preſſio in ſingulis baſeos punctis innoteſcet.

Scholion.

12. Talibus integrationibus autem duplicatis, tum tantum opus eſt, quando corpus baſin habet, per ſpatium aliquod continuum extenſam, quo quidem caſu ſaepenumero euenire poteſt, vt calculus

ob

ob figuram baſis irregularem, nequidem euolui poſſit, quando autem corpus aliquot pedibus plano inſiſtit, tum nulla plane integratione erit opus, dum terminos ſingulorum pedum, tamquam puncta ſpectare licet et formulae noſtrae tantum ad ſingulos pedes ſeorſim ſunt accommodandae, cuiusmodi quidem caſus ante ſumus tractaturi, quam ad baſes continuae extenſionis progrediamur. Neque vero abſolute opus eſt, vt bini illi axes AB et AC ad quos momenta retulimus, ſint inter ſe normales, ſed iis quoque obliquitatem quamcunque tribuere licet; dummodo etiam coordinatae x et y eandem obliquitatem inter ſe ſeruent. Quia enim tum vniverſus calculus ad praecedentem caſum reduceretur, ſingulas diſtantias oblique ſumtas per ſinum obliquitatis multiplicando; euidens eſt aequationes noſtras tum per eundem ſinum diuiſibiles fore, ita vt totus calculus nullam inde mutationem ſit ſubiturus.

Problema I.

13. Si pondus plano incumbat in tribus punctis A, B, C definire preſſionem in ſingulis his punctis.

Solutio.

Tab. II. Fig. 5. Directio preſſionis totalis, quae ſit $= G$, cadat in punctum O ex quo binis lateribus AB et AC agantur parallelae OP et OQ et ſecundum has directiones, conſtituamus noſtras coordinatas x et y initio ſumto in puncto A. Pro hoc ergo puncto

punčto A erit $x = 0$ et $y = 0$, ideoque preſſio $= \alpha$. Pro punčto B habebimus $x = AB$ et $y = 0$, hincque preſſio in hoc loco $= \alpha + \beta . AB$, at pro punčto C ob $x = 0$ et $y = AC$ preſſio erit $= \alpha + \gamma\, AC$, quamobrem prima aequatio erit

$$G = 3\alpha + \beta\, AB + \gamma\, AC.$$

Momenta autem reſpečtu axis AB oblique ſumta, praebent hanc ſecundam aequationem

$$G. OP = \alpha\, AC + \gamma\, AC^2.$$

Tertia denique aequatio ex momentis reſpečtu lateris AC colligitur

$$G. OQ = \alpha . AB + \beta . AB^2.$$

Ex tertia colligimus

$$\beta . AB = \frac{G.OQ}{AB} - \alpha,$$

ex ſecunda vero

$$\gamma . AC = \frac{G.OP}{AC} - \alpha,$$

qui valores in prima ſubſtituti praebent

$$G = \frac{G.OQ}{AB} + \frac{G.OP}{AC} + \alpha,$$

hincque

$$\alpha = G\left(1 - \frac{OQ}{AB} - \frac{OP}{AC}\right) = G\left(1 - \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right)$$

quae eſt preſſio in ipſo punčto A, preſſio autem in punčto B, quae erat

$$\alpha + \beta . AB, \text{ fit } = \frac{G.OQ}{AB} = \frac{G.AP}{AB};$$

ac denique preſſio in C quae erat

$$\alpha + \gamma . AC \text{ nunc fit } = \frac{G.AQ}{AC}.$$

 Coroll.

Coroll.

14. Haec ſolutio cum ſupra data egregie convenit, cum enim preſſio totalis G, ſit ad preſſionem in puncto B : : A B : A P, hoc eſt vt area trianguli A B C ad aream trianguli A P C, iam vero triangulum A O C = triangulo A P C, erit ergo tota preſſio G ad preſſionem in B, vt area totius trianguli A B C ad aream trianguli A O C.

Problema 2.

15. Si pondus plano incumbat in quatuor punctis A, B, C, D ſecundum angulos parallelogrammi diſpoſitis, definire preſſionem in ſingulis his punctis.

Solutio.

Incidat vis totalis = G perpendiculariter in puncto O in planum, capiantur noſtrae coordinatae ſecundum latera parallelogrammi A B et A D quibus ex O parallelae ducantur O P et O Q, ac ſumto initio in A, pro hoc puncto A ambae coordinatae x et y euaneſcent. Pro puncto B habebimus $x = AB$ et $y = 0$, tum pro puncto C erit $x = AB$ et $y = BC = AD$, denique pro quarto puncto D fit $x = 0$ et $y = AD$, vnde preſſiones quaeſitae in his quatuor punctis erunt:

pro puncto $A = \alpha$; pro puncto $B = \alpha + \beta . AB$

pro puncto $C = \alpha + \beta . AB + \gamma . AD$; pro puncto $D = \alpha + \gamma . AD$

ſicque

ſicque prima aequatio ita ſe habebit:

$$G = 4\alpha + 2\beta . AB + 2\gamma . AD.$$

Iam reſpectu axis AB momentum totale eſt G.OP, preſſionum autem in A et B momenta euaneſcunt, in punctis autem C et D duci debent in AD vel CB, vnde noſtra ſecunda aequatio erit:

$$G.OP = 2\alpha AD + 2\gamma . AD^2 + \beta . AB . AD.$$

Tertia autem aequatio ex momentis reſpectu axis AD ſumtis fiet:

$$G.OQ = 2\alpha . AB + 2\beta . AB^2 + \gamma . AB . AD.$$

Quum igitur binae poſteriores coniunctae praebeant:

$$G\left(\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AD}\right) = 4\alpha + 3\beta . AB + 3\gamma . AD,$$

cuius duplum a triplo primae ſubtractum relinquit:

$$G\left(3 - \frac{2AP}{AB} - \frac{2AQ}{AD}\right) = 4\alpha;$$

ſicque iam inuenimus fore preſſionem in puncto

$$A = \frac{G}{4}\left(3 - \frac{2AP}{AB} - \frac{2AQ}{AD}\right),$$

quae expreſſio facile in hanc transformatur:

$$\frac{G}{4}\left(\frac{2BP}{AB} + \frac{2DQ}{AD} - 1\right).$$

Pro reliquis punctis producamus rectas PO et QO in R et S, et omnes quatuor preſſiones quaeſitae ita commodiſſime exprimi videntur:

I. Preſſio in $A = \frac{1}{4}G\left(\frac{2BP}{BA} + \frac{2DQ}{DA} - 1\right)$

II. Preſſio in $B = \frac{1}{4}G\left(\frac{2AP}{AB} + \frac{2CS}{CB} - 1\right)$

III. Preſſio in $C = \frac{1}{4}G\left(\frac{2BS}{BC} + \frac{2DR}{DC} - 1\right)$

IV. Preſſio in $D = \frac{1}{4}G\left(\frac{2CR}{CD} + \frac{2AQ}{AD} - 1\right)$.

Coroll. 1.

16. Fieri igitur poteſt, vt in vno horum quatuor punctorum preſſio euaneſcat, etiamſi punctum O non extra parallelogrammum cadat, in puncto namque A preſſio fiet nulla ſi $\frac{BP}{BA} + \frac{DQ}{DA} = \frac{1}{2}$, id quod innumerabilibus modis fieri poteſt, inter quos ſimpliciſſimus eſt, vbi $BP = \frac{1}{4} AB$ et $DQ = \frac{1}{4} DA$, hoc ſcilicet caſu punctum O ita ſitum erit in diagonali AC, vt eius diſtantia a puncto C, ſit quarta pars ipſius diagonalis AC.

Coroll. 2.

Tab. II. Fig. 7. 17. Operae autem pretium eſt, omnia loca O inueſtigare, quibus preſſio in puncto A euaneſcit, ex ipſa autem aequatione $\frac{2BP}{BA} + \frac{2DQ}{DA} = 1$, patet facto $BP = 0$, vt punctum O in rectam BC incidat, et quia tum $DQ = \frac{1}{2} DA$, punctum O praeciſe in punctum medium E lateris BC incidere. Similique modo ſumto $DQ = 0$, patet punctum O in medium lateris DC quod ſit F incidere, quum igitur locus omnium punctorum O ſit ad lineam rectam, omnia haec puncta cadent in rectam EF, vnde manifeſtum eſt, quoties punctum O inciderit in rectam EF, tum preſſionem in puncto A ſemper fore nullam, atque hinc ſimul intelligitur, ſi punctum O vltra hanc rectam EF ſiue intra triangulum CEF cadat, tum preſſionem in puncto A, adeo prodire negatiuam.

Scho-

Scholion.

18. Hic caſus eo magis eſt memorabilis, quod in praxi, nullam certe preſſionem negatiuam concipere licet. Quocirca imprimis nobis erit inquirendum, quid huiusmodi caſibus ſit reuera euenturum. Hunc in finem incipiamus a caſu, quo punctum O in ipſam rectam E F incidit, et quia tum preſſio in puncto A plane fit nulla, res eodem vtique redit, ac ſi pes huic puncto inſiſtens plane abeſſet, et pondus in tribus tantum punctis B, C, D ſuſtentaretur. Hoc idem vero multo magis eueniet, ſi punctum O intra triangulum C E F vbicunque inciderit, et quia tum certi ſumus, totum pondus a tribus tantum punctis B, C, D ſuſtineri; preſſio in his punctis eodem prorſus modo ſe habebit, vti in Problemate praecedente eſt definita. Hic igitur notaſſe iuuabit, tum demum omnes quatuor pedes ad onus ſuſtentandum concurrere, ſi punctum O intra parallelogrammum inſcriptum E F G H cadat, vbicunque enim extrinſecus veluti in triangulo C E F reperiatur, pes oppoſitus pro ſuperfluo haberi debebit.

Problema 3.

Fulciatur pondus octo pedibus, quorum quatuor in angulis A, B, C, D parallelogrammi plano inſiſtant, reliqui vero E, F, G, H in puncta media inter illos cadant, ita vt latera parallelogrammi in his punctis bifariam ſecentur; definire preſſiones in ſingulis his punctis. Tab. II. Fig. 8.

 Solutio.

Solutio.

19. Ducamus rectas E G et F H ſe mutuo in I ſecantes, quas pro noſtris axibus aſſumamus, et ex puncto O iis parallelas agamus O P et O Q, atque initio in puncto I conſtituto, abſciſſas poſitivas x dextrorſum, negatiuas vero ſiniſtrorſum, tum vero applicatas poſitiuas y ſurſum, at negatiuas deorſum capiamus. His poſitis preſſiones in ſingulis punctis ita ſe habebunt:

I. Preſſio in A $= \alpha - \beta . IH - \gamma . IE$

II. Preſſio in B $= \alpha + \beta . IF - \gamma . IE$

III. Preſſio in C $= \alpha + \beta . IF + \gamma . IG$

IV. Preſſio in D $= \alpha - \beta . IH + \gamma . IG$

V. Preſſio in E $= \alpha \qquad - \gamma . IE$

VI. Preſſio in F $= \alpha + \beta . IF$

VII. Preſſio in G $= \alpha \qquad + \gamma . I . G$

VIII. Preſſio in H $= \alpha - \beta . IH$.

Quarum preſſionum omnium ſumma eſt $G = 8 . \alpha$, vnde ſi preſſio totalis fuerit $= G$, ſtatim habemus $\alpha = \frac{1}{8} G$, quae eſt noſtra aequatio prima. Nunc ſpectemus ſingula momenta reſpectu axis F I H, ac primo coniunctim conſideremus vires in A et D, quarum vtraque tribus conſtat partibus, ac primae quidem partes α, ſe mutuo in aequilibrio tenentes, eodem modo partes ſecundae $\beta . IH$ ſe mutuo deſtruunt, vnde momentum tantum ex tertiis partibus eſt aeſtimandum, priorem ducendo in $- IE$, poſteriorem vero in $+ IG$, vnde naſcitur momentum $2 \gamma . IG^2$. Eodem modo ex viribus in B et C reſul-

reſultabit quoque idem momentum $2\gamma . IG^2$. Deinde ex viribus E et G illam in $-EI$, hanc vero in $+IE$ ducendo, emergit momentum $+2\gamma . IG^2$. Ex poſtremis viribus F et H autem nullum oritur momentum. Quum ergo preſſionis totalis G momentum reſpectu eiusdem axis ſit $G.OP = G.IQ$, inde colligimus hanc aequationem ſecundam:

$$G.IQ = 6\gamma . IG^2, \text{ ideoque } \gamma = \frac{G.IQ}{6IG^2}.$$

Reſpectu autem alterius axis per ſimile ratiocinium deducimur ad hanc aequationem:

$$G.IP = 6\beta . IF^2, \text{ vnde } \beta = \frac{G.IP}{6IF^2}.$$

Quibus inuentis preſſiones in ſingulis octo punctis ſe habebunt, vt ſequuntur:

I. Preſſio in $A = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} - \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG})$

II. Preſſio in $B = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} - \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG})$

III. Preſſio in $C = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} + \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG})$

IV. Preſſio in $D = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} + \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG})$

V. Preſſio in $E = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} \qquad - \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG})$

VI. Preſſio in $F = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{PI}{IF})$

VII. Preſſio in $G = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} \qquad + \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG})$

VIII. Preſſio in $H = \frac{1}{2} G (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{PI}{IF})$.

Coroll.

20. Si breuitatis gratia ponatur $IF = a$; $IG = b$; $IP = p$; $IQ = q$ iſtae vires ſuccinctius ita repraeſentari poſſunt.

I.

I. Preſſio in $A = \frac{1}{24} G\left(3 - \frac{4p}{a} - \frac{4q}{b}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(a-p)}{a} + \frac{4(b-q)}{b} - 5\right)$

II. Preſſio in $B = \frac{1}{24} G\left(3 + \frac{4p}{a} - \frac{4q}{b}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(a+p)}{a} + \frac{4(b-q)}{b} - 5\right)$

III. Preſſio in $C = \frac{1}{24} G\left(3 + \frac{4p}{a} + \frac{4q}{b}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(a+p)}{a} + \frac{4(b+q)}{b} - 5\right)$

IV. Preſſio in $D = \frac{1}{24} G\left(3 - \frac{4p}{a} + \frac{4q}{b}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(a-p)}{a} + \frac{4(b+q)}{b} - 5\right)$

V. Preſſio in $E = \frac{1}{24} G\left(3 - \frac{4q}{b}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(b-q)}{b} - 1\right)$

VI. Preſſio in $F = \frac{1}{24} G\left(3 + \frac{4p}{a}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(a+p)}{a} - 1\right)$

VII. Preſſio in $G = \frac{1}{24} G\left(3 - \frac{4p}{a}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(a-p)}{a} - 1\right)$

VIII. Preſſio in $H = \frac{1}{24} G\left(3 + \frac{4q}{b}\right) = \frac{1}{24} G\left(\frac{4(b+q)}{b} - 1\right)$.

Scholion.

21. Huiusmodi caſibus, quibus pondus pluribus pedibus plano inſiſtit, fuſius non immoramur; antequam autem baſes per ſpatium aliquod planum extenſas, conſideremus, caſus quosdam quaſi intermedios examinemus, quibus pondus deorſum deſinit in limbum quempiam ſiue rectilineum, ſiue curuilineum, vbi quidem a rectilineis incipere conuenit, quae inueſtigatio, quo minorem difficultatem, ob figuram talis baſis polygonae faceſſat; exordiamur ab vnica linea recta per cuius ſingula puncta tam preſſiones, quam momenta reſpectu binorum axium fixorum inueſtigemus in ſequenti Lemmate.

Lemma.

Tab. II. Fig. 9. Conſtitutis binis axibus A B et A C inter ſe normalibus, quorum reſpectu momenta ſunt aeſtimanda, ſit recta F f portio limbi, quo pondus plano

no innititur; inueſtigare preſſiones per totam hanc lineam, earumque momenta reſpectu binorum axium A B et A C.

Solutio.

22. Pro puncto huius rectae quocunque Y, vocemus noſtras coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ et per principium ſupra ſtabilitum preſſio in hoc puncto erit $\alpha + \beta x + \gamma y$, iam quum haec linea Ff ſit recta, inter has coordinatas dabitur huiusmodi aequatio $y = e + nx$, ita vt ſit $dy = n dx$. Quia nunc praeſata preſſio per elementum Yy extenditur, ob

$$Yy = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + nn)},$$

poſito $\sqrt{(1+nn)} = m$,

tota preſſio per elementum Yy erit

$$= m dx(\alpha + \beta x + \gamma y),$$

cuius ergo integrale eſt

$$m(\alpha x + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \gamma \int y dx) + C,$$

quod vt per totam datam rectam extendatur, primo talis conſtans adiici debet, vt poſito $x = AE$, euaneſcat, tum vero ſtatuatur $x = Ae$, quo facto ſumma preſſionum per Ff erit:

$$m\alpha Ee + \tfrac{1}{2}m\beta(Ae^2 - AE^2) + m\gamma.\,\text{Area}.\,EFef,$$

quae area quum ſit

$$\tfrac{1}{2}Ee(EF + ef), \text{ et ob } Ae^2 - AE^2 = Ee(Ae + AE)$$

fiet ſumma preſſionum per lineam Ff

$$= m Ee(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta(AE + Ae) + \tfrac{1}{2}\gamma(EF + ef)).$$

 Quum

Quum porro preſſio per elementum Y y ſit

$$= m\,dx(\alpha + \beta x + \gamma y)$$

ducatur ea in y, vt eius momentum prodeat reſpectu axis AE, quod ergo erit

$$m\,y\,dx(\alpha + \beta x + \gamma y),$$

pro huius integratione iam vidimus per totam rectam Ff fore

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}e(\mathrm{EF} + ef),$$

bina reliqua integralia ob $y = e + nx$ ſeorſim euoluamus:

Pro littera β

$$\int y\,x\,dx = e\int x\,dx + n\int x^2\,dx$$

quod integrale per totam rectam Ff extenſum praebet

$$\tfrac{1}{2}e(\mathrm{A}e^2 - \mathrm{AE}^2) + \tfrac{1}{3}n(\mathrm{A}e^3 - \mathrm{AE}^3) = \mathrm{E}e(\tfrac{1}{2}e(\mathrm{A}e + \mathrm{AE}) + \tfrac{1}{3}n(\mathrm{A}e^2 + \mathrm{A}e.\,\mathrm{AE} + \mathrm{AE}^2))$$

Pro littera γ

$$\int yy\,dx = ee\int dx + 2en\int x\,dx + nn\int x^2\,dx,$$

quod integrale per totam rectam extenſum dat

$$ee.\,\mathrm{E}e + en.(\mathrm{A}e^2 - \mathrm{AE}^2) + \tfrac{1}{3}n^2(\mathrm{A}e^3 - \mathrm{AE}^3),$$

quae forma in hanc contrahitur:

$$\mathrm{E}e(ee + en(\mathrm{A}e + \mathrm{AE}) + \tfrac{1}{3}nn(\mathrm{A}e^2 + \mathrm{A}e.\,\mathrm{AE} + \mathrm{AE}^2)).$$

Hinc ergo concludimus momentum reſpectu axis AB:

$$m\mathrm{E}e\,\tfrac{1}{2}\alpha(\mathrm{EF} + ef) + m\mathrm{E}e(\tfrac{1}{2}e\beta(\mathrm{A}e + \mathrm{AE}) + \tfrac{1}{3}n\beta(\mathrm{A}e^2 + \mathrm{A}e.\,\mathrm{AE} + \mathrm{AE}^2))$$
$$+ m\mathrm{E}e(\gamma ee + \gamma en(\mathrm{A}e + \mathrm{AE}) + \tfrac{1}{3}\gamma nn(\mathrm{A}e^2 + \mathrm{A}e.\,\mathrm{AE} + \mathrm{AE}^2)).$$

Calculus autem concinnior reddetur, ſi hinc litteras in

in ſubſidium vocatas e et n eliminemus, quum enim ſumto

$x = AE$, fiat $y = EF = e + n.AE$,

poſito autem

$x = Ae$, fiat $y = ef = e + nAe$,

ſubtrahendo elicimus

$n.Ee = ef - EF$, $n = \frac{ef - EF}{Ee}$, indeque $e = \frac{Ae.EF - AE.ef}{Ee}$,

at ex hoc valore n colligimus

$m = \sqrt{(1 + nn)} = \frac{Ff}{Ee}$;

ex quo valore ſumma ipſarum preſſionum per rectam Ff ita concinnius exprimitur:

$Ff(\alpha + \frac{1}{2}\beta(Ae + AE) + \frac{1}{2}\gamma(ef + EF))$.

Tum vero pro momento reſpectu axis AB, ſingulae partes litteris α, β et γ affectae ita exprimentur:

Pro littera α habebimus

$\frac{\alpha}{2}Ff(EF + ef)$.

Pro littera β habebimus

$\frac{\beta.Ff}{6}(ef(2Ae + AE) + EF(2AE + Ae))$

Pro littera γ fiet:

$\frac{\gamma.Ff}{3}(ef^2 + ef.EF + EF^2)$.

Denique pro momento reſpectu alterius axis AC, nouo calculo non eſt opus, ſed ſufficit in forma praecedenti, primo litteras β, γ, tum vero etiam rectas AE et EF, item Ae et ef inter ſe permutaſſe, ſicque reperietur.

Momentum reſpectu axis A C

$$+\tfrac{\alpha}{2} Ff(AE + Ae)$$
$$+\tfrac{\beta}{3} Ff(Ae^2 + Ae.AE + AE^2)$$
$$+\tfrac{\gamma}{6} Ff(Ae(2ef + EF) + AE(2EF + ef)).$$

Problema 4.

Tab. III. Fig. 10. Si pondus plano inſiſtat, limbo triangulari A B D, definire preſſionem in ſingulis punctis huius limbi.

Solutio.

23. Sit preſſio totalis $= G$, cuius directio normaliter incidat in puncto O, vnde ad axem A B ducatur perpendiculum O P, itemque ex angulo D perpendiculum D G. Quum iam limbus conſtet tribus lateribus trianguli A B, A D et B D, ad vnumquodque calculum Lemmatis praemiſſi ſeorſim accommodemus, ac quidem pro latere A B habebimus

$$Ff = AB;\ AE = 0;\ Ae = AB;\ EF = 0 \text{ et } ef = 0$$

vnde colligitur

I°. preſſio per $AB = AB(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta.AB)$

II°. Momentum reſpectu axis $AB = 0$

III°. Momentum reſpectu axis $AC = AB(+\tfrac{\alpha}{2}AB + \tfrac{\beta}{3}AB^2)$.

Deinde pro latere A D habebimus

$$Ff = AD,\ AE = 0,\ Ae = AG;\ EF = 0;\ ef = DG$$

vnde tria noſtra momenta erunt:

1°. Ipſa preſſio in latere $AD = AD(\alpha + \tfrac{\beta}{2}.AG + \tfrac{1}{2}\gamma DG)$

2do

2do Momentum reſpectu axis $AB = AD(\frac{\alpha}{2}.DG + \frac{1}{3}DG.AG + \frac{\gamma}{3}DG^2)$
$= AD \times DG(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\beta\, AG + \frac{1}{3}\gamma\, DG)$

3^{tio} Momentum reſpectu axis $AC = AD(\frac{\alpha}{2}AG + \frac{1}{3}\beta\, AG^2 + \frac{1}{3}\gamma.AG.DG)$
$= AD \times AG(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\beta.AG + \frac{1}{3}\gamma.DG)$.

Pro tertio autem latere B D erit

$Ff = BD,\ AE = AG;\ Ae = AB;\ EF = DG;\ ef = 0$

vnde colligimus

1°. Preſſionem per latus $BD = BD(\alpha + \frac{1}{2}\beta(AB + AG) + \frac{1}{2}\gamma.DG)$

2do Momentum reſpectu axis $AB = BD(\frac{\alpha}{2}DG + \frac{\beta}{6}(DG(2AG + AB)) + \frac{\gamma}{3}DG^2)$

$= BD \times DG(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}AG + \frac{1}{6}\beta AB + \frac{\gamma}{3}DG)$

3^{tio} Momentum reſpectu axis $AD = \frac{1}{2}\alpha BD(AG + AB)$
$+ BD(\frac{\beta}{3}(AB^2 + AB.AG + AG^2) + \frac{1}{6}\gamma(AB.DG + 2AG.DG))$
$= BD \times AG(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}(\frac{1}{2}AB + AG) + \frac{1}{3}\gamma.DG)$
$+ BD.AB(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}(AB + \frac{1}{2}AG) + \frac{1}{6}\gamma.DG)$.

Quum igitur preſſio totalis ſit $= G$, eiusque momentum reſpectu axis $AB = G.OP$, at reſpectu axis $AC = G.AP$, conſequimur tres ſequentes aequationes:

I. $G = \alpha(AB + BD + DC) + \frac{1}{2}\beta(AB^2 + AD \times AG + AB \times BD + AG \times BD)$
$+ \frac{1}{2}\gamma(DG \times AD + DG \times BD)$
$= \alpha(AB + BD + DC) + \frac{1}{2}\beta(AB(AB + AD + BD) + AG.BD - BG.AD)$
$+ \frac{1}{2}\gamma DG(AD + BD)$

II. $G \times OP = \frac{\alpha}{2}(AD.DG + BD \times DG) + \frac{1}{3}\beta.DG(AG(AD + BD) + \frac{1}{2}BD.AB)$
$+ \frac{1}{3}\gamma DG^2(AD + BD)$.

$$\text{III. } G.\,AP = \tfrac{\alpha}{2}(AB^2 + AG.BD + AB.BD + AG \times AD)$$
$$+ \tfrac{\beta}{3}(AB^3 + AD.AG^2 + AB^2.BD + AB.AG.BD + AG^2.BD)$$
$$+ \tfrac{\gamma}{3}(AG.AD.DG + 2AB.DG.BD + AG.DG.BD).$$

Ex quibus ternas litteras α, β, γ determinare licebit, quibus inuentis, preſſiones ſingulorum laterum totas cognoſcemus, at pro quolibet puncto perimetri binis coordinatis x et y indicato, preſſio vti asſumſimus, erit $\alpha + \beta x + \gamma y$.

Coroll.

24. Si triangulum ABD fuerit aequilaterum, vnumque latus vocetur $= a$, erit $AG = \frac{1}{2}a$ et $DG = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, hocque caſu ternae aequationes inventae, ſequentes induent formas

$$\text{I. } G = 3\alpha a + \tfrac{3}{2}\beta a^2 + \tfrac{1}{2}\gamma.\, aa\sqrt{3}.$$
$$\text{II. } G.\,OP = \tfrac{\alpha}{2}aa\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\beta.\, a^3\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\gamma a^3.$$
$$\text{III. } G.\,AP = \tfrac{3}{2}\alpha.\, a^2 + \beta.\, a^3 + \tfrac{1}{2}\gamma a^3\sqrt{3},$$

hinc fit ex prima

$$\text{I}^{\circ}.\ \alpha a = \tfrac{1}{3}G - \tfrac{1}{2}\beta a^2 - \tfrac{1}{6}\gamma a^2\sqrt{3}$$

qui valor in binis reliquis ſubſtitutus praebet

$$\text{II}^{\circ}.\ \frac{G.\,OP}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}G + \tfrac{1}{4}\gamma aa$$
$$\text{III}^{\circ}.\ \frac{G.\,AP}{a} = \frac{G}{2} + \frac{\beta}{4}aa + \tfrac{1}{4}\gamma aa\sqrt{3}.$$

Harum prior ſtatim dat $\gamma aa = 4.G\left(\frac{OP}{a} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$,

tum vero ex poſtrema deducitur

$$\beta aa = \frac{4G}{a}(AP - OP\sqrt{3})$$

conſequenter

$$\alpha a = G\left(\tfrac{2}{3} - \frac{2AP}{a} + \frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{OP}{a}\right).$$

Ex

Ex his valoribus colligitur preſſio lateris

$$AB = G\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{\sqrt{3}}.\ \tfrac{OP}{a}\right)$$

preſſio lateris $AD = G\left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{AP}{a} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}.\ \tfrac{OP}{a}\right)$

preſſio lateris $DB = G\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{AP}{a} - \tfrac{2}{\sqrt{3}}.\ \tfrac{OP}{a}\right)$.

Problema 5.

Sit limbus quo pondus plano incumbit, parallelogrammum rectangulum A B C D, et directio totius preſſionis incidat in punctum O, inuenire preſſionem in ſingulis lateribus.

Solutio.

25. Vocemus latera $AB = CD = b$ et $AC = DB = c$, tum vero $AP = f$ et $PO = g$, exiſtente tota preſſione $= G$, nunc igitur ex Lemmate habebimus:

I°. Pro latere AB, $AE = 0$, $Ae = b$, $EF = 0$, $ef = 0$ et $Ff = AB = b$

ideoque,

I°. preſſionem ipſam $= AB(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta.AB) = b(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta b)$

II°. Moment. pro $AB = 0$

III°. Moment. reſpectu axis $AC = AB(\tfrac{\alpha}{2}.AB + \tfrac{\beta}{3}.AB^2)$
$= \tfrac{\alpha}{2} b^2 + \tfrac{1}{3}\beta.\ b^3$

II. Pro latere CD, $AE = 0$; $Ae = b$; $EF = ef = c$ et $Ff = AB = b$

I°.

I°. preſſio ipſa $= AB(\alpha + \frac{1}{2}\beta . AB + \gamma . AC)$
$= \alpha b + \frac{1}{2}\beta . bb + \gamma bc$

II°. Moment. pro $AB = \alpha bc + \frac{1}{2}\beta bbc + \gamma bc^2$

III°. Moment. pro $AC = \frac{\alpha}{2} bb + \frac{1}{3}\beta b^3 + \frac{\gamma}{2} bbc$.

III. Pro latere AC, $AE = 0$; $Ae = 0$; $EF = 0$; $ef = 0$; et $Ff = c$

I. Ipſa preſſio $= \alpha c + \frac{1}{2}\gamma cc$

II. Moment. reſpect. lateris $AB = \frac{1}{2}\alpha cc + \frac{1}{3}\gamma c^3$

III. Moment. reſpect. axis $AC = 0$,

IV. Pro latere BD; $AE = Ae = b$; $EF = 0$, $ef = c$, et $Ff = 0$.

I. Ipſa preſſio $= \alpha c + \beta cb + \frac{1}{2}\gamma cc$

II. Moment. reſp. lateris $AB = \frac{\alpha}{2} c^2 + \frac{1}{2}\beta bcc + \frac{1}{3}\gamma c^3$

III. Moment. reſp. lateris $AC = \alpha bc + \beta cbb + \frac{\gamma}{2} cbb$.

Atque hinc colligimus tres ſequentes aequationes

I. $2\alpha(b + c) + \beta(bb + bc) + \gamma(bc + cc) = G$

II. $G . OP = \alpha(bc + cc) + \frac{1}{2}\beta cb(b + c) + \gamma c(bc + \frac{2}{3}c^2)$

III. $G . AP = \alpha(bb + bc) + \beta . bb(\frac{2}{3}b + c) + \frac{1}{2}\gamma . bc(b + c)$.

Ex quibus manifeſto ſequitur, poſito $OP = g$ et $AP = f$

$\alpha(b + c) = \frac{G}{2} - \frac{\beta}{2} b(b + c) - \frac{\gamma c}{2}(b + c)$ ideoque

$$\gamma cc(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{6}c) = G(g - \tfrac{c}{2});\ \text{hinc}\ \gamma cc = \frac{G(2g - c)}{(b + \frac{1}{3}c)} = \frac{3G(2g - c)}{3b + c}$$

$$\beta bb(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{6}b) = G(f - \tfrac{b}{2})\ \text{et}\ \beta bb = \frac{G(2f - c)}{(c + \frac{1}{3}b)} = \frac{3G(2f - b)}{3c + b}.$$

Inuentis autem his valoribus α, β, γ, facile erit tam pro ſingulis lateribus, quam pro ſingulis eorum punctis, preſſionem quam ſuſtinent aſſignare.

Pro-

Problema 6.

Si limbus quo pondus plano incumbit, fuerit peripheria circuli centro A, radio $AB = Ab = a$ deſcripti, et directio preſſionis totalis incidat in punctum O, preſſiones in ſingulis peripheriae punctis aſſignare.

Solutio.

26. Diuidamus circulum in ſuos quatuor quadrantes, diametris BAb et CAc, qui ſimul vices noſtrorum axium gerant, et conſideremus primo ſolum quadrantem BAC, in quo ſumamus punctum quodcunque Y, cuius vocemus abſciſſam $AX = x$ et applicatam $XY = y$, ita vt ſit $y = \sqrt{(aa - xx)}$, et arcus CY elementum

$$= \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{a\,dx}{y},$$

iam per hoc elementum, preſſio erit in Y

$$= \alpha + \beta x + \gamma y,$$

cum hoc autem puncto in reliquis quadrantibus ſimul coniungamus puncta analoga, Z, y et z, atque euidens eſt, preſſionem fore in Z

$$= \alpha + \beta x - \gamma y; \text{ in } y = \alpha - \beta x + \gamma v \text{ et in } z = \alpha - \beta x - \gamma v,$$

quarum preſſionum ſumma eſt $= 4\alpha$, quae ducta in elementum arcus et per totum quadrantem CYB integrata, praebet noſtram primam aequationem:

I. $G = 2\pi . \alpha a$.

Nunc colligamus momenta reſpectu axis A B, quae ita ſe habebunt:

ex puncto
$$Y = \alpha y + \beta xy + \gamma . yy$$
$$Z = -\alpha y - \beta xy + \gamma . yy$$
$$y = +\alpha y - \beta xy + \gamma . yy$$
$$z = -\alpha y + \beta xy + \gamma . yy$$
ſumma
$$= 4\gamma . yy$$

quae ducta in elementum arcus $\frac{a\,dx}{y}$, dat formulam integrandam $4\gamma a y\,dx$, at pro toto quadrante fit $\int y\,dx = \frac{1}{4}\pi aa$, vnde quum momentum totius preſſionis ſit $G.OP = G.g$ (poſito $OP = g$) habebimus hanc ſecundam aequationem $G.g = \pi\gamma a^3$. Denique pro axe A C, momenta naſcuntur

ex momento
$$Y = \alpha x + \beta xx + \gamma xy$$
$$Z = \alpha x + \beta xx - \gamma xy$$
$$y = -\alpha x + \beta xx - \gamma xy$$
$$z = -\alpha x + \beta xx - \gamma xy$$
ſumma
$$= +4\beta xx,$$

quae in elementum $\frac{a\,dx}{\surd(aa - xx)}$ ducta, dat formulam integrandam

$\frac{4\beta a xx\,dx}{\surd(aa - xx)}$, at $\int \frac{xx\,dx}{\surd(aa - xx)} = a \int \frac{a\,dx}{\surd(aa - xx)} - \int dx \surd(aa - xx)$.

Iam vero pro totum quadrantem fit

$$\int \frac{a\,dx}{\surd(aa - xx)} = \frac{\pi}{2} a, \text{ et } \int dx \surd(aa - xx) = \int y\,dx = \frac{1}{4}\pi aa$$

vnde colligitur

$$\int \frac{xx\,dx}{\surd(aa - xx)} = \frac{\pi}{4} aa,$$

vnde quum totum momentum ſit $G.AP = G.f$ poſito $AP = f$, tertia aequatio noſtra prodibit, $G.f = \pi . \beta . a^4$. Ergo

Ergo hinc ſtatim deducimus

$$\beta = \frac{C.f}{\pi.a^3}; \quad \gamma = \frac{C.g}{\pi.a^3} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{C}{2\pi a},$$

quocirca pro puncto peripheriae quocunque Y, preſſio erit

$$\frac{C}{2\pi a} + \frac{Cfx}{\pi.a^3} + \frac{Cgy}{\pi.a^3} = \frac{C}{\pi a}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{fx + gy}{aa}\right),$$

vnde pro ſingulis punctis preſſio eſt manifeſta.

Scholion.

27. Hactenus ponderi plano incumbenti eiusmodi dedimus baſin, quae vel tantum ex aliquot conſtaret punctis, vel in limbum linearem deſineret, nunc igitur eiusmodi baſes aggrediamur, quae ſecundum binas dimenſiones ſint extenſae, ac primo quidem pro huiusmodi caſibus, quibus baſis eſt vel triangulum, vel alia figura rectilinea, ſequens Lemma praemittamus.

Lemma.

Si trapezium E F e f fuerit portio baſis cuiuscunque, qua pondus plano incumbit, definire tam totam preſſionem, quam hoc trapezium ſuſtinet, quam eius momenta reſpectu binorum axium inter ſe normalium A B et A C.

Solutio.

28. Quum rectae F E et *fe* ſumantur ad axem A B normales, conſideretur quaecunque intermedia Y X illis parallela, itemque huic proxima *xy*, et conſideretur elementum quodcunque V *v* U *u* Tab. III. Fig. 13.

 rectan-

rectangulum, et pro puncto V ſtatuantur coordinatae $AX = x$ et $XV = v$, eritque preſſio in puncto $V = \alpha + \beta x + \gamma v$, quae quia per totum rectangulum $VvUu$, cuius area eſt $dx\,dv$, valere concipitur, erit preſſio quam hoc elementum ſuſtinet

$$= \alpha\, dx\, dv + \beta\, x\, dx\, dv + \gamma\, v\, dx\, dv,$$

tum vero eius momentum reſpectu axis A B

$$= \alpha\, v\, dx\, dv + \beta\, x\, v\, dx\, dv + \gamma\, v\, v\, dx\, dv$$

et reſpectu axis A C momentum

$$= \alpha\, x\, dx\, dv + \beta\, x^2\, dx\, dv + \gamma\, v\, x\, dx\, dv$$

quas ſingulas partes, duplici integratione tractari oportet, primo igitur abſciſſam x vt conſtantem ſpectemus, et integralia per totam faſciolam elementarem $XYxy$ extendamus, quod fit faciendo poſt integrationem $v = XY = y$, hocque modo colligemus:

Pro faſciola $XYxy$

I. Preſſionem $= \alpha y\, dx + \beta y x\, dx + \frac{1}{2}\gamma y y\, dx$

II. Momentum reſpectu axis $AB = \frac{1}{2}\alpha y y\, dx + \frac{1}{2}\beta y y x\, dx + \frac{1}{3}\gamma y^3\, dx$

III. Momentum reſpectu axis $AC = \alpha y x\, dx + \beta y x^2\, dx + \frac{1}{2}\gamma y^2 x\, dx$

tantum igitur ſupereſt, vt ſingulas has formulas altera vice integremus, et per totam aream trapezii extendamus quod fiet, ſi integralia euaneſcentia reddantur, ponendo $x = AE$ et $y = EF$, tum vero ſtatuatur $x = Ae$ et $y = ef$, in hunc finem, quia linea Ff eſt recta, ſtatuatur $dy = n\, dx$ eritque $n = \frac{ef - EF}{Ee}$, integralia autem ita per notam reductionem expediamus, ſecundum formulam

ſpdq

$\int p\,dq = pq - \int q\,dp.$

Hoc praenotato erit:

1°. $\int y\,dx = yx - \frac{1}{2} n x^2$, ergo pro toto trapezio

$$\int y\,dx = Ae.\,ef - AE.\,EF - \tfrac{1}{2} n (Ae^2 - AE^2)$$

quam formulam quo facilius euoluamus, ſtatuamus

$$AE = E;\ EF = F;\ Ae = e \text{ et } ef = f,$$

ita vt ſit $n = \frac{f-F}{e-E}$. Ideoque

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}(e-E)(f+F)$$

2°. $\int yx\,dx = \frac{1}{2} yx^2 - \frac{n}{2}\int x^2\,dx = \frac{1}{2} yx^2 - \frac{n}{6} x^3$, ergo

$$\int yx\,dx = \tfrac{1}{2} eef - \tfrac{1}{2} EEF - \frac{(f-F)}{6(e-E)}(e^3 - E^3)$$

$$= \tfrac{1}{2} eef - \tfrac{1}{2} EEF - \frac{(f-F)}{6}(ee + eE + E^2), \text{ ergo}$$

$$\int yx\,dx = \tfrac{1}{6}(e-E)(f(2e+E) + F(2E+e))$$

3tio. $\int yy\,dx = \frac{1}{n}\int y^2\,dy = \frac{1}{3n} y^3$. Ideoque

$$\int yy\,dx = \tfrac{1}{3}(e-E)(ff + fF + F^2)$$

4to. $\int yyx\,dx = \frac{xy^3}{3n} - \frac{y^4}{12n^2}$. Ideoque

$$\int yyx\,dx = \tfrac{1}{12}(e-E)(e(3f^2 + 2fF + F^2) + E(3F^2 + 2Ff + f^2))$$

ſiue $\frac{1}{12}(e-E)(2ef^2 + 2EF^2 + (e+E)(f+F)^2)$

5to. $\int y^3\,dx = \frac{1}{n}\int y^3\,dy = \frac{1}{4n} y^4$. Ideoque

$$\int y^3\,dx = \tfrac{1}{4}(e-E)(f^3 + ffF + fF^2 + F^3)$$

6to. $\int yx^2\,dx = \frac{1}{3} yx^3 - \frac{1}{3}\int x^3\,dy = \frac{1}{3} yx^3 - \frac{n}{12} x^4$. Ideoque

$$\int yx^2\,dx = \tfrac{1}{12}(e-E)(f(3e^2 + 2eE + E)^2 + F(3E^2 + 2Ee + e^2))$$

ſiue $\frac{1}{12}(e-E)(2fe^2 + 2FE^2 + (f+F)(e+E)^2)$.

Quocirca tres formulae principales quas inuenimus ſequenti modo exprimentur:

I. Preſſio $= \frac{1}{2}\alpha(e-E)(f+F) + \frac{1}{6}\beta(e-E)(f(2e+E)+F(2E+e))$
$+ \frac{1}{6}\gamma(e-E)(ff+fF+F^2)$

II. Momentum reſpectu AB $= \frac{1}{6}\alpha(e-E)(ff+fF+F^2)$
$+ \frac{1}{24}\beta(e-E)(2ef^2+2EF^2+(e+E)(f+F)^2)$
$+ \frac{1}{12}\gamma(e-E)(f^3+ffF+fF^2+F^3)$

III. Moment. reſpectu axis AC $= \frac{1}{6}\alpha(e-E)(f(2e+E)+F(2E+e))$
$+ \frac{1}{12}\beta(e-E)(2fe^2+2FE^2+(f+F)(e+E)^2)$
$+ \frac{1}{24}\gamma(e-E)(2ef^2+2EF^2+(e+E)(f+F)^2)$.

Problema 7.

Fig. 10. Si baſis qua pondus plano incumbit, fuerit triangulum ABD et media directio preſſionis totalis G cadat in punctum O, inuenire preſſionem in ſingulis baſeos punctis.

Solutio.

29. In baſin AB demiſſo perpendiculo DG vocentur $AG = a$ et $BG = b$ et $DG = c$, tum vero ſit $AP = p$ et $PO = q$ et quia baſis conſtat partibus AGD et GDB, ad vtramque Lemma praecedens accommodemus, ac primo pro ſpatio ADG, habebimus $E = 0$, $F = 0$, $e = a$, $f = c$, hincque tres formulae noſtrae erunt

I. Preſſio $= \frac{1}{2}\alpha . ac + \frac{1}{3}\beta a^2 c + \frac{1}{6}\gamma acc$

II. Moment. reſpect. AB $= \frac{1}{6}\alpha aacc + \frac{1}{8}\beta aacc + \frac{1}{12}\gamma ac^3$

III. Moment. reſpect. AC $= \frac{1}{3}\alpha aac + \frac{1}{4}\beta a^3 c + \frac{1}{8}\gamma a^2 c^2$.

Pro

Pro altero autem triangulo GDB, quia $E = a$, $F = c$, $e = a + b$ et $f = 0$, habebimus

I. Preſſionem $= \frac{1}{2}\alpha . bc + \frac{1}{6}\beta . bc(3a+b) + \frac{1}{6}\gamma bcc$

II. Moment. reſp. AB $= \frac{1}{6}\alpha bcc + \frac{1}{24}\beta . bcc(4a+b) + \frac{1}{12}\gamma bc^3$

III. Moment. reſp. AC $= \frac{1}{6}\alpha bc(3a+b) + \frac{1}{12}\beta bc(6aa+4ab+bb)$
$+ \frac{1}{24}\gamma bcc(4a+b)$.

His igitur coniungendis nanciſcimur tres ſequentes aequationes:

$$\text{I}^{\circ}.\ G = \tfrac{1}{2}\alpha c(a+b) + \tfrac{1}{6}\beta c(2a^2 + 3ab + bb) + \tfrac{1}{6}\gamma cc(a+b)$$
$$= (a+b)(\tfrac{1}{2}\alpha c + \tfrac{1}{6}\beta c(2a+b) + \tfrac{1}{6}\gamma cc)$$

$$\text{II}.\ Gq = \tfrac{1}{6}\alpha cc(a+b) + \tfrac{1}{24}\beta cc(3aa+4ab+bb) + \tfrac{1}{12}\gamma c^3(a+b)$$

$$\text{III}.\ Gp = \tfrac{1}{6}\alpha c(2a^2+3ab+bb) + \tfrac{1}{12}\beta c(3a^3+6aab+4abb+b^3)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\gamma cc(3aa+4ab+bb)$$
$$= \tfrac{1}{6}\alpha c(a+b)(2a+b) + \tfrac{1}{12}\beta c(a+b)(3aa+3ab+bb)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\gamma cc(a+b)(3a+b).$$

Quarum ſecunda in $\frac{3}{c}$ ducta ſubtrahatur a prima, et remanebit

$$G - \frac{3Gq}{c} = G(1 - \frac{3q}{c}) = -\frac{\beta c}{24}(a+b)(a-b) - \tfrac{1}{12}\gamma cc(a+b)$$

Deinde tertia ducta in 3 a prima in $2a+b$ ducta ſubtrahatur et prodibit

$$G(2a+b-3p) = -\tfrac{1}{12}\beta c(a+b)(aa+ab+bb) - \tfrac{1}{24}\gamma cc(a+b)(a-b).$$

Quarum prior ducta in $(a-b)$ ſi a duplo poſterioris ſubtrahatur relinquet:

$$G(4a+2b-6p-(a-b)(1-\frac{3q}{c})) = -\tfrac{1}{8}\beta c(a+b)^3 \text{ ſiue}$$
$$G(a+b-2p+(a-b)\frac{q}{c})) = -\tfrac{1}{24}\beta c(a+b)^3$$

vnde

vnde β determinatur ex quo deinceps et γ et α innoteſcent.
Eſt vero

$$-\tfrac{1}{24}\gamma cc(a+b)^3 = G(b(a+b)+p(a-b)-2(aa+ab+bb)\tfrac{q}{c})$$

et $+\tfrac{1}{6}\alpha c(a+b)^2 = G(3(a+b)-4p-\tfrac{4bq}{c})$.

Corollarium I.

30. Si baſis fuerit triangulum rectangulum AGD, quod fit ſi $b=0$ ternae noſtrae aequationes erunt:

I. $G = \tfrac{1}{2}\alpha aac + \tfrac{1}{3}\beta a^2c + \tfrac{1}{6}\gamma acc$

II. $\tfrac{Gq}{c} = \tfrac{1}{6}\alpha aac + \tfrac{1}{8}\beta a^2c + \tfrac{1}{12}\gamma acc$

III. $\tfrac{Gp}{a} = \tfrac{1}{3}\alpha aac + \tfrac{1}{4}\beta a^2c + \tfrac{1}{8}\gamma acc$.

Hinc

$$\tfrac{1}{6}\alpha ac = G(3-\tfrac{4p}{a})$$

$$\tfrac{1}{24}\beta aac = G(\tfrac{2p}{a}-\tfrac{q}{c}-1)$$

$$\tfrac{1}{24}\gamma acc = G(\tfrac{2q}{c}-\tfrac{p}{a})$$

atque hinc pro quouis puncto huius baſis, binis coordinatis x et y determinato, preſſio erit

$$= \alpha + \beta x + \gamma y.$$

Coroll. 2.

31. Si baſis fuerit triangulum Iſoſceles quod euenit ſi $b=a$, ternae aequationes noſtrae ſunt

$$G = \alpha aac + \beta aac + \tfrac{1}{3}\gamma acc$$

$$\tfrac{Gq}{c} = \tfrac{1}{3}\alpha aac + \tfrac{1}{3}\beta aac + \tfrac{1}{6}\gamma acc$$

$$\tfrac{Gp}{a} = \alpha aac + \tfrac{7}{6}\beta aac + \tfrac{1}{3}\gamma acc$$

Hinc

Hinc fit

$$\tfrac{1}{6}\beta aac = G(\tfrac{p}{a} - 1);\ \tfrac{1}{6}\gamma acc = G(\tfrac{3q}{c} - 1);\ \tfrac{1}{3}\alpha ac = G(3 - \tfrac{2q}{c} - \tfrac{2p}{a}).$$

Si praeterea fuerit $p = a$, ita vt punctum O cadat in perpendiculum D G, erit

$$\beta = 0;\ \tfrac{1}{3}\alpha ac = G(1 - \tfrac{2q}{c}) \text{ ſiue}$$

$$\alpha = \tfrac{3G}{ac}(1 - \tfrac{2q}{c});\ \beta = 0;\ \gamma = \tfrac{6G}{acc}(\tfrac{3q}{c} - 1).$$

Si fuerit $q = c$ erit

$$\alpha = -\tfrac{3G}{ac};\quad \beta = 0;\quad \gamma = +\tfrac{12G}{acc}.$$

Sin autem fuerit $q = \frac{1}{3}c$ quo caſu punctum O in ipſum grauitatis trianguli cadit, fiet etiam $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{G}{ac}$, et preſſio vbique erit conſtans.

Coroll. 3.

32. Quodſi vero in formulis generalibus ſtatim ponamus $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; quia tum eſt $\alpha = \frac{2G}{c(a+b)}$, reperiemus $p = \frac{2a+b}{3}$ et $q = \frac{1}{3}c$, ſicque punctum O incidet in ipſum centrum grauitatis trianguli.

Problema.

Si baſis qua pondus plano incumbit, fuerit parallelogrammum rectangulum A B C D et directio preſſionis totalis incidat in punctum O, aſſignare preſſionem in ſingulis punctis. Fig. 10.

Solutio.

33. Ponamus vt ſupra $AB = b$ et $AC = c$, item $AP = p$ et $PO = q$ vnde pro noſtro Lem-

mate erit $E = 0$; $e = b$; $F = c$ et $f = c$, hincque ſtatim obtinentur ſequentes tres aequationes

I. $G = \alpha b c + \frac{1}{2}\beta b b c + \frac{1}{2}\gamma b c c$

II. $\frac{Gq}{c} = \frac{1}{2}\alpha b c + \frac{1}{4}\beta b b c + \frac{1}{3}\gamma b c c$

III. $\frac{Gp}{b} = \frac{1}{2}\alpha b c + \frac{1}{3}\beta b b c + \frac{1}{4}\gamma b c c$

vnde ſtatim concludimus, a tertia bis ſumta ſubtrahendo primam

$G(\frac{2p}{b} - 1) = \frac{1}{6}\beta b b c$; ergo $\beta b b c = 6G(\frac{2p}{b} - 1)$.

At ſi a ſecunda bis ſumta ſubtrahatur prima, reperitur

$G(1 - \frac{2q}{c}) = \frac{1}{6}\gamma b c c$ ideoque $\gamma b c c = 6G(\frac{2q}{c} - 1)$,

hincque

$\alpha b c = G(7 - \frac{6p}{b} - \frac{6q}{c})$.

Nunc pro puncto quocunque coordinatis x et y definito, preſſio erit $\alpha + \beta x + \gamma y$.

Coroll. 1.

34. Hinc in puncto A vbi $y = 0$ et $x = 0$ preſſio erit

$= \frac{G}{bc}(7 - \frac{6p}{b} - \frac{6q}{c})$.

In angulo vero B preſſio prodit

$\alpha + \beta b = \frac{G}{bc}(1 + \frac{6p}{b} - \frac{6q}{c})$,

porro preſſio in C erit $= \alpha + \gamma c = \frac{G}{bc}(1 - \frac{6p}{b} + \frac{6q}{c})$,

denique

preſſio in puncto D erit $= \alpha + \beta b + \gamma c = \frac{G}{bc}(\frac{6p}{b} + \frac{6q}{c} - 5)$.

Coroll.

Coroll. 2.

35. Si fuerit $p = \frac{1}{2} b$ et $q = \frac{1}{2} c$, quo caſu punctum O in medium rectanguli incidit, fiet

$$\alpha = \frac{G}{b\,c}; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0$$

vnde hoc caſu per totam baſin preſſio aequaliter diſtribuetur.

Problema.

Si baſis, qua corpus plano incumbit fuerit circulus radio $AB = a$ deſcriptus, et directio preſſionis totius G, cadat in punctum O, vt ſit $AP = p$ et $PO = q$, inuenire preſſionem in ſingulis punctis. Tab. III. Fig. 12.

Solutio.

36. Diuiſo vt ſupra circulo in ſuos quatuor quadrantes, in primo conſideretur punctum quodcunque V, pro quo ponatur $AX = x$ et $XV = v$, ibique erit preſſio $= \alpha + \beta x + \gamma v$, ſimul vero conſiderentur in reliquis quadrantibus, puncta analoga v, U, u, ac primo quidem preſſiones in his punctis ita ſe habebunt:

I. Preſſio in $V = \alpha + \beta x + \gamma v$
in $v = \alpha - \beta x + \gamma v$
in $U = \alpha + \beta x - \gamma v$
in $u = \alpha - \beta x - \gamma v$
Summa $= 4\alpha$.

II. Secundo momenta reſpectu axis A B erunt ſequentia

$$\begin{aligned}
\text{pro puncto } V &= \alpha v + \beta x v + \gamma v v\\
v &= \alpha v - \beta x v + \gamma v v\\
U &= -\alpha v - \beta x v + \gamma v v\\
u &= -\alpha v + \beta x v + \gamma v v.\\
\text{Summa} &= +4\gamma v v
\end{aligned}$$

III. Momenta reſpectu axis A C erunt

$$\begin{aligned}
\text{pro puncto } V &= \alpha x + \beta x x + \gamma x v\\
v &= -\alpha x + \beta x x - \gamma x v\\
U &= +\alpha x + \beta x x - \gamma x v\\
u &= -\alpha x + \beta x x + \gamma x v\\
\text{Summa} &= +4\beta x x.
\end{aligned}$$

Hae formulae ducantur in elementum areae quod eſt $d x d v$ ac primo ſumatur x conſtans et facta integratione ponatur

$$v = XY = y = \sqrt{(a a - x x)}$$

et habebimus

$$4\alpha\int d x d v = 4\alpha d x \sqrt{(a a - x x)}$$

$$4\gamma\int v v d v d x = \tfrac{4}{3}\gamma y^3 d x = \tfrac{4}{3}\gamma d x (a a - x x)^{\frac{3}{2}}$$

$$4\beta\int x x d x d v = 4\beta y x^2 d x = 4\beta x^2 d x (a a - x x)^{1:2}.$$

Hae formulae denuo integrentur per totum quadrantem B A C, ac reperietur

$$\int y d x = \tfrac{1}{4}\pi a a \text{; hincque } 4\alpha\int y d x = \alpha\pi a a$$
$$\int y^3 d x = \tfrac{1}{4}x(a a - x x)^{3:2} + \tfrac{3}{4}a^2\int d x \sqrt{(a a - x x)},$$

per totum quadrantem

$$\int y^3 d x = \tfrac{3}{16}\pi . a^4 \text{, hinc } \tfrac{4}{3}\gamma\int y^3 d x = \tfrac{1}{4}\gamma\pi a^4$$

deni-

denique

$$\int y x^3 dx = \tfrac{1}{16}\pi a^4 \text{ et } 4\beta \int y x^3 dx = \tfrac{1}{4}\beta \pi a^4,$$

atque hinc tres noſtrae aequationes erunt:

$$\text{I. } G = \alpha \pi a a; \text{ II. } Gq = \tfrac{1}{4}\gamma \pi a^4; \text{ III. } Gp = \tfrac{1}{4}\beta \pi a^4.$$

Ideoque

$$\alpha = \frac{G}{\pi a a}; \quad \beta = \frac{4Gp}{\pi a^4}; \quad \gamma = \frac{4Gq}{\pi a^4}.$$

Coroll. 1.

37. Si punctum V incidat in ipſum centrum circuli ſeu punctum A, habebitur preſſio in iſto puncto $= \frac{G}{\pi a a}$, euaneſcentibus ſcilicet x et v. Hinc vero patet punctum A eandem ſuſtinere preſſionem, vbicunque demum inciderit punctum O.

Coroll. 2.

38. Si punctum V cadat in ipſum punctum O, hincque fuerit $x = p$, $y = q$, habebitur preſſio in puncto

$$O = \frac{G}{\pi a a}\left(1 + \frac{4(pp+qq)}{aa}\right) = \frac{G}{\pi a a}\left(1 + \frac{4\,AO^2}{AB^2}\right)$$

Scholion.

39. Tot caſibus ſpecialibus hactenus euolutis, quibus hoc nouum argumentum haud mediocriter illuſtratur, nunc demum conueniet, ſolutionem maxime generalem tradere, quae principiis in Mechanicae meae Tractato Tertio expoſitis innititur.

Problema Generale.

Quamcunque figuram habuerit baſis, qua pondus plano incumbit, determinare preſſionem in ſingulis baſeos elementis.

Solutio.

Tab. III. Fig. 14. 40. Repraeſentet figura $EFef$ baſin propoſitam, cuius centrum grauitatis ſit in puncto G, per quod ducti ſint bini axes principales eiusdem figurae EGe et FGf, quemadmodum in Mechanicae loco citato ſunt conſtituti. Deinde ſecundum principia ibidem ſtabilita, quaerantur momenta inertiae reſpectu eorundem axium, quae ſcilicet reperiuntur, ſi ſingula baſeos elementa in quadrata diſtantiarum ab iisdem axibus multiplicentur. Denotet igitur A aream totius huius baſis $EFef$ et reſpectu axis Ee ſit momentum inertiae $= A.ee$ reſpectu autem alterius axis ſit $= Aff$, tum vero media directio preſſionis totalis incidat in punctum O, cuius diſtantiae ab axibus principalibus ſint $OP = p$ et $OQ = q$. His praemiſſis, conſideremus areae quodcunque elementum in y, pro quo vocentur coordinatae $GX = x$ et $XY = y$, ex quibus ipſum areae elementum fit $dx.dy$. Iam quia G eſt centrum grauitatis totius figurae, bina haec integralia duplicata $\int\int x\,dx\,dy$ et $\int\int y\,dx\,dy$ per totam figuram extenſa euaneſcunt. Deinde natura axium principalium in hoc conſiſtit, vt haec formula $\int\int xy\,dx\,dy$ per totam figuram ſumta etiam euaneſcat. Porro autem

autem formulae integrales per totam figuram extenſae praebent:

I°. $\int\int dx\,dy = A$; II°. $\int\int yy\,dx\,dy = Aee$ et tertio $\int\int xx\,dy\,dx = Aff$.

Quodſi ergo ſecundum principia ſupra ſtabilita, preſſionem in puncto Y ponamus

$$= \alpha + \beta x + \gamma y,$$

ita vt preſſio in ipſum elementum $dxdy$ ſit

$$\alpha\,dx\,dy + \beta x\,dx\,dy + \gamma y\,dx\,dy,$$

eius integrale ipſi preſſioni totali, quae ſit $= \Pi$, aequari debet, vnde quum ſit

$$\int\int dx\,dy = A;\ \int\int x\,dx\,dy = 0 \text{ et } \int\int y\,dx\,dy = 0,$$

aſſequimur hanc aequationem primam $\Pi = \alpha A$. Momentum autem preſſionis iſtius elementaris reſpectu axis E e, quod eſt

$$= \alpha y\,dx\,dy + \beta xy\,dx\,dy + \gamma yy\,dx\,dy,$$

per duplicem integrationem dare debet momentum totius $= \Pi.\,OP = \Pi p$, vnde deducitur haec aequatio $\Pi.p = \gamma A.ee$. Eodem denique modo pro altero axe Ff colligitur tertia noſtra aequatio, $\Pi q = \beta A.ff$, atque hinc ſponte prodeunt ſequentes valores

$$\alpha = \frac{\Pi}{A};\quad \beta = \frac{\Pi q}{A.ff};\quad \gamma = \frac{\Pi p}{A.ee},$$

ita vt iam pro puncto y preſſio ſit

$$= \frac{\Pi}{A}\left(1 + \frac{qx}{ff} + \frac{py}{ee}\right).$$

Quo indolem et varietatem harum preſſionum, pro diuerſis locis clarius perſpiciamus, quaeramus

ramus primo omnia loca, vbi preſſio plane euaneſcit, quae quum in hac aequatione generali $1 + \frac{qx}{ff} + \frac{py}{ee} = 0$ contineantur, euidens eſt, ea in linea recta eſſe diſpoſita, ad quam inueſtigandam, faciamus primo $x = 0$, eritque $y = -\frac{ee}{p}$, ſumto autem $y = 0$, fit $x = -\frac{ff}{q}$. Quocirca ſi capiamus
Tab. III. Fig. 15. $GM = \frac{ee}{p}$ et $GN = \frac{ff}{q}$, in punctis M et N preſſio erit nulla, ideoque etiam per totam rectam MN. Plerumque haec recta MN extra ipſam baſin corporis cadit, ſin autem per ipſam baſin tranſiret, tum caſus ſupra memoratus locum eſſet habiturus, vbi in quapiam baſis portione preſſio negatiua eſt inuenta, quod cum in praxi euenire nequeat, noſtra ſolutio etiam ad praxin accommodari non poterit. Sumamus igitur totam rectam MN extra baſin propoſitam cadere, atque euidens eſt, ſi in ipſa baſi, vbicunque ducatur recta huic MN parallela *mn*, per totam hanc chordam *mn* preſſionem vbique eandem fore, atque ſi per ipſum punctum G huiusmodi parallela agatur, per eam vbique ſimilis preſſio regnabit, tanta ſcilicet quanta eſt in ipſo G, vbi $x = 0$ et $y = 0$, ita vt per hanc rectam preſſio futura ſit $= \frac{\Pi}{A}$. Egregie haec conueniunt cum iis quae initio, circa principium noſtrum generale ſunt propoſita, haec enim recta MN vbi preſſiones euaneſcunt, eſt ipſa illa interſectio (Fig. 3. FG), vbi planum omnes preſſiones repraeſentans, planum Tabulae interſecat, atque hinc manifeſtum eſt, per omnes rectas huic MN parallelas, preſſiones eo fore

fore maiores quo magis ſuerint a recta M N remotae. Sic quum in M preſſio eſſet nulla, in G vero $\frac{\Pi}{\Lambda}$, in alio puncto μ erit $\frac{\Pi . M\mu}{\Lambda . M G}$, vnde manifeſto ſequitur in eo baſis puncto, preſſionem omnium fore maximam, quod a recta M N maxime fuerit remotum, quandoquidem preſſiones per totam baſin in ratione diſtantiarum a recta M N increſcunt.

Coroll. 1.

41. Si punctum O incidat in ipſum centrum grauitatis baſis, vt ſit $p = o$ et $q = o$, tum puncta M et N in infinitum elongabuntur, ideoque per totam baſin aequabiliter diſtribuetur, in ſingulis quippe punctis erit $= \frac{\Pi}{\Lambda}$ ob $\beta = o$ et $\gamma = o$.

Coroll. 2.

42. Quodſi punctum O in alterum axem principalem cadat veluti in P, vt ſit $O P = p = o$ et $G P = q$, tum punctum M in infinitum diſtabit at $G N = \frac{ff}{q}$ ipſa ergo recta M N alteri axi principali F f erit parallela, vbi ſcilicet preſſio euaneſcit, et quia preſſio per totum iſtum axem E e eſt $= \frac{\Pi}{\Lambda}$, hinc preſſio per omnes rectas huic axi parallelas facile definitur.

DE
HARMONIAE
VERIS PRINCIPIIS PER SPECVLVM MVSICVM REPRAESENTATIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnis harmonia atque adeo vniuerſa Muſica, quatuor vel quinque conſonantiis ſimplicibus, innititur, quibus Tirones huius artis aures aſſueſcere et quas vel voce, vel inſtrumentis quam exactiſſime edere, ſunt inſtruendi. Hae autem conſonantiae ſunt ſequentes:

I°. Vniſonus; II°. Octaua ſiue Diapaſon; III^{tio} Quinta ſiue Diapente; IV^{to} Tertia maior; quibus quatuor antiqua Muſica erat ſuperſtructa, recentior vero inſuper quintam, quae nomine *ſeptimae* inſigniri ſolet, adoptaſſe videtur. Has igitur quinque conſonantias, quaſi columnas harmoniae aliquanto accuratius perpendamus, quandoquidem plerique, qui hanc ſcientiam tradere ſunt conati, haec elementa nimis negligenter pertractarunt.

Vniſonus. 2. Incipiamus igitur ab vniſono, qui conſtat perfecta aequalitate duorum pluriumue ſonorum muſicorum; quum enim omnis ſonitus motu vibratorio

torio ſiue tremore in aere excitato producatur, ſiue iſte tremor fuerit aequabilis, ſiue inaequabilis, in Muſica alii ſoni non admittuntur, niſi vbi omnes vibrationes inter ſe ſunt iſochronae, ſiue aequalibus tempuſculis abſoluuntur. Ita cuiuslibet ſoni Muſici notionem adaequatam habebimus, quando nouerimus quot vibrationes dato tempore verbi gratia vno minuto ſecundo edantur; duo ergo pluresue ſoni qui vno minuto ſecundo eundem vibrationum numerum edunt, erunt vniſoni; ac cum ſoni ex numero vibrationum, quas dato tempore edunt, aeſtimari ſoleant, natura vniſoni in ratione aequalitatis erit conſtituenda, ii autem ſoni diuerſi cenſentur, qui non aeque multas vibrationes eodem tempore edunt. Qui enim eodem tempore frequentiores vibrationes edunt, acutiores, qui autem pauciores, grauiores appellari ſolent.

3. Sonos autem eatenus tantum percipimus, quatenus illae vibrationes in aere excitatae, per aurem in organon auditus transmittuntur, auditus noſter totidem quoque vibrationibus ad ſentiendum ciebitur, vnde quando duo ſoni aequales ſimul offeruntur, hac ipſa ratione aequalitatis ſenſus noſter ſvauitate quapiam afficietur, dum contra ſi ab hac ratione tantillum aberretur, moleſtiam quandam ſentit. Perceptio autem ſonorum aequalium omnibus hominibus ita a natura videtur ingenita, vt non ſolum hanc aequalitatem facillime agnoſcant; ſed etiam vel viua voce producere, vel in inſtrumentis efficere valeant; nihil enim facilius eſt, quam duas

chordas ita intendere, vt ſonos aequales edant, et minima aberratio auditui quaſi eſt intolerabilis.

Octaua. 4. Secunda conſonantia principalis octaua ſeu diapaſon dicta, tam prope ad naturam vniſoni accedit, vt qui datum ſonum vel ob grauitatem vel acumen aſſequi nequeunt, ſponte ſua ſonum octaua ſuperiorem vel inferiorem edant, vnde fit, vt in Muſica ſoni vna pluribusue octauis diſcrepantes pro ſimilibus habeantur, et paribus ſignis ſiue litteris deſignari ſoleant, ita ſi ſonus quiſpiam grauior littera A ſignetur, acutiores vna pluribusue octauis illum ſuperantes litteris a, $\bar{a}$, $\overset{=}{a}$, $\overset{\equiv}{a}$ etc. indicari ſolent.

5. Duo autem ſoni huiusmodi interuallo octauae diſtantes auditum gratiſſima harmonia afficiunt, ac tam egregio conſenſu gaudere videntur, vt propemodum pro vno eodemque ſono habeantur. Cauſſa autem huius pulcherrimae conſonantiae in eo eſt poſita, quod numeri vibrationum his ſonis editarum inter ſe rationem duplam teneant, vt ſi grauior vno minuto ſecundo centum vibrationes abſoluat, alter eodem tempore ducentas peragat, quae ratio vti ab intellectu facillime percipitur, ita etiam duo ſoni hanc inter ſe rationem tenentes auditum inſigni ſuauitate permulcent; quin etiam leuiſſima aberratio ab hac ratione ſenſum auditus maxime offendit, vnde etiam tirones facillime naturam huius conſonantiae addiſcunt. Quare quum omnes ſoni aptiſſime per numeros vibrationum, quas certo tempore edunt, repraeſententur, ſi ſonus A edat a

vibra-

vibrationes, ſoni ſequentes a, $\overline{a}$, $\overset{=}{a}$, $\overset{\equiv}{a}$, edent, 2 n, 4 n, 8 n, 16 n vibrationes.

6. Tertia conſonantia principalis quinta ſeu Quinta diapente dicta auribus quoque ſuauiſſimam harmoniam offert, etiamſi eius indoles a natura octauae plurimum diſſideat, atque etiam facultas hanc conſonantiam percipiendi et dignoſcendi, maiorem exercitationem poſtulat, vnde Tirones diligenter ſunt exercendi, vt hanc conſonantiam dignoſcere atque accurate ſiue voce ſiue inſtrumentis proferre addiſcant. Cauſſa autem huius conſonantiae in ratione tripla continetur, quae vti poſt rationem duplam facillime percipitur, ita etiam auribus poſt octauam gratiſſimam harmoniam exhibet; quum autem ratio 1 : 3 maius interuallum vna octaua complectatur, ſi ſonus grauior fuerit A et numero vibrationum n deſignetur, is ſonus qui eodem tempore 3 n vibrationes edit acutior erit ſono a, ſed tamen grauior quam $\overline{a}$, ſicque inter ſonos a et $\overline{a}$ incidet, atque ad illum a tenebit interuallum diapente dictum, ad ipſum autem ſonum A relatus interuallum ex vna octaua et quinta compoſitum conſtituet. Hinc igitur duo ſoni interuallo vnius quintae diſtantes, rationem tenent 2 : 3.

7. Quum in ſcala ſonorum Muſicorum recepta, grauiſſimus littera C deſignari ſoleat, eiusque octauae litteris c, $\overline{c}$, $\overset{=}{c}$, $\overset{\equiv}{c}$, ſonus ipſo C vna quinta ſuperior deſignatur littera G eiusque octauae ſequen-

tes g, $\bar{g}$, $\bar{\bar{g}}$, $\bar{\bar{\bar{g}}}$ etc. Quodſi iam ſonum C numero quocunque n repraeſentemus, omnes iſti ſoni ſequentibus numeris ſubſcriptis exhibebuntur:

C,	G,	c	g,	$\bar{c}$,	$\bar{g}$,	$\bar{\bar{c}}$,	$\bar{\bar{g}}$,	$\bar{\bar{\bar{c}}}$,	$\bar{\bar{\bar{g}}}$
n,	$\frac{3}{2}n$,	$2n$,	$3n$,	$4n$,	$6n$,	$8n$,	$12n$,	$16n$,	$24n$.

Quum autem ratio 1 : 3 ſine dubio ſimplicior ſit ac facilius percipiatur, quam ratio 2 : 3, etiam in Muſica facilius erit, ad datum ſonum C, ſonum g producere, quam G, atque etiam auribus facilius erit interuallum ſonorum C : g agnoſcere et vel minimam aberrationem a vera ratione 1 : 3 quam in ipſo quintae interuallo C : G, vnde ſi inſtrumentum Muſicum chordis vel intendendis vel relaxandis, iuſte ſit inſtruendum, conſtituto ſono C formetur ſtatim ſonus g hincque per vnam octauam deſcendendo peruenietur ad ſonum G. Interim tamen exiguum exercitium ſufficiet, vt Tirones etiam immediate, ipſum interuallum vnius quintae C : G accurate efformare diſcant et quoniam ſonus G a ſono c interuallo vnius quartae diſtat, etiam merito poſtulamus, vt tirones quoque hoc interuallum quod ratione 3 : 4 continetur pernoſcant eiusque indolem auribus diiudicare aſſueſcant.

Tertia maior.

8. Quarta vero conſonantia principalis *tertia maior* dicta ſingularem quandam ſuauitatis ſpeciem auditui exhibet ad quam accurate dignoſcendam et ſiue voce, ſiue inſtrumentis producendam, Tirones inſigni ſtudio exerceri conueniet; continetur autem haec

haec conſonantia ratione 4 : 5, quae vti minus eſt ſimplex, quam praecedentes, ita etiam maiori exercitatione eſt elaborandum, vt ſenſus auditus illi agnoſcendae et diiudicandae aſſueſiat, in ſcala autem ſonorum ſolita, ſonus tanto interuallo ſuperans fundamentalem C littera E inſigniri ſolet, vnde ſi ſono C tribuatur numerus *n* huic E conueniet $\frac{5}{4}n$, hunc ergo cum ſuis octauis ſuperiori ordini inſuper adiungamus

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C, & E, & G, & c, & e, & g, & \bar{c}, & \bar{e}, & \bar{g}, & \bar{\bar{c}}, & \bar{\bar{e}}, & \bar{\bar{g}}, & \bar{\bar{\bar{c}}}, & \bar{\bar{\bar{e}}}, & \bar{\bar{\bar{g}}} \\ n, & \frac{5}{4}n, & \frac{3}{2}n, & 2n, & \frac{5}{2}n, & 3n, & 4n, & 5n, & 6n, & 8n, & 10n, & 12n, & 16n, & 20n, & 24n. \end{array}$$

9. Quia ratio 4 : 5 ab intellectu non tam facile percipitur quam ratio 2 : 5 vel adeo 1 : 5, etiam ſimili modo in Muſica pro dato ſono C facilius excitabitur ſonus *e* quam E, ac fortaſſe adhuc facilius ſonus $\bar{e}$, qui ſe habet ad C vt 5 : 1 ſiue autem ſonum *e*, ſiue $\bar{e}$ effecerimus, inde ſponte reliqui vel grauiores vel acutiores exhibebuntur.

10. Atque hae ſunt quatuor illae conſonantiae principales, quibus vniuerſa Muſica quondam fuit ſuperſtructa; recentiores autem inſuper quintam conſonantiam principalem introduxerunt quam ſeptimam minorem adpellare liceat, etiamſi in ſyſtemate ſonorum, quo inſtrumenta Muſica inſtitui ſolent, non occurrat. Continetur autem haec noua conſonantia ratione 4 : 7, quae quum parum diſcrepet a ratione 5 : 9 vel 9 : 16, alterutra harum loco illius 4 : 7 abuti ſolent, interim tamen imprimis vtile erit,

tirones

tirones in hac ratione 4 : 7 tam dignoſcenda quam diiudicanda exercere, vtrum ſcilicet ſoni hanc rationem accurate teneant nec ne, quocirca cum tales ſoni nondum in inſtrumentis habeantur, neceſſe erit huiusmodi ſonos rationem 4 : 7 tenentes ſuper monochordo excitare, atque aures iis aſſueſcere, quae inde non exiguam voluptatis ſpeciem perſentient.

11. Conſtitutis iam conſonantiis principalibus, quibus vniuerſa Muſica ſuperſtruitur, videamus cuiusmodi ſonos in inſtrumenta Muſica recipi conueniat, quandoquidem variatio qua haec ars plurimum delectatur plures diuerſos ſonos requirit ſecundum vera principia harmoniae ſtabiliendos. Ac primo quidem aſſumto pro lubitu quopiam ſono F, quippe ex quo inſtrumentis Muſicis reliqui ſoni plerumque deducti videntur, quem numero $= n$ deſignemus, qui indicet quot vibrationes vno minuto ſecundo peragantur, ex eo per octauas aſcendendo nanciſcimur ſequentes ſonos ſuis numeris inſignitos:

$$f = 2n;\ \bar{f} = 4n;\ \bar{\bar{f}} = 8n;\ \bar{\bar{\bar{f}}} = 16n;\ \text{etc.}$$

At ſi liceat adhuc ad grauiores ſonos deſcendere, eos ita repraeſentare licet

$$\underline{F} = \tfrac{1}{2}n;\ \underline{\underline{F}} = \tfrac{1}{4}n;\ \underline{\underline{\underline{F}}} = 8n\ \text{etc.}$$

Tum vnicuique horum ſonorum adiungamus quintam ratione 2 : 3 contentam, atque ex F orietur ſonus numero $\frac{3}{2}n$ expreſſus quem Muſici littera c deſignare ſolent, vnde ſonus octaua grauior C numero

mero $\frac{3}{4}n$ exprimetur, ſicque adipiſcimur ſonorum ſeriem:

$$C = \tfrac{3}{4}n;\ c = \tfrac{3}{2}n;\ \bar{c} = 3n;\ \bar{\bar{c}} = 6n;\ \bar{\bar{\bar{c}}} = 12n \text{ etc.}$$

hoc ſcilicet modo a ſono fundamentali F per intervallum quintae aſcendimus, ſi iam ab his ſonis denuo per interuallum quintae aſcendamus, impetrabimus ſequentes nouos ſonos

$$G = \tfrac{9}{8}n;\ g = \tfrac{9}{4}n;\ \bar{g} = \tfrac{9}{2}n;\ \bar{\bar{g}} = 9n;\ \bar{\bar{\bar{g}}} = 18n \text{ etc.}$$

hinc denuo per tantum interuallum quintae aſcendamus ac prodibit ſequens nouorum ſonorum ſeries:

$$D = \tfrac{27}{32}n;\ d = \tfrac{27}{16}n;\ \bar{d} = \tfrac{27}{8}n;\ \bar{\bar{d}} = \tfrac{27}{4}n;\ \bar{\bar{\bar{d}}} = \tfrac{27}{2}n \text{ etc.}$$

Poſtquam autem per interuallum vnius quintae ter repetitum aſcenderimus, hic vlteriorem progreſſionem ſiſti oportet, ſi enim ſupra D denuo per quintam aſcendere vellemus, perueniremus ad ſonum numero $\frac{81}{64}$ expreſſum, qui nimis parum a ſono A per numerum $\frac{5}{4}n$ expreſſo diſcrepat, quam vt ambo ſimul in Muſicam introduci et a ſe inuicem diſtingui poſſent; at vero iſte ſonus $A = \frac{5}{4}n$, qui ad interuallum fundamentale tertiae maioris ſtat, neceſſario in Muſica inſignem occupat locum, quia alioquin haec egregia conſonantia penitus exſularet; quocirca a ſingulis ſonis iam conſtitutis inſuper per interuallum tertiae maioris aſcendamus, vnde reſultabunt ſequentes ſoni

$$\text{ex } \begin{array}{l|llll} F & A = \frac{5}{4}n; & a = \frac{5}{2}n; & \bar{a} = 5n; & \bar{\bar{a}} = 10n \text{ etc.} \\ C & E = \frac{15}{16}n; & e = \frac{15}{8}n; & \bar{e} = \frac{15}{4}n; & \bar{\bar{e}} = \frac{15}{2}n \text{ etc.} \\ G & H = \frac{45}{32}n; & h = \frac{45}{16}n; & \bar{h} = \frac{45}{8}n; & \bar{\bar{h}} = \frac{45}{4}n \text{ etc.} \\ D & Fs = \frac{135}{128}n; & fs = \frac{135}{64}n; & \overline{fs} = \frac{135}{32}n; & \overline{\overline{fs}} = \frac{135}{16}n \text{ etc.} \end{array}$$

12. Hoc igitur modo ipſis harmoniae principiis ducti, peruenimus ad genus Muſicum, quod vulgo Diatonicum adpellari ſolet, niſi quod hic ſonus F*s* inſuper acceſſit, quem veteres omiſerunt, qui tamen nihilominus, in hoc genus neceſſario ingreditur, hos igitur ſonos genus diatonicum conſtituentes, cum ſuis numeris ordine conſpectui exponamus:

Sumamus numerum = 128, vbi commode vſu venit, vt ſonus F, cui numerum *n* tribuimus praeciſe 128 vibrationes vno minuto ſecundo abſoluit, quemadmodum experimenta chordis inſtituta docuere, hoc modo omnes numeri in ſequenti Tabula exhibiti ſimul oſtendent, quot vibrationibus quisque ſonus vno minuto ſecundo editis contineatur:

C =

C = 96	c = 192	$\bar{c}$ = 384	$\bar{\bar{c}}$ = 768	$\bar{\bar{\bar{c}}}$ = 1536
D = 108	d = 216	$\bar{d}$ = 432	$\bar{\bar{d}}$ = 864	$\bar{\bar{\bar{d}}}$ = 1728
E = 120	e = 240	$\bar{e}$ = 480	$\bar{\bar{e}}$ = 960	$\bar{\bar{\bar{e}}}$ = 1920
F = 128	f = 256	$\bar{f}$ = 512	$\bar{\bar{f}}$ = 1024	$\bar{\bar{\bar{f}}}$ = 2048
Fs = 135	fs = 270	$\overline{fs}$ = 540	$\overline{\overline{fs}}$ = 1080	$\overline{\overline{\overline{fs}}}$ = 2160
G = 144	g = 288	$\bar{g}$ = 576	$\bar{\bar{g}}$ = 1152	$\bar{\bar{\bar{g}}}$ = 2304
A = 160	a = 320	$\bar{a}$ = 640	$\bar{\bar{a}}$ = 1280	$\bar{\bar{\bar{a}}}$ = 2560
H = 180	b = 360	$\bar{b}$ = 720	$\bar{\bar{b}}$ = 1440	$\bar{\bar{\bar{b}}}$ = 2880
c = 192	$\bar{c}$ = 384	$\bar{\bar{c}}$ = 768	$\bar{\bar{\bar{c}}}$ = 1536	$\bar{\bar{\bar{\bar{c}}}}$ = 3072

Atque ex hoc genere deſumtae ſunt denominationes'

I°. *Octauae* quia omiſſo ſono F *s* a C ad *c* octo numerantur ſoni, II^do^ *Quintae* quia a C ad G numerantur quinque ſoni, III^tio^ *Quartae* quia a C ad F numerantur quatuor ſoni, IV^to^ *Tertiae* quia a C ad E numerantur tres ſoni.

13. Quemadmodum hic ex quatuor ſonis primo conſtitutis F, C, G, D per interuallum tertiae maioris aſcendimus; ita ſi hunc ſaltum duplicemus denuo quatuor nouos ſonos adipiſcimur, quibus adiunctis genus Muſicum etiamnunc vſu receptum reſultat, quod genus diatonico-chromaticum adpellari ſolet, cuius originem ex hoc ſchematismo perſpicere licet:

Per tertiam aſcend.	Per quintam aſcendendo			
	F.	C.	G.	D
	A.	E.	H.	Fis
	Cis	Gis	Dis	B
	100	150	$112\frac{1}{2}$	$168\frac{3}{4}$.

Hic ſcilicet quatuor nouis ſonis debitos numeros ſubſcripſimus.

14. Ex hoc ſchemate luculenter perſpicitur, quemadmodum inſtrumenta Muſica ad iſtud ſonorum genus facillime accommodari oporteat, conſtituto ſcilicet ſono fundamentali F, ab eo per binas tertias maiores aſcendatur ad ſonos A et Cis, tum vero a quolibet horum trium ſonorum aſcendatur per ternas quintas ſicque omnes duodecim ſoni vnius octauae obtinebuntur, vnde facillime reliquae octauae omnes ſuis ſonis implebuntur, ſicque totum inſtrumentum ad veram harmoniam optime erit adtemperatum.

15. Conſpectui igitur omnes ſonos huius generis diatonico-chromaticos cum debitis numeris exponamus, atque vt fractiones euitemus praecedentes numeros quadruplicemus, tum vero etiam eosdem numeros per factores ſimplices repraeſentemus, quo ratio quam ſinguli inter ſe tenent facilius perſpiciatur, ſufficiet autem vnicam octauam hoc modo euoluiſſe:

ſigna

ſigna ſonorum	numeri debiti	per factores euoluti
C	384	$2^7 . 3$
Cis	400	$2^4 . 5^2$
D	432	$2^4 . 3^3$
Dis	450	$2 . 3^2 . 5^2$
E	480	$2^5 . 3 . 5$
F	512	2^9
Fis	540	$2^2 . 3^3 . 5$
G	576	$2^6 . 3^2$
Gis	600	$2^3 . 3 . 5^2$
A	640	$2^7 . 5$
B	675	$3^3 . 5^2$.
H	720	$2^4 . 3^2 . 5$
c	768	$2^8 . 3$.

16. Stabilitis igitur his ſonis vniuerſa Muſica eo reducitur, vt variis huiusmodi ſonis inter ſe coniungendis auditui grata harmonia offeratur, cuius natura atque indoles in perceptione conſonantiarum principalium ſupra expoſitarum eſt quaerenda, quandoquidem ab auribus ad Muſicam accommodatis plus non requiritur, quam vt conſonantias illas principales probe pernoſcant et vtrum ſint accuratae nec ne, diiudicare valeant. Vt primum enim hanc facultatem crebro exercitio ſuerint adepti, ab ipſa natura ſingularem quandam voluptatem perſentient. Initio autem quintam illam conſonantiam principalem ratione 4 : 7 contentam merito praetermittimus, cum in Muſicam ſoni illi ad eas producen-

ducendas apti nondum ſint introducti, ſed eorum loco Muſici aliis ſonis ab illis quidem parum diſcrepantibus, abuti ſoleant, ſed quia hoc modo puritas Harmoniae negligitur, merito dubitare licet an Muſica hoc modo ad maiorem perfectionis gradum ſit euecta. Caeterum vſum harum nouarum conſonantiarum, quemadmodum ab artificibus adhiberi ſoleant fuſius in Actis Regiae Academiae Boruſſicae explicaui.

17. A quolibet ergo ſono huius generis Muſici immediate ad alios ſonos tranſilire non licebit, niſi qui ab illo ſiue interuallo octauae, ſiue quintae vel etiam quartae, ſiue tertiae maioris fuerint remoti, quos ſaltus idcirco ſimplices adpellare liceat, in quo ipſo prima regula compoſitionis contineri eſt cenſenda; ſupra autem iam innuimus cum rationes 1 : 3 et 1 : 5 facilius percipiantur quam rationes 2 : 3 et 4 : 5 quibus propria interualla quintae et tertiae exprimuntur, ſaltum per haec interualla ſubleuari poſſe, id quod plenius oſtendiſſe iuvabit. Ita ſi a ſono f per quintam ad $\bar{c}$ ſit aſcendendum, id facilius fiet interpolando vel ſonum F, vel ſonum $\bar{c}$, hoc modo:

$f : \mathrm{F} : \bar{c} :: 2 : 1$ vel etiam $f : \bar{\bar{c}} : \bar{c} :: 1 : 3$

$1 : 3$ $\qquad$ $2 : 1$

Sin autem a ſono c per quartam ad ſonum f ſit tranſeundum, id commodiſſime ita fieri poterit:

$c : \bar{c} : \mathrm{F} : f$

$1 : 2$

$3 : 1$

$1 : 2.$

Si

Si denique a ſono f per tertiam maiorem in a tranſilire oporteat, id hoc modo commodiſſime efficietur

$$
\begin{array}{llll}
f : & F : & \bar{a} : & a \\
2 : 1 & & & \\
 & 1 : 5 & & \\
 & & 2 : 1. &
\end{array}
$$

18. Merito autem ſenſum auditus iam ita perpolitum eſſe aſſumimus, vt immediate interualla quintae, quartae et tertiae maioris aſſequi et ſentire valeat, ita vt hos ſaltus tamquam ſimplices ſpectare queamus. In genere autem Muſico diatonico-chromatico non ab omnibus ſonis per haec interualla tranſire licet, quoniam ii ſoni ad quos eſſet perueniendum in noſtra ſcala non occurrunt, ita per interuallum quintae ab his tribus ſonis D, F *ſ* et B aſcendere non licet, tum vero per interuallum quartae a ſonis F, A et Cis aſcendere non licet, tumque per interuallum tertiae maioris ab his quatuor ſonis, Cis, Gis, Dis et B aſcendere non licet, neque vero per idem interuallum deſcendere a ſonis F, C, G et D; a reliquis vero omnibus praeter hos memoratos iſti tranſitus ſuccedunt.

19. Quando igitur a quopiam ſono per aliud quodcunque interuallum fuerit vel aſcendendum vel deſcendendum, id ſimplici ſaltu neutiquam exſequi licet, ſed tranſitum per duos pluresue ſaltus ſimplices inſtitui oportebit. Quo autem huiusmodi ſaltus compoſitos clarius ob oculos ponamus, ſignis idoneis vtamur:

vtamur: denotemus ſcilicet aſcenſum per interuallum quintae hoc modo + V, deſcenſum vero hoc modo – V, ſimilique modo hoc ſignum + III denotet aſcenſum per interuallum tertiae maioris, at – III deſcenſum per idem interuallum, atque his ſignis omnes tranſitus a quolibet ſono noſtrae ſcalae ad quemlibet alium, ſuccincte repraeſentare poterimus, proinde igitur hi tranſitus vel duobus, vel tribus, pluribusue ſaltibus ſiue per quintam, ſiue per tertiam fuerint expediendi, ordine euoluamus.

I. Tranſitus per + V + V ſeu per interuallum 8 : 9.

10. Iſtud interuallum 8 : 9 Tonus maior adpellari ſolet atque in noſtra ſcala ſequentia talia interualla occurrunt:

F : G : C : D

A : H : E : Fs

Cs : Ds : Gs : B.

Saltus ergo quibus haec interualla produci oportet ita ſe habebunt

F : G = (F : C) (C : G); C : D = (C : G) (G : D)

A : H = (A : E) (E : H); E : Fs = (E : H) (H : Fs)

Cs : Ds = (Cs : Gs) (Gs : Ds); Gs : B = (Gs : Ds) (Ds : B).

Hoc ſcilicet modo iſta interualla binis ſaltibus ſimplicioribus abſoluuntur. In Praxi quidem Muſica non ſemper opus eſt hos ſonos medios actu interpolare, nam ſi concentus pluribus vocibus conſtet, ſuffi-

ſufficit vt alia vox ſonum interpolandum edat, id quod a Practicis plerumque obſeruari ſolet. Sequeretur nunc tranſitus — V — V, interuallo 9 : 8 conueniens, euidens autem eſt praecedentes tranſitus retro ſumtos huc eſſe referendos, vnde ſuperfluum foret eum ſeorſim euoluere, quod etiam de ſequentibus eſt intelligendum.

II. Tranſitus + V + III ſeu per interuallum 16 : 15.

21. Hoc interuallum 16 : 15 ſemitonium maius adpellari ſolet atque in ſcala noſtra inter ſequentes ſonos occurrit:

F : E; C : H; G : Fs
A : Gs; E : Ds; H : B.

Singula autem haec interualla duplici modo reſolui poſſunt prouti bini ſaltus capiuntur, vel + V + III, vel ordine inuerſo:

	+ V + III	+ III + V
F : E =	(F : C) (C : E)	= (F : A) (A : E)
C : H =	(C : G) (G : H)	(C : E) (E : H)
G : Fs =	(G : D) (D : Fs)	(G : H) (H : Fs)
A : Gs =	(A : E) (E : Gs)	(A : Cs) (Cs : Gs)
E : Ds =	(E : H) (H : Ds)	(E : Gs) (Gs : Ds)
H : B =	(H : Fs) (Fs : B)	(H : Ds) (Ds : B)

Sin autem per ſemitonium maius deſcendere velimus, tantum opus eſt ſonos hic exhibitos ordine inuerſo collocare; quum igitur hi tranſitus duplicis ſint generis, in concentibus Muſicis haec ſemitonia Maiora duplici modo vſurpari poſſunt, dum ſcilicet ſoni

hic interpolati, in aliis vocibus exprimuntur, atque hic diuerſus vſus etiam ad diuerſos modos Muſicos pertinere cenſetur, prout ſcilicet haec vel illa interpolatio adhibetur etiam ipſa harmonia aliam ſpeciem induit.

III. Tranſitus +V−III ſeu per interuallum 5:6 vel etiam 5:3.

22. Interuallum 5:6 vocatur tertia minor, alterum 5:3 ſexta maior, talia interualla in ſcala Muſica reperiuntur

A : C; E : G; H : D
Cs : E; Gs : H; Ds : Fs.

Tranſitus autem hic duplex datur, ſcilicet

	+V	−III	−III	+V
A : C	(A : E)	(E : C)	(A : F)	(F : C)
E : G	(E : H)	(H : G)	(E : C)	(C : G)
H : D	(H : Fs)	(Fs : D)	(H : G)	(G : D)
Cs : E	(Cs : Gs)	(Gs : E)	(Cs : A)	(A : E)
Gs : H	(Gs : Ds)	(Ds : H)	(Gs : E)	(E : H)
Ds : Fs	(Ds : B)	(B : Fs)	(Ds : H)	(H : Fs)

Hic duplex tranſitus ad tertiam minorem a Muſicis manifeſto ad diuerſos modos referri ſolet.

IV. Tranſitus +III+III ſeu per interuallum 16:25.

23. Hoc interuallum in Muſica parum conſuetum, ſub nomine quintae redundantis comprehendi

hendi ſolet, talia autem interualla in ſcala noſtra quatuor tantum ſequentia occurrunt:

F : Cs; C : Gs; G : *ds*; D : B

quae ſingula vnico tantum modo reſoluuntur

F : Cs = (F : A) (A : Cs); C : Gs = (C : E)(E : Gs)
G : *ds* = (G : H) (H : *ds*); D : B = (D : Fs)(Fs : B).

Si prior ſonus octaua exaltetur vt interuallum fiat 32 : 25 id in Muſica ſiue tertia ſuperflua, ſiue quarta diminuta adpellari ſolet, caeterum denominatio in hoc negotio nullius plane eſt momenti. Si bini illi ſoni inuertantur, formulae hae ordine retrogrado tantum ſunt legendae.

V. Tranſitus + V + V + V ſeu per interuallum 32 : 27 vel etiam 16 : 27.

24. Interuallum 32 : 27 etiam nomen tertiae minoris in Muſica obtinet, quod autem a praecedente, vno commate deficit. Talia interualla reperiuntur tria:

F : D; A : Fs; Cs : B

per quae datur vnicus tranſitus

F : D = (F : C) (C : G) (G : D)
A : Fs = (A : E) (E : H) (H : Fs)
Cs : B = (Cs : Gs) (Gs : Ds) (Ds : B).

VI. Tranſitus + V + V + III ſeu per interuallum 32 : 45 vel 45 : 64.

25. Prius interuallum 32 : 45 dicitur quarta abundans, alterum 45 : 64 quinta deficiens, cu-

iusmodi interualla in ſcala occurrunt ſequentia per quae triplices dantur tranſitus

F : H ; C : Fs ; A : Ds ; E : B

	+ V, + V, + III	+ V, + III, + V
F : H	(F : C) (C : G) (G : H)	(F : C) (C : E) (E : H)
C : Fs	(C : G) (G : D) (D : Fs)	(C : G) (G : H) (H : Fs)
A : Ds	(A : E) (E : H) (H : Ds)	(A : E) (E : Gs) (Gs : Ds)
E : B	(E : H) (H : Fs) (Fs : B)	(E : H) (H : Ds) (Ds : B)

+ III, + V, + V
(F : A) (A : E) (E : H)
(C : E) (E : H) (H : Fs)
(A : Cs) (Cs : Gs) (Gs : Ds)
(E : Gs) (Gs : Ds) (Ds : B)

VII. Tranſitus + V + V − III ſeu per intervallum 5 : 9 vel etiam 10 : 9.

26. Interuallum 5 : 9 vocatur ſeptima minor perinde ac 9 : 16, at vero interuallum 10 : 9 nomen habet toni minoris, talia interualla ſunt :

A : G ; E : D ; Cs : H ; Gs : Fs

per quae ſingula tranſitus etiam datur triplex

	+ V + V − III	+ V − III + V
A : G	(A : E) (E : H) (H : G)	(A : E) (E : C) (C : G)
E : D	(E : H) (H : Fs) (Fs : D)	(E : H) (H : G) (G : D)
Cs : H	(Cs : Gs) (Gs : Ds) (Ds : H)	(Cs : Gs) (Gs : E) (E : H)
Gs : Fs	(Gs : Ds) (Ds : B) (B : Fs)	(Gs : Ds) (Ds : H) (H : Fs)

− III + V + V
(A : F) (F : C) (C : G)
(E : C) (C : G) (G : D)
(Cs : A) (A : E) (E : H).
(Gs : E) (E : H) (H : Fs)

Qui

Qui tranſitus manifeſto ad ternos diuerſos modos ſunt referendi.

VIII. Tranſitus +III+III+V ſeu per intervallum 64 : 75.

27. Hoc interuallum denuo tertia minor vocatur, cum tamen fere duobus commatibus deficiat, a vera ratione 5 : 6. Talia interualla ſunt tria

F : Gs; C : Ds; G : B

tranſitus autem triplici modo inſtitui poteſt vt ſequitur:

	+III	+III	+V	+III	+V	+III
F : Gs	(F : A)	(A : Cs)	(Cs : Gs)	(F : A)	(A : E)	(E : Gs)
C : Ds	(C : E)	(E : Gs)	(Gs : Ds)	(C : E)	(E : H)	(H : Ds)
G : B	(G : H)	(H : Ds)	(Ds : B)	(G : H)	(H : Fs)	(Fs : B)

+V	+III	+III
(F : C)	(C : E)	(E : Gs)
(C : G)	(G : H)	(H : Ds)
(G : D)	(D : Fs)	(Fs : B).

IX. Tranſitus +III, +III−V ſeu per intervallum 24 : 25.

28. Hoc interuallum minus eſt ſemitonio et Limma minus vocari ſolet, cuiusmodi ſunt tria ſequentia:

C : Cs, G : Gs; D : Ds

vbi quodlibet admittit ternos ſaltus:

	+III	+III	−V	+III	−V	+III
C : Cſ	(C : E)	(E : Gſ)	(Gſ : Cſ)	(C : E)	(E : A)	(A : Cſ)
G : Gſ	(G : H)	(H : Dſ)	(Dſ : Gſ)	(G : H)	(H : E)	(E : Gſ)
D : Dſ	(D : Fſ)	(Fſ : B)	(B : Dſ)	(D : Fſ)	(Fſ : H)	(H : Dſ)

−V	+III	+III
(C : F)	(F : A)	(A : Cſ)
(G : C)	(C : E)	(E : Gſ)
(D : G)	(G : H)	(H : Dſ).

29. Simili modo tranſitus magis complicatos, qui ſunt

$$+V+V+V\pm III;\ +V+V\pm III\pm III$$
$$+V+V+V\pm III\pm III,$$

facile euoluere liceret, verum omnes huiusmodi tranſitus multo clarius et concinnius obtutui repraeſentari poſſunt per ſchematiſmum ſupra § 13. allatum, quem ergo ad hunc ſcopum accommodatum ob eximium eius vſum *ſpeculum Muſicum* adpellare liceat:

F —	C —	G —	D
A —	E —	H —	Fſ
Cſ —	Gſ —	Dſ —	B.

Hoc ſcilicet ſpeculum inſpicienti, ſtatim patet, quinam ſaltus a quolibet ſono, ad quemlibet alium perducant, ſimulque quot modis quilibet tranſitus inſtitui poſſit, tantum enim ſecundum ductum linearum ſiue horizontalium ſiue verticalium eſt procedendum, vbi horizontales ſaltum per quintam, verti-

verticales autem per tertiam declarant. Ita ſi a ſono F ad ſonum B eſſet tranſeundum, id decem diuerſis modis fieri poſſe facile patet, qui ſunt

I°. F : C : G : D : Fs : B
II°. F : C : G : H : Fs : B
III. F : C : G : H : Ds : B
IV. F : C : E : H : Fs : B
V. F : C : E : H : Ds : B
VI. F : C : E : Gs : Ds : B
VII. F : A : E : H : Fs : B
VIII. F : A : E : H : Ds : B
IX. F : A : E : Gs : Ds : B
X. F : A : Cs : Gs : Ds : B.

30. Ope huius ſpeculi etiam quaeſtio in Muſica non parum curioſa reſolui poteſt, quemadmodum ſcilicet omnes duodecim ſonos ſcalae Muſicae percurri oporteat per ſaltus ſimplices quintam nempe et tertiam maiorem, vt ſingulis ſemel tantum impulſis, reuerſio fiat ad primum ſonum a quo curſus fuit inceptus, talis autem progreſſio in ſe rediens duplici modo inſtitui poteſt

I. Circulatio F : C : G : D : Fs : B : Ds : H : E : Gs : Cs : A : F
II. Circulatio F : C : E : H : G : D : Fs : B : Ds : Gs : Cs : A : F.

Ex eodem quoque ſpeculo ſtatim patet pro quibusnam ſonis ſcalae Muſicae detur trias harmonica, ſiue modi duri, ſiue modi mollis, terni enim ſoni triadem primi generis conſtituent, qui tali gnomone ┌ exprimuntur, qui autem tali gnomone ┘ indicantur,

tur, triadem mollem conſtituunt. Ecce ergo ſequentes triades modi duri:

F, A, C; C, E, G; G, H, D;
A, Cſ, E; E, Gſ, H; H, Dſ, Fſ.

Triades antem modi mollis erunt

A, C, E; E, G, H; H, D, Fſ
Cſ, E, Gſ; Gſ, H, Dſ; Dſ, Fſ, B

vtriusque ſcilicet modi tres dantur triades harmoniae purae.

31. Dum autem hic alias conſonantias ſimplices praeter octauam, quintam et tertiam maiorem non admittimus, neutiquam conſonantias magis compoſitas, neque etiam diſſonantias vt quidem a Muſicis vocantur, reiicimus; quin potius earum reſolutionem in ſaltus ſimplices eum in finem hic docuimus, vt pateret quo modo iſtae conſonantiae vel etiam diſſonantiae in vſum vocari atque ab auribus percipi ac diiudicari queant; eatenus enim tantum conſonantiis magis compoſitis et diſſonantiis locus in Muſica conceditur, quatenus eas in conſonantias ſimplices reſoluere licet. At qui regulis hic traditis vti voluerit, ante omnia curare debet, vt inſtrumentum Muſicum exacte ad eos ſonos ſit attemperatum, quos harmonia poſtulat, et quemadmodum in noſtro ſpeculo Muſico ſunt repraeſentati.

32. Omni autem iure aſſumere videmur, cunctas conſonantias hic expoſitas in inſtrumentis Muſicis tam exacte exhiberi, vt ne minima quidem aberra-

aberratio ſentiri poſſit. Ab hac ergo regula ad harmoniam producendam maxime neceſſaria ii Muſici plurimum receſſerunt, qui interuallum vnius octauae in duodecim partes aequales, diſtribuendum eſſe putarunt; quoniam hoc modo concentum Muſicum in omnes alios ſonos transponere liceret. Quum autem hoc modo in tota ſcala Muſica, nulla quinta pura daretur, et omnes tertiae maiores a vera ratione non mediocriter aberrarent, etiam haec opinio nunc quidem a pleriſque Muſicis eſt exploſa, quippe qui facile agnouerunt a veris harmoniae principiis in gratiam transpoſitionis, nullatenus recedi oportere. Denique conſuetus modus pueros in Muſica inſtruendi a principiis harmoniae maxime eſt alienus, quomodo enim poſtulari poteſt vt Tirones ſonos *vt re mi fa ſol la* intonare addiſcant; quum in hac progreſſione *vt* : *re* ſit tonus maior, ſequens *re* : *mi* tonus minor, tum vero *mi* : *fa* ſemitonium maius, quae interualla nequidem exercitatiſſimi Muſici edere valent, niſi vel inſtrumentis vel reſolutione in ſaltus ſimplices adiuti; quin potius ergo Tirones ſtatim ab initio eſſent omni ſtudio exercendi, vt conſonantias ſimplices ſcilicet octauam, quintam et tertiam maiorem efferre addiſcerent, ſic enim hoc ipſo exercitio iudicium aurium acuent et voluptati ex his conſonantiis percipiendae magis magiſque aſſueſcerent.

NOVA METHODVS
MOTVS PLANETARVM PRINCIPALIVM AD TABVLAS ASTRONOMICAS REDVCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Tab. III. Fig. 16. Repraeſentet Tabula planum eclipticae, in quo punctum S ſit centrum Solis, et recta SA ad fixa et ad punctum aequinoctiale vernum directa. Verſetur iam Planeta in loco quocunque Z extra eclipticam, vnde eo demittatur perpendiculum ZY, et ex Y ad rectam SA agatur normalis YX, ita vt locus planetae determinetur his tribus coordinatis

$$SX = x, \quad XY = y \quad \text{et} \quad YZ = z;$$

tum vero ponatur breuitatis gratia diſtantia a Sole

$$= \sqrt{(xx + yy + zz)} = v.$$

2. Quodſi iam maſſa Solis ſit $= S$, et elementum temporis dt conſtans aſſumatur, quoniam vis, qua Planeta ad Solem vrgetur, eſt $= \frac{S}{vv}$, pro motu Planetae habebimus tres ſequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} + \frac{Sx}{v^3} = 0; \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{Sy}{v^3} = 0; \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} + \frac{Sz}{v^3} = 0$$

vbi

vbi notaſſe iuuabit, ſi tempus t per motum anomaliae mediae Solis exprimatur, et diſtantia media terrae a Sole vnitate deſignetur, tum fore $S = 1$.

3. Ad tempus propoſitum exhibeat recta S B longitudinem mediam Planetae, ac ponatur angulus $ASB = p$, qui quum ſit tempori proportionalis, ſtatuatur $dp = m\,dt$, ducta ex Y ad hanc directionem S B normali Yx vocentur nouae coordinatae

$$Sx = X,\ Yx = Y \quad \text{et} \quad Yz = Z$$

eritque itidem

$$vv = XX + YY + ZZ,$$

tum vero erit

$$X = x\,\text{coſ}.p + y\,\text{ſin}.p; \text{ et } Y = y\,\text{coſ}.p - x\,\text{ſin}.p \text{ et } Z = z$$

hinc erit differentiando

$$dX = dx\,\text{coſ}.p + dy\,\text{ſin}.p + m\,dt(y\,\text{coſ}.p - x\,\text{ſin}.p) = dx\,\text{coſ}.p + dy\,\text{ſin}.p + mY\,dt$$

et $dY = dy\,\text{coſ}.p - dx\,\text{ſin}.p - mX\,dt$,

ita vt ſit

$$dx\,\text{coſ}.p + dy\,\text{ſin}.p = dX - mY\,dt;\quad dy\,\text{coſ}.p - dx\,\text{ſin}.p = dY + mX\,dt$$

quae formae denuo differentiatae praebent

$$ddx\,\text{coſ}.p + ddy\,\text{ſin}.p + m\,dt(dY + mX\,dt) = ddX - m\,dY\,dt$$

$$ddy\,\text{coſ}.p - ddx\,\text{ſin}.p - m\,dt(dX - mY\,dt) = ddY + m\,dX\,dt.$$

4. Quum nunc ex ſuperioribus formulis poſito $S = 1$, ſit

$$ddx = -\frac{x\,dt^2}{v^3} \quad \text{et} \quad ddy = -\frac{y\,dt^2}{v^3}$$

ſi hi valores ibi ſubſtituantur ob

$$x^2 + y^2 = XX + YY$$

habebimus has aequationes

$$-\frac{X\,dt^2}{v^3} + m^2 X\,dt^2 = ddX - 2\,m\,dY\,dt$$

$$-\frac{Y\,dt^2}{v^3} + m^2 Y\,dt^2 = ddY + 2\,m\,dX\,dt$$

quae redigantur ad ſequentes formas

$$\frac{ddX}{dt^2} - \frac{2\,m\,dY}{dt} - m^2 X + \frac{X}{v^3} = 0$$

$$\frac{ddY}{dt^2} + \frac{2\,m\,dX}{dt} - m^2 Y + \frac{Y}{v^3} = 0.$$

Vbi natura motus medii poſtulat, vt Y nunquam vltra certum terminum excreſcat, atque etiam ipſa quantitas x intra certos limites contineatur pro magnitudine excentricitatis, tertia vero aequatio manet vt ante

$$\frac{ddZ}{dt^2} + \frac{Z}{v^3} = 0.$$

5. Deſignet a diſtantiam mediam Planetae a Sole et quia X non multum ab ea diſcrepat, ſtatuamus

$$X = a(1 + x) \quad \text{et} \quad Y = a\,y,$$

ſimilique modo $Z = a\,z$, hic ſcilicet aſſumo harum litterarum x, y, z valores ſuperiores iam obliuioni eſſe traditos, atque hinc ſtatim habemus

$$v = a\sqrt{((1 + x)^2 + yy + zz)},$$

ex quo tres noſtrae aequationes ita ſe habebunt

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2\,m\,dy}{dt} - m^2(1 + x) + \frac{(1 + x)}{a^3((1+x)^2 + yy + zz))^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2\,m\,dx}{dt} - m^2 y + \frac{y}{a^3((1+x)^2 + yy + zz)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\text{III.}\quad \frac{ddz}{dt^2} + \frac{z}{a^3((1+x)^2 + yy + zz)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

6. Quo-

6. Quoniam quantitates x, y et z ſpectantur vt valde paruae prae vnitate; formula irrationalis

$$\frac{1}{((1+x)^2+yy+zz)}\ 3:2$$

commode reſoluitur in hanc ſeriem conuergentem:

$$\frac{1}{(1+x)^3}-\frac{3(yy+zz)}{2(1+x)^5}+\frac{15(yy+zz)^2}{8.(1+x)^7}\ \text{etc.}$$

et euolutis poteſtatibus negatiuis $1+x$, terminisque ſecundum dimenſiones diſpoſitis habebimus

$$1,\ -3x,\ +6x^2-\tfrac{3}{2}yy-\tfrac{3}{2}zz,\ +10x^3+\tfrac{15}{2}xyy+\tfrac{15}{2}xzz,$$
$$+15x^4-\tfrac{45}{2}xxyy-\tfrac{45}{2}xxzz+\tfrac{15}{8}y^4+\tfrac{15}{4}yyzz+\tfrac{15}{8}z^4,\ \text{etc.}$$

pro qua expreſſione breuitatis gratia ſcribamus $1-3x+W$ ita vt ſit

$$W=+6xx-\tfrac{3}{2}yy-\tfrac{3}{2}zz-10x^3+\tfrac{15}{2}xyy+\tfrac{15}{2}xzz+15x^4$$
$$-\tfrac{45}{2}xxyy-\tfrac{45}{2}xxzz+\tfrac{15}{8}y^4+\tfrac{15}{4}yyzz+\tfrac{15}{8}z^4\ \text{etc.}$$

ſicque noſtrae aequationes erunt

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{dt^2}-\frac{2mdy}{dt}-m^2(1+x)+\frac{1}{a^3}(1+x)-\frac{3x}{a^3}(1+x)+\frac{1+x.W}{a^3}=0$$
$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{dt^2}-\frac{2mdx}{dt}-m^2y+\frac{1}{a^3}y-\frac{3xy}{a^3}+\frac{yW}{a^3}=0$$
$$\text{III.}\quad \frac{ddy}{dt^2}+\frac{1}{a^3}z-\frac{3}{a^3}.xz+\frac{1}{a^3}.zW=0.$$

7. Hactenus quantitas a aliter non eſt definita, niſi quod valorem quendam medium inter omnes abſciſſas X deſignet, ita vt quantitas x valores modo poſitiuos modo negatiuos ſortiretur, id quod infinitis modis fieri poſſet, dummodo a non multum a diſtantia media diſcreparet. Nunc autem conueniet ſtatui $\frac{1}{a^3}=mm$, quandoquidem hoc modo termini maiores in noſtris aequationibus deſtruuntur, calculusque ad noſtram hypotheſin, qua x ſumitur quantitas

valde parua modo poſitiua modo negatiua reuocatur, hoc modo noſtrae aequationes in formas ſequentes contrahentur

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2m\,dy}{dt} - 3m^2x(1+x) + mm(1+x)W = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt} - 3m^2xy \quad + mmyW = 0$$

$$\text{III.}\ \frac{ddz}{dt^2} + mmz - 3m^2xz + mmzW = 0.$$

8. Quoniam quantitates x, y et z per hypotheſin prae vnitate ſunt valde paruae, reiiciamus primo omnes terminos duas pluresue dimenſiones harum quantitatum continentes ſicque conſequemur tres ſequentes aequationes

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2m\,dy}{dt} - 3m^2x = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt} \quad = 0$$

$$\text{III.}\ \frac{ddz}{dt^2} + mmz \quad = 0$$

quarum duas priores, quoniam non amplius continent z, ſeorſim tractare licet, atque adeo commode vſu venit, vt ſecunda per ſe ſit integrabilis, dum eius integratio praebet $\frac{dy}{dt} + 2mx = \text{Conſt.}$, quam conſtantem quemadmodum comparatam eſſe oportet, hic accuratius eſt inueſtigandum. Maneat ea primo indeterminata, vt ſit

$\frac{dy}{dt} = C - 2mx$ qui valor in prima ſubſtitutus praebet

$\frac{ddx}{dt^2} + mmx - 2mC = 0$, cuius integrale completum eſt

$x = \frac{2C}{m} + \alpha\,\text{coſ.}\,q$ exiſtente $dq = m\,dt$,

iam hic valor in altera ſurrogatus praebebit

$\frac{dy}{dt} = -3C - 2m\alpha\,\text{coſ.}\,q$ et

et integrando

$$y = -3Ct - 2\alpha \text{ ſin. } q + D,$$

vbi ſtatim liquet conſtantem C euaneſcere debere, quia alioquin quantitas y continuo maior eſſet eualura, quod indoli motus medii aduerſaretur, ex quo ſequitur, ſi poſitio rectae SB rite fuerit conſtituta, neceſſario eſſe oportere $C = 0$, deinde etiam perſpicuum eſt, et alteram conſtantem D tuto ſumi poſſe $= 0$, quippe quod in idea longitudinis mediae pariter inuoluitur, ſicque pro hoc caſu habebimus

$$x = \alpha \text{ coſ. } q \quad \text{et } y = -2\alpha \text{ ſin. } q.$$

9. Euoluto hoc caſu, quo termini duarum, pluriumue dimenſionum negliguntur, ſi iis admiſſis, loco x et y hos inuentos valores

$$x = \alpha \text{ coſ. } q \quad \text{et } y = -2\alpha \text{ ſin. } q$$

exiſtente $dq = m\,dt$ ſubſtituamus et producta Sinuum et Coſinuum ad ſimplices Sinus vel Coſinus reuocemus, in prima aequatione termini hactenus neglecti deducent ad ſeriem certorum Coſinuum, in altera autem aequatione ad ſimilem ſeriem certorum Sinuum, propter quos deinde tam x, quam y ſimiles Sinus Coſinusue complecti debebunt, qui quomodo facile definiri queant, generatim oſtendiſſe iuuabit.

10. Ponamus igitur per approximationem iam pro x et y, quin etiam pro z certos huiusmodi valores eſſe inuentos, eosque in terminis minoribus, ſeu iis qui duas pluresue continent dimenſiones, tam primae quam ſecundae aequationis ſubſtitui,

ſtitui, atque in priore quidem aequatione occurrere terminum $+ M \operatorname{coſ.} \omega$, in altera vero talem $N \operatorname{ſin.} \omega$ exiſtente $d\omega = \mu\, dt$ et quoniam quicquid de his terminis trademus ſimul quoque ad quotcunque ſimiles extendi poteſt, conſideremus primo ſecundam aequationem:

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt} + N \operatorname{ſin.} \omega = 0$$

quae integrata dat

$$\frac{dy}{dt} + 2mx - \frac{N}{\mu} \operatorname{coſ.} \omega = 0 \quad \text{ſiue} \quad \frac{dy}{dt} = -2mx + \frac{N}{\mu} \operatorname{coſ.} \omega$$

qui valor in prima ſubſtitutus praebet

$$\frac{ddx}{dt^2} + mmx - \frac{2mN}{\mu} \operatorname{coſ.} \omega + M \operatorname{coſ.} \omega = 0$$

vnde colligitur

$$x = \frac{M - \frac{2mN}{\mu}}{\mu\mu - mm} \operatorname{coſ.} \omega,$$

quo inuento erit

$$\frac{dy}{dt} = -2mL \operatorname{coſ.} \omega + \frac{N}{\mu} \operatorname{coſ.} \omega$$

exiſtente

$$L = \frac{M - \frac{2mN}{\mu}}{\mu\mu - mm}$$

vnde fit

$$y = \left(-\frac{2mL}{\mu} + \frac{N}{\mu\mu}\right) \operatorname{ſin.} \omega$$

hos ſcilicet terminos, praeter iam inuentos ad x et y adiici oportet.

11. Vt argumentum hoc ordine pertractemus, quoniam in terminis ſecundae dimenſionis iam occurrit zz, cuius valorem demum ex tertia aequatione

tione elici oportet, primo ſtatuamus $z = 0$, vt hoc modo tertia aequatio prorſus ex calculo eliminetur; ſeu quod eodem redit, primo caſum quo Planeta in ipſo plano Eclipticae mouetur euoluamus.

Caſus prior quo Planeta in ipſo plano Eclipticae mouetur.

12. Quum igitur hic ſit $z = 0$ motus Planetae his duabus aequationibus euolutis, continebitur

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2m\,dy}{dt} - 3mmx, + 3mmxx - \tfrac{7}{2}mmyy$$
$$-4mmx^3 + 6mmxyy, + 5mmx^4 - \tfrac{15}{2}mmxxyy + \tfrac{15}{8}mmy^4$$
$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt}; -3m^2yx, + 6m^2xxy - \tfrac{3}{2}m^2y^3, -10m^2x^2y + \tfrac{15}{2}mmy^4$$

quibus aequationibus iam proxime ſatisfieri vidimus, ſumendo

$$x = k\,\text{coſ.}\,q \quad \text{et}\ y = -2k\,\text{ſin.}\,q,$$

exiſtente $dq = m\,dt$; ob ſequentes vero terminos euenire poſſet, vt $\frac{dq}{dt}$ non foret $= m$ ſed alii cuipiam numero ita comparato, vt omnes plane termini formae coſ. q, etiam ex minoribus membris oriundi deſtruerentur. Verum ex natura huius motus iam conſtat lineam apſidum quieſcere ideoque motum anomaliae mediae quae eſt q ipſi motui medio eſſe aequalem. De caetero quia hic q exprimit anomaliam mediam, littera k exhibet excentricitatem orbitae.

13. Hic autem aſſumimus excentricitatem k ſatis eſſe exiguam, quia alioquin coordinatae x et y,

 nimis

nimis augeri poſſent. Admittamus iam etiam terminos ſecundae dimenſionis et pro prima aequatione habebimus

$1 + 3\,mmxx = 3\,mmk^2 \text{coſ.}\, q = \frac{3}{2}\,mmkk + \frac{3}{2}\,mmkk\,\text{coſ.}\,2q$

$-\frac{3}{2}\,mmyy = -3\,mmkk + 3\,mmkk\,\text{coſ.}\,2q$ ideoque coniunctim

$-\frac{3}{2}\,mmkk + \frac{9}{2}\,mmkk\,\text{coſ.}\,2q.$

Pro ſecunda aequatione autem

$-3\,m^2\,xy = +3\,mmkk\,\text{ſin.}\,2\,q.$

Hic primo notandum terminum illum conſtantem $-\frac{3}{2}\,mmkk$ per principalem $-3\,mmx$ tolli debere, vnde hinc fit $x = -\frac{1}{2}\,kk$, pro angulo autem $2\,q$, comparatione cum ſuperiori regula inſtituta erit

$\omega = 2\,q$, $M = +\frac{9}{2}\,mmkk$,

$N = +3\,mmkk$, atque $\mu = 2\,m$, vnde colligimus

$x = \frac{kk}{2}\,\text{coſ.}\,2\,q$ ideoque $L = +\frac{kk}{2}$ ex quo denique fit

$y = +\frac{1}{4}\,kk\,\text{ſin.}\,2\,q.$

14. Vocemus has partes, quas modo tam pro x, quam pro y inuenimus, ſecundi ordinis; ſiquidem quadratum excentricitatis k inuoluunt, ita vt nunc coniunctim habeamus

$x = k\,\text{coſ.}\,q,\ -\frac{1}{2}\,kk + \frac{1}{2}\,kk\,\text{coſ.}\,2\,q$ et

$y = -2\,k\,\text{ſin.}\,q,\ +\frac{1}{4}\,kk\,\text{ſin.}\,2\,q.$

Quod ſi iam ſimili modo ſequentes partes indagare velimus, quo eas a ſe inuicem clarius diſtinguamus, ſtatuamus in genere

$x = k.\,\mathfrak{P} + kk\,\mathfrak{Q} + k^3.\,\mathfrak{R} + k^4\,\mathfrak{S}$ etc.

$y = k.\,P + kk\,Q + k^3.\,R + k^4\,S$ etc.

vbi

vbi quidem iam conſtat eſſe

$\mathfrak{P} = \text{coſ.}\, q;\quad \mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\, 2q;\quad P = -2\,\text{ſin}\, q;$
$Q = +\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\, 2q.$

15. Subſtituamus autem valores iſtos aſſumtos in vtraque aequatione et membris ſecundum dimenſionem ipſius k a ſe inuicem disiunctis nanciſcemur ſequentes aequationes.

I. Ordo

$$k\begin{cases}\frac{dd\mathfrak{P}}{mm\,dt^2} - \frac{2dP}{m\,dt} - 3\mathfrak{P} = 0\\ \frac{ddP}{mm\,dt^2} + \frac{2d\mathfrak{P}}{m\,dt} = 0\end{cases}$$

II. Ordo

$$kk\begin{cases}\frac{dd\mathfrak{Q}}{mm\,dt^2} - \frac{2dQ}{m\,dt} - 3\mathfrak{Q} + 3\mathfrak{P}^2 - \tfrac{3}{2}P^2 = 0\\ \frac{ddQ}{mm\,dt^2} + \frac{2d\mathfrak{Q}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}P = 0\end{cases}$$

III. Ordo

$$k^3\begin{cases}\frac{dd\mathfrak{R}}{mm\,dt} - \frac{2dR}{m\,dt} - 3\mathfrak{R} + 6\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - 3PQ - 4\mathfrak{P}^3 + 6\mathfrak{P}P^2 = 0\\ \frac{ddR}{mm\,dt^2} + \frac{2d\mathfrak{R}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}Q - 3P\mathfrak{Q} + 6\mathfrak{P}^2P - \tfrac{3}{2}P^3 = 0\end{cases}$$

IV. Ordo

$$k^4\begin{cases}\frac{dd\mathfrak{S}}{mm\,dt^2} - \frac{2dS}{m\,dt} - 3\mathfrak{S} + 6\mathfrak{P}\mathfrak{R} + 3\mathfrak{Q}^2 - 3PR - \tfrac{3}{2}Q^2 - 12\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q} + 12\mathfrak{P}PQ\\ \qquad + 6\mathfrak{Q}P^2 + 5\mathfrak{P}^4 - 15\mathfrak{P}^2.P^2 + \tfrac{15}{8}P^4 = 0\\ \frac{ddS}{mm\,dt^2} + \frac{2d\mathfrak{S}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}R - 3\mathfrak{Q}Q - 3P\mathfrak{R} + 12\mathfrak{P}P\mathfrak{Q} + 6\mathfrak{P}^2Q - \tfrac{9}{2}P^2.Q\\ \qquad - 10\mathfrak{P}^3.P + \tfrac{15}{2}P^3\mathfrak{P} = 0.\end{cases}$$

16. Quoniam aequationes primi et ſecundi ordinis iam expediuimus, aggrediamur binas aequationes tertii ordinis, et quia iam habemus

$\mathfrak{P} = \text{coſ.}\, q;\qquad \mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\, 2q$
$P = -2\,\text{ſin.}\, q;\quad Q = \qquad +\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\, 2q$

 pro

pro priore aequatione inueniemus

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,q + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,q$$

$$P\,Q = -\tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,q + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,q;$$

$$\mathfrak{P}^3 = +\tfrac{7}{4}\,\text{coſ.}\,q + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,q; \quad \mathfrak{P}\,P^2 = \text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,3\,q.$$

hinc iunctim $\tfrac{9}{4}\,\text{coſ.}\,q - \tfrac{25}{4}\,\text{coſ.}\,3\,q$

Simili modo pro poſteriori aequatione

$$\mathfrak{P}\,Q = +\tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,q + \tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,3\,q; \quad P\,\mathfrak{Q} = +\tfrac{3}{2}\,\text{ſin.}\,q - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,3\,q$$

$$\mathfrak{P}^2\,P = -\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,q - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,3\,q; \quad P^3 = -6\,\text{ſin.}\,q + 2\,\text{ſin.}\,3\,q$$

iunctim $\tfrac{9}{8}\,\text{ſin.}\,q. - \tfrac{39}{8}\,\text{ſin.}\,3\,q.$

17. Conſideremus hic primo angulum q, vt ſit $\omega = q$ et $\mu = m$, tum vero

$$M = +\tfrac{9}{4}\,m\,m \quad \text{et} \quad N = +\tfrac{9}{8}\,m\,m,$$

vnde quia quod ante erat x vel y; hic eſt vel $\mathfrak{R}$ vel R, elicimus

$$\mathfrak{R} = \frac{\tfrac{9}{4}\,m\,m - \tfrac{9}{4}\,m\,m}{m\,m - m\,m}\,\text{coſ.}\,q = \tfrac{0}{0}\,\text{coſ.}\,q$$

ſicque coefficiens huius termini eſt arbitrarius in ſe; quando ergo k deſignat totam excentricitatem hunc coefficientem $= 0$ ſtatui oportet, ita vt ſit $L = 0$ hinc autem fiet $R = +\tfrac{9}{8}\,\text{ſin.}\,q$. At vero pro altero angulo $3\,q$ vbi

$$\mu = 3\,m; \quad M = -\tfrac{25}{4}\,m\,m \quad \text{et} \quad N = -\tfrac{39}{8}\,m\,m$$

fiet $\mathfrak{R} = -\tfrac{3}{8}\,\text{coſ.}\,3\,q$; ita vt ſit $L = -\tfrac{3}{8}\,m$ hincque porro

$$R = -\tfrac{7}{24}\,\text{ſin.}\,3\,q,$$

quocir-

quocirca pro hoc ordine omnino habemus

$$\mathfrak{R} = \qquad\qquad - \tfrac{3}{8}\,\text{coſ.}\,3\,q$$
$$R = +\tfrac{9}{8}\,\text{ſin.}\,q \quad - \tfrac{7}{24}\,\text{ſin.}\,3\,q.$$

18. Progrediamur eodem modo ad binas aequationes ordinis quarti et pro prima quidem aequatione colligimus

				multipl. per
$\mathfrak{P}\mathfrak{R}$	$=$	$-\frac{3}{16}\,\text{coſ.}\,2\,q$	$-\frac{3}{16}\,\text{coſ.}\,4\,q$	$+6$
$\mathfrak{Q}^2$	$= +\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{8}$	$+3$
PR	$= -\frac{9}{8}$	$+\frac{17}{12}$	$-\frac{7}{24}$	-3
Q^2	$= +\frac{1}{32}$		$-\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{2}$
$\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q}$	$= -\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{8}$	-12
$\mathfrak{P}PQ$	$= +\frac{1}{8}$		$+\frac{1}{8}$	$+12$
$\mathfrak{Q}P^2$	$= -\frac{3}{2}$	$+2$	$-\frac{1}{8}$	$+6$
$\mathfrak{P}^4$	$= +\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+5$
$\mathfrak{P}^2.P^2$	$= +\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	-15
P^4	$= +6$	-8	$+2$	$+\frac{15}{8}$

iunctim $+\frac{69}{64} - \frac{59}{8}\,\text{coſ.}\,2\,q + \frac{579}{64}\,\text{coſ.}\,4\,q.$

At pro altera aequatione habebimus

			multipl. per
$\mathfrak{P}R$	$= +\frac{5}{12}\,\text{ſin.}\,2\,q$	$-\frac{7}{48}\,\text{ſin.}\,4\,q$	-3
$\mathfrak{Q}Q$	$= -\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	-3
$P\mathfrak{R}$	$= -\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$	-3
$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}P$	$= +\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$+12$
$\mathfrak{P}^2Q$	$= +\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$+6$
P^2Q	$= +\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{2}$
$\mathfrak{P}^3P$	$= -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-10
$\mathfrak{P}P^3$	$= -2$	$+1$	$+\frac{15}{2}$

iunctim $-\frac{21}{4}\,\text{ſin.}\,2\,q + \frac{61}{8}\,\text{ſin.}\,4\,q.$

19. Quod hic primum ad terminum conſtantem attinet in aequatione priori, quoniam y per terminum principalem $-3\mathfrak{S}$ tolli debet, erit $\mathfrak{S} = +\frac{23}{64}$, deinde pro angulo $2q$ habemus

$$\mu = 2m;\ M = -\tfrac{59}{8}mm \text{ et } N = -\tfrac{21}{4}mm$$

atque hinc

$$\mathfrak{S} = \tfrac{17}{24}\,\text{coſ.}\,2q,$$

ita vt ſit

$$L = -\tfrac{17}{24}.\,mm$$

ex quo denique colligitur

$$S = -\tfrac{29}{48}\,\text{ſin.}\,2q.$$

Eodem modo pro angulo $4q$ ob

$$\mu = 4m;\ M = +\tfrac{59}{64}mm \text{ et } N = +\tfrac{61}{8}m^2$$

fiet $\mathfrak{S} = +\frac{67}{194}\,\text{coſ.}\,4q$,

ita vt ſit

$$L = +\tfrac{67}{192}\,mm,$$

vnde tandem concluditur

$$S = +\tfrac{29}{96}\,\text{ſin.}\,4q,$$

conſequenter valores quarti ordinis $\mathfrak{S}$ et S ſequenti modo determinantur

$$\mathfrak{S} = +\tfrac{23}{64} - \tfrac{17}{24}\,\text{coſ.}\,2q + \tfrac{67}{192}\,\text{coſ.}\,4q$$
$$S = \quad -\tfrac{29}{48}\,\text{ſin.}\,2q + \tfrac{29}{96}\,\text{ſin.}\,4q.$$

20. His igitur coniunctis valores binarum coordinatarum x et y ſequenti modo ſe habebunt:

$$x = \begin{matrix}-\tfrac{1}{2}kk\\ -\tfrac{23}{64}k^4\end{matrix} + k\,\text{coſ.}\,q + \begin{matrix}+\tfrac{1}{2}kk\\ -\tfrac{17}{24}k^4\end{matrix}\text{coſ.}\,2q - \tfrac{7}{8}k^3\,\text{coſ.}\,3q + \tfrac{67}{192}k^4\,\text{coſ.}\,4q$$

$$y = \begin{matrix}-2k\\ +\tfrac{9}{8}k^3\end{matrix}\text{ſin.}\,q \begin{matrix}+\tfrac{1}{4}kk\\ -\tfrac{29}{48}k^4\end{matrix}\text{ſin.}\,2q - \tfrac{7}{24}k^3\,\text{ſin.}\,3q + \tfrac{29}{96}k^4\,\text{ſin.}\,4q.$$

Harum

Harum igitur formularum ope facile erit, tabulas conſtruere, quae ad quamuis anomaliam mediam Planetae q, exhibeant valores vtriusque quantitatis x et y dummodo excentricitas k orbitae accurate fuerit cognita, inuentis autem ad quoduis tempus propoſitum numeris x et y, fractio $\frac{y}{1+x}$ dabit tangentem aequationis centri Planetae ad longitudinem mediam addendae vel ſubtrahendae, prout iſta fractio $\frac{y}{1+x}$, fuerit vel poſitiua vel negatiua, tum vero ſi haec aequatio centri dicatur E ob $\frac{y}{1+x} = \text{Tang. E}$ diſtantia Planetae a Sole erit

$$a \sqrt{((1+x)^2 yy)} = \frac{a(1+x)}{\text{coſ. E}},$$

vbi a denotat diſtantiam mediam planetae a Sole, ita vt ſit $a = \sqrt[3]{\frac{1}{nm}}$ ſi ſcilicet diſtantia media Solis a terra vnitate referatur, id quod omnino conſentaneum eſt regulae Kepleri, qua cubi diſtantiarum mediarum quadratis temporum periodicorum ſunt proportionales.

21. Quanquam hic ſumſimus $z = 0$, tamen haec ſolutio ad omnes plane planetas primarios patet, quatenus ſcilicet a perturbatione eorum mutua animum abſtrahimus; quoniam enim nulla neceſſitate vrgente planum eclipticae in plano Tabulae conſtituimus, id tantum opus eſt, vt cuiusque planetae motus ad id ipſum planum, in quo mouetur, referatur, quippe quo caſu etiam ſemper habebitur $z = 0$, interim tamen vt pateat, quomodo calculum tractari conueniat, ſi ſtatim Planetarum motus ad

ad planum Eclipticae referre velimus, etiam hunc caſum ſeorſim et omni cura euoluamus.

Caſus poſterior quo orbita Planetae ad Eclipticam parumper inclinatur.

22. Seruatis valoribus, quos caſu praecedente pro x et y inuenimus, quandoquidem illi parum ob zz immutantur, propterea quod z, vt valde paruum ſpectatur, incipiamus a tertia aequatione, vbi primo terminos duarum pluriumue dimenſionum negligamus, ita vt habeamus hanc aequationem:

$$\frac{ddz}{dt^2} + mmz = 0$$

cuius integratio ſtatim praebet $z = C$ ſin. r exiſtente $dr = mdt$, vbi manifeſto, angulus r exprimit argumentum latitudinis Planetae medium, quod reperitur, ſi a loco medio Planetae in orbita, locus nodi aſcendentis ſubtrahatur. Ex quo quum linea nodorum etiam quieſcat, manifeſtum eſt vtique eſſe debere $\frac{dr}{dt} = m$. Porro autem coefficiens conſtans conuenit cum inclinatione orbitae Planetae ad Eclipticam, ſeu potius eius tangente quae ſi ponatur $= i$, habebimus pro hac prima approximatione $z = i$ ſin. r.

23. Quodſi iam in terminis ſequentibus minoribus loco z iſte valor ſubſtituatur, ſimulque pro x et y valores inuenti ſcribantur, ex his terminis orietur ſeries certorum ſinuum, quorum ſi quilibet fuerit $= K$ ſin. ω exiſtente $d\omega = \mu\, dt$ inde redundabit ſimilis terminus in valorem z, qui ſi ſtatuatur

tur $= \lambda$ ſin. ω, erit $-\lambda \mu^2 + \lambda m m + K = 0$ vnde ſequitur $\lambda = \frac{K}{\mu \mu - m m}$, hoc praemiſſo, conſideremus terminum tantum ſecundae dimenſionis $-3 m m x z$, vbi etiam loco x tantum eius valorem principalem k coſ. q ſtatuamus, ſicque prodibit haec aequatio

$$\frac{d d z}{d t^2} + m m z - \tfrac{3}{2} m m k i \text{ ſin.} (r-q) - \tfrac{3}{2} m m k i \text{ ſin.} (r+q) = 0$$

ex priore angulo $r - q$ naſcetur pro z terminus

$$+ \tfrac{3}{2} k i \text{ ſin.} (r - q)$$

vbi manifeſto angulus $r - q$ eſt conſtans, exhibens diſtantiam inter lineam apſidum et lineam nodorum, qui angulus ſi dicatur $\varkappa$ habebimus hinc

$$z = \ldots\ldots + \tfrac{3}{2} i k \text{ ſin.} \varkappa$$

ex altero autem angulo $r + q$ reſultat

$$z = \ldots\ldots - \tfrac{1}{2} i k \text{ ſin.} (r + q)$$

hactenus ergo peruenimus ad hunc valorem

$$z = i \text{ ſin.} r + \tfrac{3}{2} i k \text{ ſin.} \varkappa - \tfrac{1}{2} i k \text{ ſin.} (r + q).$$

24. Admittamus nunc etiam terminos trium dimenſionum ac ponamus breuitatis gratia vt ſupra

$$x = k \mathfrak{P} + k k \mathfrak{Q} + k^3 . \mathfrak{R} + k^4 \mathfrak{S} \text{ etc.}$$

$$y = k P + k k Q + k^3 . R + k^4 S \text{ etc.}$$

Simili autem modo ſtatuamus

$$z = i \text{ ſin.} r + i k X + i k^2 Y + i k^3 Z \text{ etc.}$$

atque noſtra aequatio reſoluetur in ſequentes ordines

I. Ordo

$$ik\left(\frac{ddX}{m^2 dt^2} + X - 3\mathfrak{P}\,\text{ſin.}\,r = 0\right.$$

II. Ordo

$$ikk\left(\frac{ddY}{m^2 dt^2} + Y - 3\mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r - 3\mathfrak{P}X + 6\mathfrak{P}^2.\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}P^2.\text{ſin.}\,r\right) = 0$$

III. Ordo

$$ik^3\left(\frac{ddZ}{mm\,dt^2} + Z - 3\mathfrak{R}\,\text{ſin.}\,r - 3\mathfrak{Q}X - 3\mathfrak{P}Y + 12\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r\right.$$
$$\left. + 6\mathfrak{P}^2.X - 3PQ\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}P^2.X\ 10\mathfrak{P}^3\,\text{ſin.}\,r + \tfrac{15}{2}\mathfrak{P}P^2\,\text{ſin}\,r\right) = 0.$$

25. Harum aequationum primam iam expediuimus, atque inuenimus

$$X = +\tfrac{3}{2}\,\text{ſin.}\,\varkappa - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(r+q),$$

vbi angulus conſtans $\varkappa = r - q$, hoc ergo valore ſubſtituto, pro ſecundo ordine habemus

$$\begin{array}{llllll}
-3) & \mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r & = -\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,r & -\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,(2q-r) & +\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,(2q+r) \\
-3) & \mathfrak{P}X & = +\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,r & -\tfrac{3}{4}\,\text{ſin.}\,(2q-r) & -\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,(2q+r) \\
+6) & \mathfrak{P}^2\,\text{ſin.}\,r & = +\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} & +\tfrac{1}{4} \\
-\tfrac{3}{2}) & P^2\,\text{ſin.}\,r & = +2 & +1 & -1
\end{array}$$

iunctim $K = 3\,\text{ſin.}\,(2q+r)$ atque ob $\mu = 3m$, fit

$$Y = \tfrac{3}{8}\,\text{ſin.}\,(2q+r)$$

26. Hinc eodem modo determinemus ordinem Z

$3)\ \mathfrak{R}\,\text{ſin.}\,r =$			$+\tfrac{3}{16}\text{ſin.}(3q-r)$	$-\tfrac{1}{16}\text{ſin.}(3q+r)$	
$-3)\ \mathfrak{Q}X =$	$\tfrac{7}{8}\text{ſin.}(q-r)$	$+\tfrac{5}{8}\text{ſin.}(q+r)$	$-\tfrac{3}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	
$-3)\ \mathfrak{P}Y =$		$+\tfrac{3}{16}$		$+\tfrac{3}{16}$	
$+12)\ \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,\text{ſin}\,r =$	$+\tfrac{1}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	
$+6)\ \mathfrak{P}^2X =$	$-\tfrac{5}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	$-\tfrac{3}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	
$-3)\ PQ\,\text{ſin.}\,r =$	$+\tfrac{1}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	
$-\tfrac{3}{2})\ P^2X =$	$-\tfrac{7}{8}$	$-\tfrac{5}{8}$	$+\tfrac{3}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	
$-10)\ \mathfrak{P}^3\,\text{ſin.}\,r =$	$-\tfrac{3}{8}$	$+\tfrac{3}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	
$+\tfrac{15}{2})\ \mathfrak{P}P^2\,\text{ſin.}\,r =$	$-\tfrac{1}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	$+\tfrac{1}{8}$	$-\tfrac{1}{8}$	iunctim

iunctim $K = +0\,\text{ſin.}(q-r) + \frac{15}{16}\,\text{ſin.}(q+r) - \frac{1}{16}\,\text{ſin.}(3q-r) - 5\,\text{ſin.}(3q+r)$

et $\mu = 0 \qquad\qquad 2m \qquad\qquad 2m \qquad\qquad 4m$

conſequenter

$$Z = +\tfrac{5}{16}\,\text{ſin.}(q+r) - \tfrac{1}{48}\,\text{ſin.}(3q-r) - \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}(3q+r).$$

Hos ordines euoluiſſe ſufficiat, quibus collectis reperimus

$$z = i\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}ik\,\text{ſin.}(q-r) - \tfrac{1}{2}ik\,\text{ſin.}(q+r) + \tfrac{3}{8}ikk\,\text{ſin.}(2q+r)$$
$$+ \tfrac{5}{16}ik^3$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$-\tfrac{1}{48}ik^3\,\text{ſin.}(3q-r) - \tfrac{1}{3}ik^3\,\text{ſin.}(3q+r).$$

27. Inuento hoc valore ipſius z, nunc etiam correctiones, quae hinc in quantitates x et y redundant, inueſtigari oportet, quem in finem definiamus primo quadratum zz, quod autem non vltra indicem $iikk$ extendamus, quod ergo ſequenti modo reperietur expreſſum:

$$zz = ii\,\text{ſin.}\,r^2 + 2iik.\,X.\,\text{ſin.}\,r + 2iikk\,Y\,\text{ſin.}\,r$$
$$+ iikk.\,XX$$

quae forma euoluitur in hanc

$$zz = ii(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ}\,2r) + iik(+\text{coſ}\,q - \tfrac{3}{2}\,\text{coſ.}(q-2r) + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}(q+2r)$$
$$+ iikk(+\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{8}\,\text{coſ.}\,2q + \tfrac{3}{4}\,\text{coſ.}\,2r - \tfrac{9}{8}\,\text{coſ.}(2q-2r) - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}(2q+2r))$$

cuius loco ſcribamus

$$zz = ii\,A + iik.\,B + iikk\,C,$$

ita vt ſit

$$A = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2r;\quad B = \text{coſ}\,q - \tfrac{3}{2}\,\text{coſ.}(q-2r) + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}(q+2r);$$
$$C = +\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{8}\,\text{coſ.}\,2q + \tfrac{3}{4}\,\text{coſ}\,2r - \tfrac{9}{8}\,\text{coſ.}(2q-2r) - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}(2q+2r).$$

Deinde pro quaeſitis correctionibus ipſarum x et y, ſtatuamus

$$x = k\mathfrak{P} + kk\mathfrak{Q} + k^3\mathfrak{R} + k^4\mathfrak{S} + ii\mathfrak{T} + iik\mathfrak{U} + iikk\mathfrak{V}$$
$$y = kP + kkQ + k^3R + k^4S + iiT + iikU + iikkV$$

quibus valoribus in prima et ſecunda aequatione ſubſtitutis, pro nouis ordinibus, ſignis ii; iik et $iikk$ notatis obtinebimus ſequentes aequationes:

Ordo ii
$$\begin{cases} \frac{dd\mathfrak{T}}{mm\,dt^2} - \frac{2\,dT}{m\,dt} - 3\mathfrak{T} - \frac{3}{2}A = 0 \\ \frac{ddT}{mm\,dt^2} + \frac{2\,d\mathfrak{T}}{m\,dt} = 0 \end{cases}$$

iik
$$\begin{cases} \frac{dd\mathfrak{U}}{mm\,dt^2} - \frac{2\,dU}{m\,dt} - 3\mathfrak{U} + 6\mathfrak{P}\mathfrak{T} - 3PT - \frac{3}{2}B + 6\mathfrak{P}A = 0 \\ \frac{ddU}{mm\,dt^2} + \frac{2\,d\mathfrak{U}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}T - 3P\mathfrak{T} - \frac{3}{2}AP = 0 \end{cases}$$

$iikk$
$$\begin{cases} \frac{dd\mathfrak{V}}{mm\,dt^2} - \frac{2\,dV}{m\,dt} - 3\mathfrak{V} + 6(\mathfrak{P}\mathfrak{U} + \mathfrak{Q}\mathfrak{T}) - 3(PU + QT) - 12\mathfrak{P}^2\mathfrak{T} \\ \qquad + 6P^2\mathfrak{T} + 12\mathfrak{P}PT - \frac{3}{2}C + 6\mathfrak{P}B + 6A\mathfrak{Q} = 0 \\ \frac{ddV}{mm\,dt^2} + \frac{2\,d\mathfrak{V}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}U - 3P\mathfrak{U} - 3\mathfrak{Q}T - 3Q\mathfrak{T} \\ \qquad + 6\mathfrak{P}^2T + 12\mathfrak{P}P\mathfrak{T} - \frac{9}{2}P^2T - \frac{3}{2}BP - \frac{3}{2}AQ = 0. \end{cases}$$

28. Euoluamus nunc terminos minores pro his ordinibus, ac pro primo ordine

$-\frac{3}{2}A = \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2r$

ergo $M = -\frac{3}{4} \qquad + \frac{3}{4}\,\text{coſ.}\,2r$ at vero N erit $= 0$

vnde quia terminus conſtans per terminum principalem $-3\mathfrak{T}$ tolli debet, hinc fit $\mathfrak{T} = -\frac{1}{4}$; deinde pro angulo $2r$, habemus $\mu = 2m$, tum vero $M = +\frac{3}{4}$ et $N = 0$ vnde $\mathfrak{T} = +\frac{1}{4}\,\text{coſ.}\,2r$, ideoque $L = +\frac{1}{4}mm$ vnde porro fit $T = -\frac{1}{4}\,\text{ſin.}\,2r$, quocirca pro hoc ordine nacti ſumus

$$\mathfrak{T} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,2r; \quad T = -\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,2r.$$

29.

29. Pergamus ad ſecundum ordinem et euolvamus terminos minores vtriusque aequationis :

	coſ. q	coſ. $(q-2r)$	coſ. $(q+2r)$
6) $\mathfrak{P}\mathfrak{T} =$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$
-3) P T $=$		$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$) B $=$	$+1$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$+6$) $\mathfrak{P}$A $=$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
iunctim M $=$	0	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
	ſin. q	ſin. $(q-2r)$	ſin. $(q+2r)$
-3) $\mathfrak{P}$T $=$		$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
-3) P$\mathfrak{T}$ $=$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$) A P $=$	-1	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
ergo N $=$	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$
hinc μ $=$	m	$-m$	$+3m$
$-\frac{2mN}{\mu}$ $=$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$+$ M $=$	0	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
Numer. $=$	0	0	-1
Demon. $=$	0	0	8
L $=$	0	0	$-\frac{1}{8}$
$\frac{N}{\mu\mu}$ $=$	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{24}$
$-\frac{2mL}{\mu}$ $=$	0	0	$+\frac{1}{12}$
U $=$	0. ſin. q	$-\frac{3}{8}$ ſin. $(q-2r)$	$+\frac{1}{8}$ ſin. $(q+2r)$
at $\mathfrak{U}$ $=$	0. coſ q	$+ 0$ coſ. $(q-2r)$	$-\frac{1}{8}$ coſ. $(q+2r)$.

29. His duobus ordinibus acquieſcamus, quoniam facile patet, quemadmodum etiam aequationes tertii ordinis reſolui queant, quare pro quantitatibus x et y, praeter valores iam in praecedente caſu euolutos, habebimus nunc inſuper

$$x = \ldots\ldots - \tfrac{1}{4}ii + \tfrac{1}{4}ii\,\text{coſ.}\,2r + 0.iik\,\text{coſ.}(q-2r)$$
$$- \tfrac{1}{8}iik\,\text{coſ.}\,(q+2r)$$

$$y = \ldots\ldots - \tfrac{1}{4}ii\,\text{ſin.}\,2r - \tfrac{3}{8}iik\,\text{ſin.}(q-2r) + \tfrac{1}{8}iik\,\text{ſin.}(q+2r)$$

quibus adiungi poteſt valor pro z iam ante adhibitus.

30. His correctionibus pro x et y inuentis, nunc demum etiam valorem pro z accuratius definire poterimus, ſiquidem hactenus in tertia aequatione, terminum z^3 neglEximus, perſpicuum autem eſt inde ad valorem z, acceſſuros inſuper terminos indicibus i^3 et $i^3 k$ affectos, ad quos inueniendos, ſtatuamus

$$z = i\,\text{ſin.}\,r + ikX + ikkY + ik^3Z,\ + i^3\,\text{♄} + i^3k\,\text{♃}$$

I. Ordo

$$i^3)\quad \frac{dd\,\text{♄}}{mm\,dt^2} + \text{♄} - 3\,\mathfrak{T}\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}\,\text{ſin.}\,r^3 = 0$$

II. Ordo

$$i^3k)\quad \frac{d\,\text{♃}}{mm\,dt^2} + \text{♃} - 3\mathfrak{T}X - 3\,\mathfrak{U}\,\text{ſin.}\,r + 12\,\mathfrak{P}\mathfrak{T}\,\text{ſin.}\,r - 3PT\,\text{ſin.}\,r$$
$$- \tfrac{9}{2}X\,\text{ſin.}\,r^2 = 0.$$

31. En igitur duas nouas aequationes, methodo ſupra tradita reſoluendas, ac pro priori quidem charactere i^3 inſignita minores termini praebent vt ſequitur

$$-3)\quad \mathfrak{T}\,\text{ſin.}\,r = -\tfrac{3}{8}\,\text{ſin.}\,r + \tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,3r$$
$$-\tfrac{3}{2})\quad \text{ſin.}\,r^3 = +\tfrac{3}{4}\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,3r$$
$$K = \quad 0 \qquad 0$$

vnde hinc nulla correctio ad valorem ipſius z accedit, ſeu fit $\text{♄} = 0$.

32.

32. Pro altera aequatione charactere $i^3 k$ ſignata euolutio terminorum minorum praebet

		ſin.$(q-r)$	ſin.$(q+r)$	ſin.$(q-3r)$	ſin.$(q+3r)$
$-3)$	$\mathfrak{T}X =$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$
$-3)$	$\mathfrak{U}$ ſin. $r =$		$+\frac{1}{16}$		$-\frac{1}{16}$
$+12)$	$\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ ſin. $r =$	$+\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{16}$
$-3)$	PI ſin. $r =$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$-\frac{9}{2})$	X ſin. $r^2 =$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{8}$

ergo $K = +\frac{15}{4}$ ſin.$(q-r) - \frac{51}{16}$ ſin.$(q+r) - \frac{3}{2}$ ſin.$(q-3r) + \frac{15}{16}$ ſin.$(q+3r)$

	ſin.$(q-r)$	ſin.$(q+r)$	ſin.$(q-3r)$	ſin.$(q+3r)$
$\mu =$	0	$+2m$	$-2m$	$+4m$
hinc Denom.	-1	$+3$	$+3$	$+15$

conſequenter

$$\mathfrak{Z} = -\tfrac{15}{4}\text{ ſin.}(q-r) - \tfrac{17}{16}\text{ ſin.}(q+r) - \tfrac{1}{2}\text{ ſin.}(q-3r) + \tfrac{1}{16}\text{ ſin.}(q+3r).$$

33. Colligamus nunc omnes partes, quibus coordinatae noſtrae x, y et z pro caſu poſteriore definiuntur, ac prodibunt ſequentes expreſſiones:

$$x = -\tfrac{1}{2}kk + k\,\text{coſ.}\,q + \tfrac{1}{2}kk\,\text{coſ.}\,2q - \tfrac{3}{8}k^3\,\text{coſ.}\,3q + \tfrac{67}{192}k^4\,\text{coſ.}\,4q$$
$$\tfrac{23}{64}k^4 \qquad -\tfrac{17}{24}k^4$$
$$-\tfrac{1}{4}ii \qquad +\tfrac{1}{4}ii\,\text{coſ.}\,2r - \tfrac{1}{8}iik\,\text{coſ.}(q+2r)$$

$$y = -2k\,\text{ſin.}\,q + \tfrac{1}{4}kk\,\text{ſin.}\,2q - \tfrac{7}{24}k^3\,\text{ſin.}\,3q + \tfrac{29}{96}k^4\,\text{ſin.}\,4q$$
$$+\tfrac{9}{8}k^3 \qquad -\tfrac{29}{48}k^4$$
$$-\tfrac{1}{4}ii\,\text{ſin.}\,2r - \tfrac{3}{8}iik\,\text{ſin.}(q-2r) + \tfrac{1}{8}iik\,\text{ſin.}(q+2r)$$

$$z = i\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}ik\,\text{ſin.}(q-r) - \tfrac{1}{2}ik\,\text{ſin.}(r+q) + \tfrac{3}{8}ikk\,\text{ſin.}(2q+r)$$
$$+\tfrac{5}{16}ik^3$$
$$-\tfrac{15}{4}i^3k \qquad -\tfrac{17}{16}i^3k$$
$$-\tfrac{1}{48}ik^3\,\text{ſin.}(3q-r) - \tfrac{1}{8}ik^3\,\text{ſin.}(3q+r) - \tfrac{1}{2}ik^3\,\text{ſin.}(q-3r)$$
$$+\tfrac{1}{16}ik^3\,\text{ſin.}(q+3r)$$

Verum

Verum vti iam notauimus neutiquam conſultum erit motus planetarum ſecundum hunc poſteriorem caſum exigere; praecipue ſi eorum orbitae ad eclipticam notabiliter fuerint inclinatae, tum enim nequidem multitudo terminorum ab inclinatione *i* pendentium forte ſufficeret, has autem ambages feliciſſime euitabimus, ſi motum cuiusque planetae ſtatim ad ipſum planum in quo mouetur referamus, hocque pacto totam determinationem ad caſum priorem perducamus.

DIS-

DISQVISITIO
DE
LENTIBVS OBIECTIVIS TRIPLICATIS,
QVAE VEL NVLLAM CONFVSIONEM PARIANT, VEL ETIAM DATAM CONFVSIONEM A RELIQVIS LENTIBVS ORTAM DESTRVERE VALEANT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum hoc argumentum a me iam ſaepius, ac praecipue in *Dioptrica* eſſet pertractatum, plerumque ternas lentes ſibi iungendas ita proxime adaptare aſſumſi, vt earum diſtantiae inter ſe pro nihilo haberi poſſent: Id quod in praxi nullo modo exſequi licet, cum omnes certam diſtantiam focalem habentes neceſſario certam quandam craſſitiem obtinere debeant, ita vt centra lentium ad minimum tanto interuallo a ſe inuicem ſint remota; hinc autem effectus nullius confuſionis quem in his lentibus intendebam tantopere perturbatur, vt ſaepe adhuc maiorem confuſionem producere queant, quam ſi earum loco lentes ſimplices adhiberentur. Nunc mihi

mihi hoc imprimis erit propoſitum, vt in determinatione huiusmodi lentium triplicatarum etiam craſſitiei rationem ſim habiturus, hoc enim facto demum tales lentes ad Praxin cum ſucceſſu accommodare licebit.

§. 2. Praeterea vero, in id mihi potiſſimum eſſe incumbendum, arbitror, vt huiusmodi lentibus quam maximam aperturam conciliem, quandoquidem hoc imprimis deſiderari ſolet, vt tubi dioptrici quam minimam longitudinem adipiſcantur, quem ſcopum commodiſſime attingemus, ſi pro data diſtantia focali lentes triplicatae maximam aperturam admittunt: Quare cum apertura maximam partem a lente concaua cryſtallina pendere ſoleat, ei pro data diſtantia focali talem figuram tribui conueniet quae maximae aperturae ſit capax, id quod ſine dubio obtinetur, ſi illi vtrinque eadem curuatura inducatur, tum enim diameter aperturae ſemiſſi radii curuaturae aequalis accipi poterit: Tum autem praecipue cauendum erit, ne vel in prima vel in tertia lente adhuc minor radius curuaturae occurrat.

§. 3. His igitur conditionibus principalibus praemiſſis, lentem triplicatam ita ex tribus lentibus componi aſſumo, vt prima et tertia ex vitro coronario dicto, cui ratio refractionis reſpondet vt 1, 53 ad 1, media vero ex vitro cryſtallino ab Anglis *Flint-Glaſs* vocato, cui ratio refractionis reſpondeat vt 1, 58 ad 1. parari debeat. Pro his igitur tribus lentibus, earum diſtantias focales contem-

templari oportet, quarum prima nobis ſit $= p$, ſecunda $= q$ ac tertia $= r$: Vbi intelligi debet, primam p ac tertiam r, fore poſitiuas, mediam vero q negatiuam, quae cum vtrinque eſſe debeat aequaliter concaua, radius vtriusque faciei erit $= 1,16.q$, vnde haec lens admittet aperturam cuius ſemidiameter quaſi erit $0,29q$; ex quo iam patet lentes triplicatas eo fore perfectiores quo maior prodierit quantitas q, pro data ſcilicet diſtantia focali totius lentis triplicatae quam perpetuo deſignabimus littera Π, ita vt obiecta maxime remota poſt talem lentem ad diſtantiam $= \Pi$ repreſententur.

§. 4. Quoniam igitur diſtantiae focales p, q, r ad iſtam quantitatem Π certam relationem tenere debent, ponamus ſtatim eſſe

$$p = \frac{\Pi}{f}; \quad q = \frac{\Pi}{g} \quad \text{et } r = \frac{\Pi}{h},$$

tum vero diſtantias inter lentem primam et ſecundam pariter atque inter ſecundam et tertiam, commode inter ſe aequales ſtatuere licebit; ſit igitur vtraque haec diſtantia $= \frac{\Pi}{k}$, quam inter centra ſeu puncta media binarum lentium contiguarum accipi eſt intelligendum. At quia in nulla harum lentium maiores arcus quam triginta graduum ad ſummum admittere fas eſt, lens autem media maximam aperturam habere cenſetur; eius tota craſſities minor eſſe nequit quam $\frac{1}{15}q$, hinc ne lentes ſe mutuo plane contingant ſufficiet hanc diſtantiam ſtatuiſſe $= \frac{1}{14}q$: hoc enim modo libertas nobis relinquetur, iſtam diſtantiam paulisper ſiue augendi ſiue minuendi; id

 quod

quod in praxi maximam afferet vtilitatem; hinc igitur cum g ſit quantitas negatiua in poſterum ſtatuemus $k = -12g$.

§. 5. Nunc igitur ſi ſecundum praecepta dioptrica diſtantias determinatrices pro prima lente ponamus a et α, pro ſecunda b et β et pro tertia c et γ: Statim erit $a = \infty$ et $\gamma = \Pi$, tum vero erit $\alpha = p = \frac{\Pi}{f}$, ac pro ſecunda lente $\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} = \frac{g}{\Pi}$ pro tertia autem lente $\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r} = \frac{b}{\Pi}$. Praeterea vero diſtantiae inter lentes ſtabilitae dabunt

$$\alpha + b = \frac{\Pi}{k} \quad \text{et} \quad \beta + c = \frac{\Pi}{k},$$

hinc igitur cum ſit

$$\alpha = \frac{\Pi}{f} \text{ erit } b = \frac{\Pi(f-k)}{fk} \text{ et } \frac{1}{b} = \frac{fk}{\Pi(f-k)};$$

deinde quia eſt

$$\frac{1}{c} = \frac{b-1}{\Pi} \text{ ideoque } c = \frac{\Pi}{b-1}$$

vnde ex poſtrema aequalitate prodit

$$\beta = \frac{\Pi(b-k-1)}{k(b-1)} = \frac{fk}{fg-gk-fk} \text{ ideoque } \frac{1}{\beta} = \frac{k(b-1)}{\Pi(b-k-1)};$$

cum igitur ſit $\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{g}{\Pi}$ hinc erit

$$\frac{1}{\beta} = \frac{fg+fk-gk}{\Pi(f-k)} = \frac{k(b-1)}{\Pi(b-k-1)}$$

vnde conſequimur

$$\frac{b-k-1}{k(b-1)} = \frac{f-k}{fg-fk-gk} = \frac{1}{k} - \frac{1}{b-1}$$

hincque porro

$$\frac{1}{b-1} = \frac{-1}{k}. \frac{f+k}{fg-fk-gk} = \frac{fg-2fk-gk+kk}{k(fg-fk-gk)}$$

conſequenter erit

$$b-1 = \frac{k(fg-fk-gk)}{fg-2fk-gk+kk}$$

vnde

vnde colligimus

$$f+g+b-1=\frac{fg(f+g)-k(2ff+2fg+gg)}{fg-2fk-gk+kk},$$

qui denominator etiam ita exprimi poterit

$$(k-f)(k-g)-fk;$$

hae igitur expreſſiones, poſito $k=-12g$ ſequentes induent formas

$$b-1=\frac{-12g(13fg+12gg)}{13g(f+12g)+12fg}=\frac{-12g(13f+12g)}{25f+156g} \text{ et}$$

$$f+g+b-1=\frac{25ff+25fg+12gg}{25f+156g}.$$

§. 6. Praeterea vero ſecundum praecepta in dioptrica tradita formentur hinc ſequentes quantitates

I°. $P=\frac{-\alpha}{b}=\frac{k}{k-f}$; II°. $Q=\frac{-\beta}{c}=\frac{k+1-b}{k}=1-\frac{b-1}{k}=\frac{k(k-f)}{fg-2fk-gk+kk}$ ita vt ſit $PQ=\frac{kk}{(k-f)(k-g)-fk}$: III°. $\frac{+f(b-k-1)}{(b-1)(f-k)}=\frac{f}{f-k}-\frac{fk}{(b-1)(f-k)}$; IV°. $\mathfrak{B}=\frac{q}{b}=\frac{fk}{g(f-k)}$; V°. $C=\frac{\gamma}{c}=b-1$ VI°. $\mathfrak{C}=\frac{r}{c}=\frac{b-1}{b}$

ſumto igitur $k=-12g$ erit

$$P=\frac{12g}{f+12g};\ PQ=\frac{144g}{25f+156g};\ B=\frac{-12f}{13f+12g} \text{ et } \mathfrak{B}=\frac{-12f}{f+12g}.$$

§. 7. His valoribus conſtitutis qui diſpoſitionem lentium in genere reſpiciunt, confuſionem a radiorum diuerſa refractione oriundam e medio tollere aggrediamur. Sit igitur pro vitro coronario ratio refractionis radiorum mediorum $=n:1$ radiorum vero extremorum vt $n+dn:1$; ſimili modo ſit pro vitro cryſtallino refractio radiorum mediorum $=n':1$ extremorum autem vt $n'+dn':1$,

 ita

ita vt formalae differentiales dn et dn' diſperſionem radiorum exprimant. Iam ſi ponamus $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = \zeta : \eta$, in dioptrica demonſtraui, confuſionem hinc natam penitus tolli, ſi ſatis fiat huic aequationi

$$\zeta . p + \frac{\eta q}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\zeta r}{B^2 \mathfrak{C}^2} = 0$$

quae ob

$$p = \frac{\Pi}{f};\ q = \frac{\Pi}{g} \text{ et } r = \frac{\Pi}{h}$$

abit in hanc formam

$$\frac{\zeta}{f} + \frac{\eta}{\mathfrak{B}^2 g} + \frac{\zeta}{B^2 \mathfrak{C} h} = 0.$$

§. 8. *Dollondus* autem per experimenta inuenit, eſſe proxime $dn : dn' = 2 : 3$, cum ergo ſit $n - 1 : n' - 1 = 53 : 58$ erit $\zeta : \eta = \frac{2}{53} : \frac{3}{58}$ ideoque proxime $\zeta : \eta = 3 : 4$; cum enim ratio illa dollondiana $2 : 3$ vt pote ex experimentis concluſa neutiquam pro exacta haberi queat, aliquantillum ab ea recedere licebit, et ratio $\zeta : \eta = 3 : 4$ veritati aeque conſentanea haberi poteſt, ac ipſa dollondiana $= 2 : 3$; hinc igitur per ζ diuidendo aequatio noſtra, confuſionem tollens erit

$$\frac{1}{f} + \frac{4}{3 \mathfrak{B}^2 g} + \frac{1}{B^2 \mathfrak{C}^2 k} = 0$$

haecque aequatio etſi tantam confuſionem ex ipſa lente obiectiua oriundam deſtruit, tamen quia lentes ſequentes in hac expreſſione valores vix ſenſibiles producerent, eos eo magis omittere licebit, quod ipſa ratio $3 : 4$ vero tantum proxima eſt cenſenda; Interim tamen neceſſe eſt reliquas lentes ita diſponi, vt mai-

margini colorato occurratur, quem in finem regulae in dioptrica traditae ſollicite erunt obſeruandae.

§. 9 Quo igitur hanc aequationem euoluamus ex precedentibus eſſe patet

$$\mathfrak{B} = \frac{-12f}{f+12g} = -\frac{f}{g}\cdot\frac{12g}{f+12g},$$

hincque

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = -\frac{g}{f}\cdot\frac{f+12g}{+12g},$$

ponamus autem

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = -\frac{g}{f}.\ G,\ \text{ita vt ſit}\ G = \frac{f+12g}{12g}$$

ita vt ſecundus terminus noſtrae aequationis fiat

$$= \frac{4g}{3ff}GG,$$

pro tertio autem termino quia habemus

$$B = \frac{-12f}{13f+12g}\ \text{et}\ \mathfrak{C} = \frac{b-1}{b} = \frac{-12g(13f+12g)}{b(25f+156g)}$$

erit $B\mathfrak{C} = \frac{144fg}{b(25f+156g)} = \frac{f}{b}\cdot\frac{144g}{25f+156g}$

hincque

$$\frac{1}{B\mathfrak{C}} = \frac{b}{f}\cdot\frac{25f+156g}{144g}.$$

Ponatur autem

$$\frac{1}{B\mathfrak{C}} = \frac{b}{f}.\ H\ \text{ita vt ſit}\ H = \frac{25f+156g}{144g}$$

vnde terminus tertius euadet $= \frac{b}{ff}HH$, quare per ff multiplicando aequatio noſtra erit

$$f + \tfrac{4}{3}gGG + bHH = 0.$$

§. 10. Cum ante eſſet

$$b - 1 = \frac{-12g(13f+12g)}{25f+156g},$$

nunc

nunc nacti ſumus duas aequationes quibus ſatisfieri oportet; quarum prior eſt

$$h = 1 - \frac{12g(15f + 12g)}{25f + 156g}$$

altera vero

$$f + \tfrac{4}{3}g\,GG + h.\,HH = 0$$

exiſtente

$$G = \frac{f + 12g}{12g} \quad \text{et} \quad H = \frac{25f + 156g}{144g},$$

in quibus cum tantum tres litterae f, g et h occurrant binas quasque per tertiam definire licebit.

§. 11. Nunc autem imprimis attendamus ad eam conditionem, qua requiritur, vt, neque in prima, neque tertia lente vlla occurrat curuatura, quae maior ſit quam ſecundae lentis, vnde ſtatim manifeſto ſequitur, diſtantias focales p et r maiores eſſe debere quam q, quia ergo diſtantiae reciproce ſunt proportionales litteris f, g et h, neceſſe eſt vt f et h minores ſint quam g, ſeu potius quam $-g$, quia g eſt vt vidimus numerus negatiuus, cui conditioni quemadmodum ſatisfieri poterit, ex caſu quo craſſities lentis plane negligitur, facillime colligere poterimus, tum autem erit

$$f + g + h = 1 \quad \text{et} \quad f + \tfrac{4}{3}g + h = 0,$$

vnde ſtatim fit

$$g = -3 \quad \text{et} \quad f + h = 4$$

quod ſi iam ponamus $g = -\vartheta f$, vtique debet eſſe $\vartheta > 1$, et quia hinc eſt $f = \frac{3}{\vartheta}$ erit $h = \frac{4\vartheta - 3}{\vartheta}$; quia igitur $h < 3$ neceſſe eſt vt ſit $\vartheta < 3$ quocirca haec

con-

conditio poſtulat vt numerus ϑ intra limites 1 et 3 accipiatur.

§. 12. Ponamus nunc in genere eſſe $g = -\vartheta f$ et quia craſſities vere tam eſt parua, quam circumſtantiae permittunt, iidem limites pro ϑ dati, etiamnunc locum habebunt; Introducto autem hoc valore fiet

$$G = \frac{12\vartheta - 1}{12\vartheta} \quad \text{et} \quad H = \frac{156\vartheta - 25}{144\vartheta}$$

pro aequatione poſteriore

$$h = 1 + 12\vartheta f\left(\frac{12\vartheta - 13}{156\vartheta - 25}\right).$$

Ponamus autem breuitatis gratia $h = 1 + Ff$ vt ſit

$$F = 12\vartheta\left(\frac{12\vartheta - 13}{156\vartheta - 25}\right)$$

qui valor in altera aequatione ſubſtitutus dabit

$$f - \tfrac{4}{3}\vartheta f GG + HH + Ff HH = 0$$

ex qua concludimus

$$f = \frac{HH}{\frac{4}{3}\vartheta GG - FHH - 1};$$

Quo valore inuento bini reliqui erunt

$$g = -\vartheta f \quad \text{et} \quad h = 1 + Ff.$$

§. 13. Hic igitur numerus ϑ arbitrio noſtro relinquitur, dummodo intra limites praeſcriptos 1 et 3 accipiatur, tum vero pro ſequenti calculo reliquae litterae iſtos induent valores

$$P = \frac{12\vartheta}{12\vartheta - 1} \text{ ſiue } P = \frac{1}{G},\ PQ = \frac{144\vartheta}{156\vartheta - 25} \text{ ideoque}$$

$$PQ = \frac{1}{H} \text{ praeterea vero}$$

$$\mathrm{B} = \frac{12}{12\vartheta - 13} \text{ et } \mathfrak{B} = \frac{12}{12\vartheta - 1};\ C = h - 1 \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}.$$

§. 14. Progrediamur igitur vlterius, ac videamus, quomodo etiam alteram conditionem, ex apertura lentium oriundam deſtrui conueniat, et quia duo vitri genera hic in conſiderationem veniunt, pro vtroque certos numeros, quibus in calculo eſt opus apponamus

Pro vitro coronario	Pro vitro cryſtallino
$\mu = 0,9875$	$\mu' = 0,8724$
$\nu = 0,2194$	$\nu' = 0,2529$
$\rho = 0,2266$	$\rho' = 0,1413$
$\sigma = 1,6602$	$\sigma' = 1,5827$
$\tau = 0,9252$	$\tau' = 0,8775$
$\sigma - \rho = 1,4336$	$\sigma' - \rho' = 1,4414$
$l(\sigma - \rho) = 0,1564280$	$l(\sigma' - \rho') = 0,1587845$
$l\tau = 9,9662356$	$l\tau' = 9,9432471$

vnde porro in ſubſidium calculi ſequentis, colligantur hi logarithmi

$$l\frac{\mu'}{\mu} = 9,9461786$$

$$l\nu = 9,3412366$$

$$l\nu' = 9,4029488.$$

§. 15. Quia lens ſecunda cryſtallina vtrinque ſupponitur aeque concaua, ſi eius numerus arbitrarius ponatur $= \lambda'$ erit

$\sqrt{\lambda' - 1} = \frac{(\sigma' - \rho')}{\tau'}(\mathfrak{B} - \frac{1}{2})$, vbi eſt $l\frac{(\sigma' - \rho')}{\tau'} = 0,2155374$

vnde elici debet valor numeri λ', deinde ſi pro lente prima ponatur numerus arbitrarius $= \lambda$, erit eius

Radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}}$

Radius faciei poſterioris $= \frac{p}{\rho + \tau\sqrt{\lambda - 1}}$. At

At pro lente tertia, ſi eius numerus arbitrarius vocetur λ'' erit eius

Radius faciei anterioris $= \frac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) + \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$

Radius faciei poſterioris $= \frac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) - \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$.

Pro media autem lente cryſtallina iam ſupra vidimus, radium vtriusque faciei eſſe debere $= 1,16\,q$ denique meminiſſe oportet, eſſe

$p = \frac{\Pi}{f}$; $q = \frac{\Pi}{g}$ et $r = \frac{\Pi}{h}$.

§. 16. His de forma lentium praenotatis, in Dioptrica demonſtratum eſt, confuſionem inde natam proportionalem eſſe ſequenti formulae

$$\lambda - \frac{\mu'}{\mu P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3 PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)$$

quae ſi ponamus breuitatis gratia

$\frac{\mu'}{\mu P} = M$ et $\frac{1}{B^3 PQ} = N$ induet hanc formam

$$\lambda - \frac{M\lambda'}{\mathfrak{B}^3} - \frac{M\nu'}{B\mathfrak{B}} + \frac{N\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{N\nu}{C\mathfrak{C}}.$$

§. 17. Quod ſi ergo ex ſequentibus lentibus oriatur confuſio ſimili modo determinanda $= O$, vt vniuerſa confuſio tollatur, fieri oportet

$$\lambda - \frac{M\lambda'}{\mathfrak{B}^3} - \frac{M\nu'}{B\mathfrak{B}} + \frac{N\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{N\nu}{C\mathfrak{C}} + O = 0$$

§. 18. Statim ergo ac pro ϑ numerus determinatus et intra praeſcriptos limites 1 et 3 contentus accipiatur, totus calculus reſiduus nulla laborabit difficultate: inde enim primo colligantur valores litterarum F, G et H, hincque litterarum f, g et h, vnde innoteſcunt diſtantiae focales p, q et r, tum

 vero

vero eliciantur valores litterarum P, PQ, B, $\mathfrak{B}$, C et $\mathfrak{C}$, hincque porro litterae M et N; Quod autem ad numerum ϑ attinet, conueniet pro eo aliquot hypotheſes accipi, vt intelligamus, vnde diſtantia focalis q maximum obtineat valorem, quippe qui pro data diſtantia focali Π ipſius lentis triplicatae maximam admittet aperturam, id quod omnis generis teleſcopiis maximum inducet perfectionis gradum.

Hypotheſis prima

$g = -2f$ ſeu $\vartheta = 2$.

§ 19. Incipiamus ab hypotheſi $\vartheta = 2$, qua diſtantiae focales extremae, fere aeque ſuperabunt mediam q, eritque

$F = \frac{264}{287}$	$lF = 9,9637220$	
$G = \frac{23}{24}$	$lG = 9,9815166$	$lGG = 9,9630332$
$H = \frac{287}{288}$	$lH = 9,9984894$	$lHH = 9,9969788$

vnde porro fit

$f = 1,85415$	$lf = 0,2681455$
$g = -3,70830$	$lg = (-)0,5691755$
$h = 2,70556$	$lh = 0,4322572$

$p = 0,53933\,\Pi$	$lp = 9,7318545$
$q = -0,26966\,\Pi$	$lq = (-)9,4308245$
$r = 0,36961\,\Pi$	$lr = 9,5677428$

praeterea vero habebimus

$P = \frac{24}{23}$	$lP = 0,0184834$	
$PQ = \frac{288}{287}$	$lPQ = 0,0015106$	
$B = \frac{12}{11}$	$lB = 0,0377885$	$lB^3 = 0,1133655$
$\mathfrak{B} = \frac{12}{23}$	$l\mathfrak{B} = 9,7174534$	$l\mathfrak{B}^3 = 9,1523602$
$C = 1,7055$	$lC = 0,2318675$	$lC^3 = 0,6956025$
$\mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}$	$l\mathfrak{C} = 9,7996103$	$l\mathfrak{C}^3 = 9,3988309$

Porro

Porro vero

$$l\,B\,\mathfrak{B} = 9,7552419 \text{ et } l\,C\,\mathfrak{C} = 0,0314778$$

tandem igitur

$$l\,M = 9,9275952 \text{ et } l\,N = 9,8851239.$$

§. 20. Cum nunc ſit $\mathfrak{B} = \frac{12}{23}$ erit $\mathfrak{B} - \frac{1}{2} = \frac{1}{46}$ vnde colligitur

$$l\sqrt{\lambda' - 1} = 8,5527796, \text{ hinc } l(\lambda' - 1) = 7,1055592$$

vnde fit

$$\lambda' = 1,00127$$

at bini reliqui numeri λ et λ'' maneant indeterminati, hinc igitur calculus pro confuſione ſequenti modo inſtituatur

I.		II.		III.	
$l\,M =$	9,9276952	$l\,M =$	9,9276952	$l\,N =$	9,8851239
$l\,\lambda =$	0,0005510	$l\,\nu' =$	9,4029488	$l\,\mathfrak{C}^5 =$	9,3988309
	9,9282462		9,3306440		0,4862930
$l\,\mathfrak{B}^3 =$	9,1523602	$l\,B\,\mathfrak{B} =$	9,7552419		
l. p. I.	0,7758860	l. part. II $=$	9,5754021		
5,9688 $=$ part. I.		pars II $=$ 0,3761		pars III $= 3,0640\lambda''$	

IV.

$$l\,N = 9,8851239$$
$$l\,\nu = 9,3412366$$
$$9,2263605$$
$$l\,C\,\mathfrak{C} = 0,0314778$$
$$9,1948827$$

p. IV $=$ 0,1566

hinc igitur $I + II + IV = -6,1883$, quare confuſio ex lente triplicata nata erit

$$\lambda + 3,0640\,\lambda'' - 6,1883,$$

ergo ſi confuſio ex reliquis lentibus nata fuerit $= O$ omnis confuſio tolletur faciendo

$$\lambda + 3,0640\,\lambda'' = 6,1883 - O.$$

§. 21. Quia diſtantia focalis tertiae lentis r non multum ſuperat q, imprimis cauendum eſt, ne vllus radius curuaturae huius lentis minor euadat quam ſecundae lentis qui eſt $1,16\,q = -0,3127$. Quia igitur eſt

$$\mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 0,9037 \text{ erit}$$

$$\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 0,7565 \text{ et } \varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 1,1303$$

hincque pro lente tertia erit

radius faciei anterioris $= \dfrac{r}{0,7565 + \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$

et radius faciei poſterioris $= \dfrac{r}{1,1303 - \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$.

Hic igitur adeo ſtatui poterit $\lambda'' = 1$, vnde pro lente tertia prodibit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,4886\,\Pi \\ \text{poſterioris} = 0,3270\,\Pi. \end{cases}$

Tum autem pro confuſione tollenda capi debebit

$$\lambda = 3,1243 - O$$

vnde pro conſtructione primae lentis erit,

Radius faciei anterioris $= \dfrac{0,5393\,\Pi}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \dfrac{0,5879\,\Pi}{1,7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$

Radius faciei poſterioris $= \dfrac{0,5393\,\Pi}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \dfrac{0,5829\,\Pi}{0,2449 + \sqrt{\lambda - 1}}$.

Hinc igitur ſi confuſio deſtruenda eſſet nnlla, ſeu $O = 0$ foret

$\lambda = 3,$

$\lambda = 3,1243$, ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 1,4575$.

Quare tum fieri deberet

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 1,7302\, \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,3432\, \Pi \end{cases}$

ſin autem confuſio tollenda O fuerit maxima $= 2,1243$ ideoque $\lambda = 1$, in prima lente erit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,3248\, \Pi \\ \text{poſterioris} = 2,3746\, \Pi \end{cases}$

ſicque tales lentes triplicatae ad omnes confuſiones tollendas a minima ſcilicet $O = 0$, vtque maximam $O = 2,1243$ erunt accommodatae.

§. 22. Cum autem tanta confuſio tollenda nunquam occurrat, in gratiam praxeos ſtatuamus lentem tertiam vtrinque aequaliter conuexam, ita vt habeamus

$$0,7565 + \tau \sqrt{\lambda' - 1} = 1,1303 - \tau \sqrt{\lambda'' - 1} \text{ hincque}$$
$$\tau \sqrt{\lambda'' - 1} = 0,1869,$$

vnde concluditur $\lambda'' = 1,0408$, vnde fit

$$3,0640\, \lambda'' = 3,1890,$$

conſequenter

$$\lambda = 2,9993 - O.$$

Hoc autem caſu pro tertia lente fiet

Radius vtriusque faciei $= \frac{r}{0,9474} = 0,3917\, \Pi$

exiſtente lentis mediae

radio vtriusque faciei $= -0,3127\, \Pi$;

Conſtructio autem lentis primae ex formulis paragr. precedentis eſt petenda, ſtatim atque valor ipſius λ fuerit

fuerit cognitus; maxima autem confuſio quae per tales lentes deſtrui poterit erit $O = 1,9993$. Interualla autem inter binas lentes in hac hypotheſi vbique ſunt $\frac{1}{12} q = 0,0225\ \Pi$.

Hypotheſis ſecunda

$\vartheta = \frac{3}{2}$ ſiue $g = -\frac{2}{3} f$

§. 23. In hac ergo hypotheſi habebimus ſequentes valores, primo:

$F = \frac{90}{209}$	$lF = 9,6340962$	
$G = \frac{17}{18}$	$lG = 9,9751764$	$lGG = 9,9503528$
$H = \frac{209}{216}$	$lH = 9,9856925$	$lHH = 9,9713850$

vnde porro

$f = 2,4592$	$lf = 0,3908021$
$g = -3,6888$	$lg = (-)0,5668851$
$h = 2,0590$	$lh = 0,3136563$
$p = 0,4066\ \Pi$	$lp = 9,6091979$
$q = -0,2711\ \Pi$	$lq = (-)9,4331149$
$r = 0,4857\ \Pi$	$lr = 9,6863437$

Ex his valoribus porro conſequimur,

$P = \frac{18}{17}$	$lP = 0,0248236$	
$PQ = \frac{216}{209}$	$lPQ = 0,0143075$	
$B = \frac{12}{5}$	$lB = 0,3802112$	$lB^3 = 1,1406336$
$\mathfrak{B} = \frac{12}{17}$	$l\mathfrak{B} = 9,8487323$	$l\mathfrak{B}^3 = 9,5461969$
	$lB\mathfrak{B} = 0,2289435$	
$C = h - 1$	$lC = 0,0248983$	$lC^3 = 0,0746949$
$\mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}$	$l\mathfrak{C} = 9,7112420$	$l\mathfrak{C}^3 = 9,1337260.$
	$lC\mathfrak{C} = 9,7361403$	

Tandem

Tandem vero

$lM = 9,9213550$ et $lN = 8,8450589$.

§. 24. Cum nunc ſit $\mathfrak{B} = \frac{12}{17}$ erit $\mathfrak{B} - \frac{1}{2} = \frac{7}{34}$, vnde colligitur

$l\sqrt{\lambda' - 1} = 9,5291565$, hinc $l(\lambda' - 1) = 9,0583130$ et $\lambda' = 1,11437$, bini reliqui numeri λ et λ'' maneant indeterminati; hinc igitur calculus pro confuſione ſequenti modo inſtituatur

I.	II.	III.
$lM = 9,9213550$	$lM = 9,9213550$	$lN = 8,8450589$
$l\lambda' = 0,0460294$	$l\nu' = 9,4029488$	$l\mathfrak{C}^3 = 9,1337260$
$9,9673844$	$9,3243038$	$9,7113329$
$l\mathfrak{B}^3 = 9,5461969$	$lB\mathfrak{B} = 9,2289435$	
l. p. I $= 0,4211875$	l. p. II $= 9,0953603$	
Pars I $= 2,6375$	pars II $= 0,1245$	pars III $= 0,5144\lambda''$

IV.

$lN = 8,8450589$

$l\nu = 9,3412366$

$8,1862955$

$l\mathfrak{C}C = 9,7361403$

$8,4501552$

pars IV $= 0,0282$

hinc igitur

$I + II + IV = -2,7338$,

quare confuſio ex lente triplicata nata erit

$\lambda + 0,5144\lambda'' - 2,7338$,

ſi ergo confuſio ex reliquis lentibus nata eſſet $= O$ omnis confuſio tolleretur, faciendo

$$\lambda + 0,5144\,\lambda'' = 2,7338 - O.$$

§. 25. Quia hic coefficiens ipſius λ'' multo minor eſt quam caſu precedente, parum refert, vtrum numerus λ'' aliquanto maior minorue accipiatur, praecipue, cum vnitatem non multum ſuperare debeat, quare in commodum praxis ſtatuamus tertiam lentem vtrinque aeque conuexam, vt ſit radius vtriusque faciei

$$= 1,06\,r = 0,5145\,\Pi;$$

tum vero debet eſſe

$$\sqrt{\lambda'' - 1} = \left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)\left(\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\right).$$

Quia igitur

$$\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2} = 0,0143 \quad \text{et} \quad l\frac{\sigma - \varrho}{\tau} = 0,1901924 \text{ erit}$$

$$l\sqrt{\lambda'' - 1} = 8,3455284 \quad \text{et} \quad l(\lambda'' - 1) = 6,6910568$$

hincque $\lambda'' = 1,0005$ ideoque $0,5144\lambda'' = 0,5147$, vnde pro omni confuſioni tollenda erit

$$\lambda = 2,2191 - O.$$

Pro lente ſecunda autem radius vtriusque faciei

$$= 1,16\,q = 0,3144\,\Pi,$$

ſimulque interualla inter binas lentes $= 0,0226\,\Pi$.

§. 26. Supereſt igitur ſola lens prima, pro qua eſſe debet $\lambda = 2,2191 - O$, tum vero erit radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}}$, poſterioris vero

ro $= \frac{p}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}}$; vbi notandum, ſi ſumeretur $\lambda = 1$, priorem radium minorem eſſe proditurum quam ſecundae lentis, quare cum ſit $p = -\frac{3}{2}q$, quaeramus λ, vt hi radii aequentur, debet eſſe

$$\frac{3}{2,32} = \sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1} = 1,2931 \text{ hincque } \tau\sqrt{\lambda - 1} = 0,3671$$

atque hinc patet, numerum λ minorem capi non poſſe quam 1, 1574 ſicque maxima confuſio quam hoc caſu tollere licebit erit $O = 1,0617$ quae pro omnis generis teleſcopiis abunde ſufficit. Haec igitur hypotheſis precedenti longe anteferenda videtur, propterea quod diſtantia focalis lentis mediae aliquanto maior eſt inuenta quam ante, ex quo operae pretium erit inquirere, an numerum ϑ vlterius diminuendo, lucrum adhuc magis increſcat, vnde ſequentem hypotheſin euoluamus.

Hypotheſis tertia

$$\vartheta = \tfrac{4}{3} \text{ ſiue } g = -\tfrac{4}{3}f.$$

§. 27. Primo igitur hinc quaeramus litteras F, G et H ſequentem in modum

$F = \frac{16}{61}$	$lF = 9,4187902$	
$G = \frac{15}{16}$	$lG = 9,9719713$	$lGG = 9,9439426$
$H = \frac{61}{64}$	$lH = 9,9791498$	$lHH = 9,9582996$

vnde porro colliguntur

$f = 2,8013$	$lf = 0,4473527$
$g = -3,7350$	$lg = (-)0,5722906$
$p = 0,3570\,\Pi$	$lp = 9,5526473$
$q = -0,2678\,\Pi$	$lq = (-)9,4277094.$

 Quia

Quia igitur q iam minor eſt quam caſu precedente, hanc hypotheſin vlterius non proſequimur, ſed potius videamus, an valorem ipſius ϑ aliquantillum augendo vltra $\frac{3}{2}$, maius lucrum conſequamur.

Hypotheſis quarta

$$\vartheta = \tfrac{5}{3} \quad \text{ſiue} \quad g = -\tfrac{5}{3}f.$$

§. 28. Statim igitur quaeramus valores ſequentes

$F = \frac{28}{47}$	$lF = 9,7750601$	
$G = \frac{19}{20}$	$lG = 9,6777236$	$lGG = 9,9554472$
$H = \frac{47}{48}$	$lH = 9,9908567$	$lHH = 9,9817134$

vnde porro colligitur

$f = 2,2076$	$lf = 0,3439236$
$g = -3,6793$	$lg = (-)0,5657652$
$h = 2,3152$	$lh = 0,3645885$
$p = 0,4529\,\Pi$	$lp = 9,6560764$
$q = -0,2718\,\Pi$	$lq = (-)9,4342345$
$r = 0,4319\,\Pi$	$lr = 9,6354115.$

Quoniam hic valor ipſius q maior prodiit quam ante: intelligimus, hunc propemodum caſum eſſe omnium maximum, ac ſi valores in precedentibus caſibus erutos inter ſe comparamus, haud difficulter inde concludere licet, ipſum maximum valorem hypotheſi $\frac{59}{38}$ reſpondere, quem ergo euoluere operae pretium erit.

Hypo-

Hypotheſis quinta

$$\vartheta = \tfrac{59}{36} \text{ ſiue } g = -\tfrac{59}{36} f.$$

§. 29. Cum igitur ſit $12\vartheta = \frac{59}{3}$ reperiemus

$F = \frac{295}{519}$	$lF = 9,7546546$	
$G = \frac{56}{59}$	$lG = 9,9773360$	$lGG = 9,9546720$
$H = \frac{173}{177}$	$lH = 9,9900728$	$lHH = 9,9801456$

ex quibus conſequimur,

$f = 2,24457$	$lf = 0,3511328$
$g = -3,67860$	$lg = (-)\, 0,5656823$
$h = 2,27581$	$lh = 0,3561360$

$p = 0,44550\,\Pi$	$lp = 9,6488672$
$q = -0,27184\,\Pi$	$lq = (-)\, 9,4343177$
$r = 0,44042\,\Pi$	$lr = 9,6438640.$

Praeterea vero $lP = 0,0226640$ et $lPQ = 0,0099272$

$B = \frac{9}{5}$	$lB = 0,2552725$	$lB^3 = 0,7658175$
$\mathfrak{B} = \frac{9}{14}$	$l\mathfrak{B} = 9,8681145$	$l\mathfrak{B}^3 = 9,4243435$
	$lB\mathfrak{B} = 0,0633870$	
$C = h - 1$	$lC = 0,1057874$	$lC^3 = 0,3173622$
$\mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}$	$l\mathfrak{C} = 0,7496514$	$l\mathfrak{C}^3 = 9,2489542$
ſeu $\mathfrak{C} = 0,56189$	$lC\mathfrak{C} = 9,8554388$	

Tandem igitur Log. $M = 9,9235146$ et $lN = 9,2242553.$

§. 30. Iam quia ſecunda lens ſumitur aeque concaua vtrinque, erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{(\sigma' - \varrho')}{\tau'} (\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}),$$

tum vero ob rationes ſupra allegatas, faciamus etiam tertiam lentem aeque conuexam vtrinque, et ob

$$\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{7} \text{ et } \mathfrak{C} - \tfrac{1}{2} = 0,06189$$

 calcu-

calculus ita ſe habebit

à $l\frac{\sigma'-\varrho'}{\tau'} = 0,2155374$	$l\frac{\sigma-\varrho}{\tau} = 0,1901924$ add.
ſubtr. $l\,7 = 0,8450980$	$l(\mathfrak{C}-\frac{1}{2}) = 8,7916205$
$l\sqrt{\lambda'-1} = 9,3704394$	$l\sqrt{\lambda''-1} = 8,9818129$
$l(\lambda'-1) = 8,7408788$	$l(\lambda''-1) = 7,9636258$
ideoque $\lambda' = 1,05506$	ideoque $\lambda'' = 1,00919$

vnde calculus pro confuſione ita inſtituetur,

Pro parte priore	*Pro parte ſecunda*
$l\,M = 9,9235146$	$l\,M = 9,9235146$
$l\,\lambda' = 0,0232792$	$l\,\nu' = 9,4029488$
$9,9467938$	$9,3264634$
$l\,\mathfrak{B}^3 = 9,4243435$	$l\,B\mathfrak{B} = 0,0633870$
l. p. I $= 0,5224503$	l. p. II $= 9,2630764$
ideoque pars I $= -3,33005$	pars II $= -0,18326$
pars II $= -0,18326$	
$-3,51331$	

Pro parte tertia	*Pro quarta parte*
$l\,N = 9,2242553$	$l\,N = 9,2242553$
$l\,\lambda'' = 0,0039731$	$l\,\nu = 9,3412366$
$9,2282284$	$8,5654919$
$l\,\mathfrak{C}^3 = 9,2489542$	$l\,C\mathfrak{C} = 9,8554388$
l. part. III $= 9,9792742$	l. p. IV $= 8,7100531$
pars III $= 0,95340$	pars IV $= 0,051293$
pars IV $= 0,05129$	
$+1,00469$	

Ergo

Ergo confuſio lentis triplicatae $\lambda - 2,50862$; vnde ſi confuſio ex reliquis lentibus nata, fuerit $= O$, capi debebit $\lambda = 2,50862 - O$, ſicque intelligitur, ſumto $\lambda = 1$ confuſionem tolli poſſe $O = 1,50682$.

§. 31. Definito autem numero λ, pro lente prima debet eſſe radius faciei

Anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0,48154\,\Pi}{1,7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$

Poſterioris $= \frac{p}{\varrho - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0,48154\,\Pi}{0,2449 + \sqrt{\lambda - 1}}$.

Pro lente ſecunda autem, iam vidimus eſſe,

Radium vtriusque faciei $= -0,31532\,\Pi$.

At pro lente tertia,

Radium vtriusque faciei $= 0,46684\,\Pi$.

Interualla autem inter binas lentes debent eſſe

$= 0,02265\,\Pi$

vnde ſi haec lens aperturam admittat, cuius ſemidiameter $= 0,0788\,\Pi$, tum applicari poterit, ad multiplicationem m producendam, ſumendo $\Pi = \frac{m}{4}$.

DESCRIPTIO

lentis obiectiuae triplicatae, perfectiſſimae, quae etiam confuſionem, a reliquis lentibus natam deſtruere valeat.

Ex hypotheſi quinta $\vartheta = \frac{59}{36}$ petita.

§. 32. Componitur igitur haec lens obiectiua ex tribus lentibus, quarum prima et tertia, quae ambae

ambae ſunt conuexae, ex vitro coronario ſunt parandae, media vero concaua ex vitro cryſtallino: tum ante omnia definiatur per formulas ſupra datas confuſio, ex lentibus reliquis oriunda, quae ſit $=O$ capiaturque numerus $\lambda = 2,50862 - O$, et lentis primae (cuius diſtantia focalis debet eſſe $= 0,44550\, \Pi$ vbi Π denotat diſtantiam focalem totius lentis triplicatae) conſtructio ita inſtituatur, vt ſit.

Radius faciei anterioris $= \frac{0,40154\, \Pi}{1,7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \frac{0,48134\, \Pi}{0,2445 + \sqrt{\lambda - 1}}$.

A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae ſtatuatur diſtantia $= 0,02265\, \Pi$, tum lentis ſecundae cryſtallinae vtrinque aequaliter concauae cuius diſtantia focalis eſt $= -0,27184\, \Pi$ ſtatuatur

Radius vtriusque faciei $= -0,31532\, \Pi$,

ab huius lentis medio vsque ad medium lentis tertiae diſtantia etiam ſtatuatur $= 0,02265\, \Pi$. Denique lentis tertiae diſtantia focalis $= 0,44042\, \Pi$ quae etiam vtrinque aequaliter conuexa fiat ſumendo

Radium vtriusque faciei $= 0,46684\, \Pi$.

Quod ſi iam apertura definiri queat ex parte quarta minimi radii curuaturae, haec lens obiectiua aperturam admittet cuius ſemidiameter ſit $= 0,07883\, \Pi$, ſicque adhiberi poterit ad multiplicationem $= m$ producendam, ſi capiatur $\Pi = \frac{m}{4}$ dig.

§. 33. Quod ſi ergo nulla confuſio fuerit tollenda, ita vt ipſa haec lens obiectiua iam puriſſimam imaginem repreſentet, ſumi debebit

$\lambda = 2$,

$\lambda = 2,50862$ vnde fit $\sqrt{\lambda - 1} = 1,22826$ vnde pro lente prima colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,85045\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,32689\ \Pi. \end{cases}$

Eodem modo aliquot caſus pro confuſionibus minoribus tollendis, cuiusmodi ſaepiſſime occurrunt, euoluamus.

I°. Si confuſio tollenda $O = 0,10$.

Erit ergo $\lambda = 2,40862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,1868$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,79253\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,33634\ \Pi. \end{cases}$

II°. Si confuſio tollenda $O = 0,20$.

Erit ergo $\lambda = 2,30862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,1439$ vnde fit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,74026\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,34673\ \Pi. \end{cases}$

III°. Si confuſio tollenda $O = 0,30$.

Erit $\lambda = 2,20862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,0993$ vnde habebimus

Radium faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,69276\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,35823\ \Pi. \end{cases}$

IV°. Si confuſio tollenda $O = 0,40$.

Erit $\lambda = 2,10862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,0528$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,64933\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,37193\ \Pi. \end{cases}$

V°. Si confuſio tollenda ſit $O = 0,50$.

Erit $\lambda = 2,00862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,0043$ hincque

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,60947\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,38548\ \Pi. \end{cases}$

§. 34. Si quis forte ſuſpicetur, diſcrimen in prima lente pro variis confuſionibus tollendis nimis eſſe paruum, quam vt accurate in praxi exſequi liceat, ei fortaſſe hypotheſis ſecunda ſupra euoluta magis arridebit, quoniam valor ipſius $\lambda = 2,2191 - O$ notabiliter minor eſt quam noſtro caſu; quanquam enim pro hac hypotheſi diſtantia focalis q aliquanto minor eſt inuenta, tamen differentia tam eſt exigua, vt in apertura vix vllum decrementum inde naſcatur; quamobrem etiam lentes obiectiuas, ex hac hypotheſi deductas, hic ſubiungamus.

DESCRIPTIO

alius lentis obiectiuae triplicatae ex hypotheſi ſecunda $\vartheta = \frac{3}{4}$ petita.

§. 35. Lens haec obiectiua componitur ex tribus lentibus, quarum prima et tertia, conuexae, ex vitro coronario, media vero concaua, ex vitro cryſtallino ſunt parandae. Ante omnia igitur confuſio ex lentibus reliquis oriunda, per formulas ſupra datas definiri debet, quae ſit $= O$, capiaturque numerus $\lambda = 2,21913\ \Pi - O$ et primae lentis, diſtantiam focalem $= 0,40663\ \Pi$ habentis (vbi Π denotat,

tat diſtantiam focalem totius lentis triplicatae) ita inſtituatur conſtructio, vt ſit

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{1,79142 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Radius faciei poſterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{0,24492 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

Inter medium huius lentis atque medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,02260\,\Pi$, tum, lentis ſecundae cryſtallinae vtrinque aequaliter concauae cuius diſtantia focalis $= -0,27109\,\Pi$, ſtatuatur radius vtriusque faciei $= -0,31446\,\Pi$, diſtantia autem a medio huius lentis vsque ad medium tertiae etiam ſtatuatur $= 0,02260\,\Pi$.

Denique lentis tertiae diſtantia focalis

$$= 0,48567\,\Pi$$

quae etiam vtrinque aequaliter conuexa fiat, ſumendo

$$\text{Radium vtriusque faciei} = 0,51483\,\Pi$$

Quod ſi iam apertura definiri queat ex parte quarta minimi radii curuaturae, haec lens obiectiua aperturam admittet, cuius ſemidiameter ſit $0,07861\,\Pi$, ſicque adhiberi poterit ad multiplicationem $= m$ producendam, ſi capiatur $\Pi = \frac{m}{4}$ dig.

§. 36. Quodſi ergo tollenda confuſio fuerit nulla, ita, vt haec ipſa lens obiectiua iam puriſſimam imaginem repraeſentet, ſumi debebit

$\lambda = 2,21913$ vnde ſit $\sqrt{\lambda - 1} = 1,10414$ fietque

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0.63817\,\Pi \\ \text{poſterioris} = 0,32578\,\Pi. \end{cases}$$

Eodem modo pro minoribus tollendis confuſionibus aliquot caſus, cuius modi ſaepiſſime occurrunt euolvamus.

I°. Si confuſio tollenda fuerit $O = 0,10$.

Erit $\lambda = 2,11913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 1,05789$ vnde conſequimur

Radium faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,59672\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,33735\ \Pi. \end{cases}$

II°. Si confuſio tollenda fuerit $O = 0,20$.

Erit $\lambda = 2,01913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 1,00951$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,55994\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,35036\ \Pi. \end{cases}$

III°. Si confuſio tollenda fuerit $O = 0,30$.

Erit $\lambda = 1,91913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,95871$ vnde fit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,52590\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,36514\ \Pi. \end{cases}$

IV°. Si confuſio tollenda fuerit $O = 0,40$.

Erit $\lambda = 1,81913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,90505$ vnde oritur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,49417\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,38218\ \Pi. \end{cases}$

V°. Sit confuſio tollenda $O = 0,50$.

Et erit $\lambda = 1,71913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,84801$ hincque

Radius

Radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} = 0,46438\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,40213\ \Pi.\end{cases}$

VI°. Sit denique confuſio tollenda $O = 0,60$.

Eritque $\lambda = 1,61913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,78684$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} = 0,43619\ \Pi \\ \text{poſterioris} = 0,42597\ \Pi.\end{cases}$

APPENDIX
de lentibus obiectiuis duplicatis.

§. 1. Poſita ipſius lentis duplicatae diſtantia focali $= \Pi$, ſint diſtantiae focales, primae lentis $= p$ et ſecundae $= q$, ſiatque vt ante $p = \frac{\Pi}{f}$ et $q = \frac{\Pi}{g}$, tum vero interuallum inter has duas lentes ſtatuatur $= \frac{\Pi}{k}$. Vtra autem harum lentium ſit ex vitro vel coronario vel cryſtallino paranda, hic in limine nondum definimus, ſed ſufficiat notaſſe, lentem coronariam ſemper fore conuexam, eiusque diſtantiam focalem minorem quam alterius lentis cryſtallinae, quae ſemper erit concaua; hinc, vt lens duplicata maximam admittat aperturam, conueniet lentem coronariam vtrinque fieri aeque conuexam, vt eius curuaturae radii pars quarta praebeat ſemidiametrum aperturae; tum vero vtique erit cauendum, ne alterius lentis cryſtallinae alteruter radius curuaturae minor prodeat.

§. 2. Sint iam harum lentium diſtantiae determinatrices, pro prima a et α, pro ſecunda autem b et β, eritque ſtatim $a = \infty$ et $\mathfrak{b} = \Pi$, tum vero habebitur

$$\alpha = p = \frac{\Pi}{f}, \text{ et } \frac{1}{b} + \frac{1}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{q} = \frac{g}{\Pi} \text{ vnde ob}$$

$$\mathfrak{b} = \Pi \text{ fiet } \frac{1}{b} = \frac{g-1}{\Pi} \text{ ideoque } b = \frac{\Pi}{g-1}.$$

Cum igitur eſſe debeat diſtantia lentium $\alpha + b = \frac{\Pi}{k}$ habebitur iſta aequatio

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g-1} = \frac{1}{k} \text{ ideoque } g - 1 = \frac{fk}{f-k}$$

ex his autem valoribus deducantur ſequentes

$$P = -\frac{\alpha}{b} = \frac{1-g}{f} = \frac{k}{k-f} \text{ et } B = \frac{\mathfrak{b}}{b} = g - 1 = \frac{fk}{f-k}$$

hincque

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} = \frac{g-1}{g} \text{ ſicque erit } \mathfrak{B}\, b = \frac{\Pi}{g} = q.$$

§. 3. Quod ſi nunc $\zeta : \eta$ exprimat rationem diſperſionis primae lentis, quae ergo, vt ſupra oſtendimus erit vel 3 : 4 vel 4 : 3, deſtructio confuſionis, a diuerſa radiorum refractione oriunda poſtulat hanc aequationem

$$\zeta p + \frac{\eta q}{\mathfrak{B}^2} = q \text{ ſiue } \frac{\zeta}{f} + \frac{\eta}{\mathfrak{B}\, q} = 0$$

quia vero eſt

$$\mathfrak{B} = \frac{g-1}{g} = \frac{fk}{g(f-k)} = -\frac{f}{g}\left(\frac{k}{k-f}\right)$$

haec aequatio induet hanc formam

$$\zeta f + \eta g \left(\frac{k-f}{k}\right)^2 = 0,$$

quod ſi iam k per f determinatur, eiusque multiplo cuipiam aequetur, vt ſit $k = if$, erit haec aequatio

$$\zeta f + \eta g \left(\frac{i-1}{i}\right)^2 = 0$$

pre-

precedens vero aequatio dat

$$g - 1 = \frac{if}{1 - i} \text{ ita vt ſit } f = \frac{(g-1)(1-i)}{i}$$

quo valore in altera aequatione ſubſtituto erit

$$\frac{\zeta(1-i)(g-1)}{i} + \eta g\left(\frac{i-1}{i}\right)^2 = 0 \text{ ſiue}$$

$$\zeta i(g-1) + \eta g(1-i) = 0$$

vnde colligitur fore

$$g = \frac{\zeta i}{\zeta i - \eta i + \eta} \text{ conſequenter } f = \frac{-\eta(i-1)^2}{i(\zeta i - \eta i + \eta)}$$

quocirca duos caſus euolui oportet, prouti prima lens fuerit vel coronaria vel cryſtallina.

CASVS PRIMVS

quo prima lens ex vitro coronario, ſecunda vero ex vitro cryſtallino parantur.

§. 4. Hic igitur erit $\zeta = 3$ et $\eta = 4$, vnde valores inuenti prodibunt

$$f = \frac{4(i-1)^2}{i(i-4)} \text{ et } g = \frac{-3i}{i+4}$$

cum iam prima lens ſit coronaria et conuexa, ex ea interuallum lentium ita definiatur, vt ſit $k = 12f$ ideoque $i = 12$, conſequenter omnia iam perfecte ſunt determinata, ſcilicet

$f = \frac{121}{24}$	$p = \frac{24}{121}\Pi$	$P = \frac{78}{121}$
$g = -\frac{9}{4}$	$q = -\frac{4}{9}\Pi$	$B = -\frac{15}{4}$
		$\mathfrak{B} = \frac{13}{9}$

et diſtantia inter binas lentes erit $= \frac{1}{12}p = \frac{2}{121}\Pi$.

§. 5. Conſideremus nunc confuſionem ab apertura

tura lentium natam, quae ex hac formula debet definiri

$$\lambda - \frac{\mu'}{p\mu}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)$$

vbi pro prima lente vſurpari debent numeri ſupra indicati μ, ν, ϱ, σ, τ, pro ſecunda autem lente iſti μ', ν', ϱ', σ', τ'; iam quia prima lens debet vtrinque eſſe aeque conuexa, radius vtriusque faciei erit $= 1,06\,p$ numerus autem arbitrarius λ ita determinari debet vt ſit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \varrho}{\tau}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

vnde colligitur

$$\lambda = 1,60024,$$

pro altero membro ſupputando eſt

$$l\,\frac{1}{p} = 0,1906908 \text{ hincque } l\,\frac{\mu'}{\mu p} = 0,1368694$$

porro

$$lB = (-)\,0,5118834 \text{ et } l\mathfrak{B} = 0,1597008 \text{ ergo}$$

$$lB\mathfrak{B} = (-)\,0,6715842$$

vnde calculus ita ſe habebit

$l\,\frac{\mu'}{\mu p}$	$= 0,1368694$	$l\,\frac{\mu'}{p\mu}$	$= 0,1368694$
$l\,\mathfrak{B}^3$	$= 0,4791024$	add. $l\,\nu$	$= 9,3412366$
l primae p.	$= 9,8897670$		$9,4781060$
		ſubtr. $lB\mathfrak{B}$	$= 0,6715842\,(-)$
		l. part. ſec.	$= 8,8065218\,(-)$
pars prima	$= -0,77583\,\lambda'$	pars ſecunda	$= +0,06405.$

Hinc igitur confuſio ex lente duplicata nata erit

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda'$$

vnde

vnde ſi confuſio ex reliquis lentibus nata fuerit $= O$ debet eſſe

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda' - O = 0$$

ex qua colligitur

$$\lambda' = 2,14520 + 1,28894\,O.$$

§. 6. Inuento autem hoc numero λ' conſtructio ſecundae lentis ita eſt dirigenda, vt fiat

Radius faciei anterioris $= \frac{q}{\sigma' - \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') + \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \frac{q}{\varrho' + \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') - \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$

vbi erit

$\mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') = 2,08202$ hinc $\sigma' - \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') = -0,4993$ et
$\varrho' + \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') = 2,2233$

quocirca habebimus

Radium faciei anterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{-0,4493 + \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$

Radium faciei poſterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{2,2233 - \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$

vbi eſt $l\lambda' = 0,2041851$, praeterea vero erit in partibus decimalibus

$p = 0,19835\,\Pi$	$lp = 9,2974322$
$q = -0,44444\,\Pi$	$lq = (-)\,9,6478131$

hinc pro prima lente, radius vtriusque faciei

$$= 0,21022\,\Pi$$

vnde cauendum eſt, ne poſterioris lentis vllus radius fiat minor, interuallum autem inter binas lentes erit

$$= \tfrac{1}{12}\,p = 0,01653\,\Pi.$$

§ 7. Nunc igitur videamus, qualem formam ſecunda lens ſit habitura, ſi confuſio deſtruenda O fuerit nulla, tum autem erit

$\lambda' = 2,14520$ vnde fit $\tau' \surd \lambda' - 1 = 0,93905$

ex quo pro ſecunda lente obtinebitur

Radius faciei anterioris $= \frac{-0,4144\,\Pi}{0,4597} = -0,90758\,\Pi$

Radius faciei poſterioris $= \frac{-0,4144\,\Pi}{1,2043} = -0,34606\,\Pi$

vnde manifeſtum eſt, neutrum huius lentis Radium vnquam prodìturum fore nimis paruum; quo maior enim fuerit confuſio deſtruenda O, eo maior fiet numerus λ', ideoque ambo radii adhuc propius ad aequalitatem conuergent.

Caeterum, quia haec lens aperturam admittit ſemidiametri $= 0,05256\,\Pi$, pro multiplicatione $= m$ producendam ſtatui debet $0,05256\,\Pi = \frac{m}{50}$, vnde ſequitur $\Pi = \frac{m}{2,628}$ dig. ſiue proxime $\Pi = \frac{3}{8} m$ digitor: ita, vt multiplicatio centupla requiret diſtantiam focalem $= 37\frac{1}{2}$ dig.

DESCRIPTIO

Lentis obiectiuae duplicatae, cuius prior lens ex vitro coronario, poſterior vero, ex cryſtallino eſt paranda.

§. 8. Quod ſi ipſius lentis duplicatae diſtantia focalis eſſe debeat $= \Pi$, prioris lentis diſtantia focalis capienda erit $= 0,19835\,\Pi$, et quia vtrinque

que aequae conuexa eſt formanda, vtriusque faciei radius capiatur $= 0,21023\,\Pi$; a medio huius lentis, vsque ad medium poſterioris ſtatuatur interuallum $= 0,01653\,\Pi$; poſterior autem lens, ex vitro cryſtallino conſtans et concaua, habeat diſtantiam focalem $= -0,4444\,\Pi$, tum ſi confuſio a reliquis lentibus oriunda fuerit $= O$ capiatur numerus

$$\lambda' = 2,14520 + 1,28894\,O$$

hincque computetur valor formulae

$$\tau' \sqrt{\lambda' - 1} = 0,8775 \sqrt{\lambda' - 1}$$

quo facto ſtatuatur

Radius faciei anterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{-0,4493 + \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{2,2233 - \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$.

Tum vero, ſi huic lenti duplicatae apertura detur, cuius ſemidiameter $= 0,05256\,\Pi$ ea adhiberi poterit, ad multiplicationem $= m$ producendam, ſi accipiatur $\Pi = \frac{3}{5} m$ dig.

CASVS SECVNDVS

quo prima lens ex vitro cryſtallino, ſecunda vero ex coronario paratur.

§. 9. Hic ergo erit $\zeta = 4$ et $\eta = 3$, vnde valores prodibunt ſequentes

$$f = -\frac{3(i-1)^2}{i(i+3)} \quad \text{et} \quad g = \frac{4i}{i+3}.$$

Cum nunc ſecunda lens fieri debeat vtrinque aequaliter conuexa, ſtatui poſſet $k = 12\,g$; verum quia

 prae-

praeſtat k ad f referre, cuius valor hic erit negatiuus et minor quam g, ſumamus $k = -16f$ vt ſit $i = -16$, ex quo impetrabimus

$$f = -\tfrac{167}{208}$$
$$g = \tfrac{64}{11}$$

ſin autem ſumamus $i = -15$ habebimus

$$f = -\tfrac{64}{15}$$
$$g = 5.$$

§. 10. Retineamus autem valores poſteriores

$$f = -\tfrac{64}{15} \quad \text{et} \quad g = 5,$$

vnde ſequitur

$$p = -\tfrac{15}{64}\Pi = -0,23437\Pi \quad \text{et} \quad q = \tfrac{1}{5}\Pi = 0,2000\Pi$$

quae poſterior lens, quia fieri debet vtrinque aeque conuexa, radius vtriusque faciei erit $= 0,21200\Pi$, ſicque aperturam admittet cuius ſemidiameter $= 0,0530\Pi$; diſtantia autem inter binas lentes

$$= -\tfrac{1}{15}p = +0,01562\Pi$$

deinde vero reliquae litterae erunt

$$P = \tfrac{15}{16}; \quad B = +4 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \tfrac{4}{5}.$$

§. 11. Nunc pro confuſione tollenda, quia prima lens eſt cryſtallina et concaua, formula eam exprimens erit

$$-\tfrac{\mu'}{\mu}\lambda + \tfrac{1}{P}\left(\tfrac{\lambda'}{\mathfrak{B}} + \tfrac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)$$

vbi, cum ſecunda lens ſit vtrinque aeque conuexa erit

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \left(\tfrac{\sigma - \rho}{\tau}\right)\left(\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\right)$$

quia

quia igitur eſt

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{5} \text{ erit } \mathfrak{B} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0,300$$

vnde colligitur

$$\lambda' = 1,21609.$$

Deinde eſt

$$l\frac{1}{p} = 0,0280287 \text{ et } lB = 0,6020600 \text{ et}$$

$$l\mathfrak{B} = 9,9030900 \text{ hincque } lB\mathfrak{B} = 0,5051500$$

vnde calculus pro ſecunda lente ita ſe habebit

$l\frac{1}{p}$	$= 0,0280287$	$l\frac{1}{p}$	$= 0,0280287$
$l\lambda'$	$= 0,0849660$	$l\nu$	$= 9,3412366$
	$0,1129947$		$9,3692653$
$l\mathfrak{B}^3$	$= 9,7092700$	$lB\mathfrak{B}$	$= 0,5051500$
l. p. I	$= 0,4037247$	l. p. II	$= 8,8641153$
pars I	$= + 2,53352$	pars II	$= 0,07016$

ergo ambae partes faciunt 2,60368, vnde cum ſit

$$\frac{\mu'}{\mu} = 0,88344$$

erit confuſio lentis duplicatae

$$-0,88344\lambda + 2,60368,$$

ſi confuſio ex reliquis lentibus nata ſit $= O$ debebit eſſe.

$$-0,88344\lambda + 2,60368 + O = 0 \text{ hincque}$$

$$\lambda = \frac{2,60368 + O}{0,88344} = 2,94720 + 1,13194\,O.$$

§. 12. Hinc ergo inuento numero λ erit pro prima lente,

Radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma' - \tau' \sqrt{\lambda - 1}} = - \frac{0,23487\, \Pi}{1,5827 - \tau' \sqrt{\lambda - 1}}$.

Radius faciei poſterioris $= \frac{p}{\varrho' + \tau' \sqrt{\lambda - 1}} = - \frac{0,23137\, \Pi}{0,1413 + \tau' \sqrt{\lambda - 1}}$.

Hinc autem radius faciei poſterioris multo prodit minor quam radius vtriusque faciei primae lentis, etiamſi confuſio plane nulla eſſet ſuperanda, quod incommodum multo magis vſu veniet, ſi etiam maior confuſio deberet tolli; vnde hoc genus lentium duplicatarum penitus repudiandum videtur, niſi forte voluerimus multo maiorem diſtantiam focalem admittere, id quod ſcopo Dioptricae maxime eſt alienum.

DE

DE APPLICATIONE LENTIVM OBIECTIVARVM COMPOSITARVM AD OMNIS GENERIS TELESCOPIA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Methodus, qua ſum vſus in dioptrica, conſtructionem teleſcopiorum pertractandi, poſtulat, vt ſingulae lentes, ex quibus haec inſtrumenta componuntur ſeorſim in calculum introducantur, vnde pro multitudine lentium, formulae quibus ſatisfieri oportet, continuo magis fiunt complicatae; quare ſi loco lentis obiectiuae ſimplicis, ſiue duplicata ſiue etiam triplicata adhibere velimus, numerus litterarum omnium, quae ob ſingulas lentes in calculum ingrediuntur, ita increſcit, vt moleſtum ſit omnibus conditionibus quae ad perfectionem teleſcopiorum requiruntur, ſatisfacere.

§. 2. Vt igitur huic incommodo occurramus, maxime eſt optandum, vt loco lentis ſiue duplicatae triplicatae, vna lens tantum ſimplex in calculum induci poſſit, quae omni reſpectu illius vicem gerat, atque eundem plane effectum producat; facile

autem

autem intelligitur talem lentem ſimplicem per ſe ſemper eſſe impoſſibilem, quandoquidem ſi talem lentem conſtruere liceret, non opus foret ad lentes compoſitas confugere. Verum nihil impedit, quo minus lente adeo imaginaria in calculo vtamur, dummodo easdem proprietates inuoluat, qua lentes compoſitae ſunt affectae, quandoquidem, calculo abſoluto, id quod erat imaginarium, iterum inde eliditur: Hunc infinem ſequens Problema reſoluendum ſuſcipio.

Problema.

§. 3. *Propoſita lente obiectiua, ſiue duplicata ſiue triplicata, inuenire lentem ſimplicem etſi imaginariam, ex data vitri ſpecie confectam, quae omni reſpectu in compoſitione teleſcopii eundem plane effectum eſſet prodi- tura, et quam idcirco tanquam lentem vicariam ſpectare liceat.*

§. 4. Primo igitur lentem triplicatam qua vti voluerimus, ſecundum omnes circumſtantias accurate deſcribamus, quae ergo compoſita ſit ex tri-
Tab. IV. Fig. 1. bus lentibus P P, Q Q, R R, quarum prima P P et tertia R R ex vitro coronario, media vero Q Q ex vitro cryſtallino ſit parata, et quae, obiectorum infinite quaſi remotorum imaginem, inuerſam I η repraeſentet; vocemus igitur diſtantiam huius imaginis $c\,I = \Pi$, quae ergo eſt diſtantia focalis ipſius lentis triplicatae, tum vero ſit primae P P diſtantia focalis $= p$, ſecundae lentis Q Q $= q$ et tertiae R R $= r$; praeterea vero ſint interualla, quibus centra

tra harum lentium a ſe inuicem ſunt remota $ab = bc = \frac{\Pi}{k}$, quod interuallum ſupra ſtatuimus $= \frac{1}{12} q$; tum vero ſit ſemidiameter aperturae primae harum lentium $ax = x$, ſitque Ex radius a centro obiecti per extremitatem lentium tranſiens, qui ergo poſt triplicem refractionem in centrum imaginis I pertingat, poſtquam ſecundam lentem in x', tertiam autem in x'' traiecerat; ponamus autem ſemidiametrum aperturae ſecundae lentis $bx' = x$, tertiae vero $cx'' = x''$; quod autem ad figuram ſingularum lentium attinet, eam deinceps ita aſſumemus, quemadmodum pro quauis ſpecie in precedentibus diſſertationibus determinauimus.

§. 5. Praeterea vero meminiſſe oportet, ſi, vti in Dioptrica eſt factum, diſtantiae determinatrices harum lentium vocentur a et α pro prima lente PP, pro ſecunda lente b et β et pro tertia lente c et γ, tum fore $a = \infty$ et $\gamma = \Pi$, atque notentur ſequentes aequationes,

$$\alpha = p, \; \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} \text{ et } \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r}$$

tum vero ob interualla data

$$\alpha + b = \frac{\Pi}{k} \text{ et } \beta + c = \frac{\Pi}{k},$$

etiam conſiderentur iſtae quantitates deriuatae

$$P = -\frac{\alpha}{b} \text{ et } Q = -\frac{\beta}{c} \text{ porro } \frac{\beta}{b} = B \text{ et } \frac{\gamma}{c} = C$$

vnde formatae ſunt iſtae

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1 + B} \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{C}{1 + C}$$

ex quibus deduximus

$$p = \alpha, \quad q = \mathfrak{B} b \text{ et } r = \mathfrak{C} c.$$

§ 6. Sit nunc Π Π lens illa ſimplex vicaria, ad ſpeciem vitri coronarium referenda, quae omni reſpectu eundem effectum producat atque illa lens triplicata, ac primo quidem ſtatuamus iſtius lentis
Tab. IV. diſtantiam focalem $e\,l = \Phi$, eique tribuamus aper-
Fig. 2. turam cuius ſemidiameter $e\,X = X$, ita, vt radius a centro obiecti emanans E X, per extremitatem huius lentis tranſiens, cum axe concurrat in ipſo puncto l; tum vero pro indole huius lentis ſit numerus arbitrarius, ex quo haec lens formari deberet $= \Lambda$, qui cum aequalis ſit o, vel adeo valorem habeat negatiuum, in cauſa eſt cur haec lens ſit imaginaria: quandoquidem talem lentem actu efficere non licet, niſi hic numerus arbitrarius ſit poſitiuus, et vnitate maior. At vero pro ſingulis lentibus lentis triplicatae, ſint ſimiles numeri arbitrarii λ, λ' et λ'', quos vtique vnitatem ſuperare oportet; cum iam haec lens vicaria iſtis tribus elementis, primo diſtantia focali Φ, ſecundo ſemidiametro X et tertio numero arbitrario Λ penitus determinetur, noſtra quaeſtio huc reducitur. quemadmodum haec tria elementa Φ, X et Λ ex ſuperioribus elementis, quibus lens triplicata definitur, determinari opporteat, vt in compoſitione cum reliquis lentibus, quodcunque etiam adiungere viſum fuerit, eundem plane effectum eſſet praeſtatura.

§. 7.

§. 7. Hunc in finem ante omnia requiri manifeſtum eſt, vt imago $I\eta$, per lentem vicariam repreſentata, eandem prorſus habeat magnitudinem, quam imago per lentem triplicatam repreſentata; at ſi ſemidiametrum apparentem obiecti vocemus $= \phi$, ſemidiameter imaginis per lentem vicariam repreſentatae erit $I\eta = \Phi\,\phi$. Verum ſemidiameter imaginis per lentem triplicatam exhibita erit

$$= \alpha \tfrac{\beta}{b} \cdot \tfrac{\gamma}{c}\, \phi = \tfrac{\alpha}{b} \cdot \tfrac{\beta}{c}\, \gamma\, \phi.$$

Quia ergo eſt

$$\tfrac{\alpha}{b} = -P; \quad \tfrac{\beta}{c} = -Q \quad \text{et } \gamma = \Pi,$$

hacc quantitas erit $PQ\Pi\phi$, cui ergo illa $\Phi\,\phi$ debet eſſe aequalis, vnde colligimus eſſe debere $\Phi = PQ\Pi$, quae eſt prima conditio pro lente vicaria requiſita, vnde patet: lentem vicariam non in ipſum locum lentis triplicatae ſubſtitui poſſe, ſed cum locus primae imaginis $I\eta$ reſpectu ſequentium lentium fuerit definitus, lentem vicariam ante hanc imaginem, ad diſtantiam $eI = \Pi QP$ conſtitui concipiendum eſt.

§. 8. Prima hac conditione expedita porro efficiendum eſt, vt vtroque caſu extremi radii per lentes trasmiſſi cum axe in I eundem angulum conſtituant, quandoquidem per hunc angulum apertura ſequentium lentium, atque adeo campus apparens determinatur. Cum igitur pro lente triplicata, tangens huius anguli CIx'' ſit $= \frac{x''}{\Pi}$ pro lente autem vicaria huius anguli tangens ſit $= \frac{x}{\Phi} = \frac{x}{PQ\Pi}$ neceſſe

 eſt

eſt vt fiat $X = x'' P Q$. Cum igitur ſit $a b = \frac{\pi}{k}$ erit primo

$$x' = x - \frac{x \pi}{\alpha k} = x \left(1 - \frac{\pi}{\alpha k} \right).$$

Hincque porro ſimili modo

$$x'' = x' \left(1 - \frac{\pi}{\beta k} \right)$$

quam ob rem habebimus

$$x'' = x' \left(1 - \frac{\pi}{\alpha k}\right)\left(1 - \frac{\pi}{\beta k}\right) = x \left(1 - \frac{\pi}{k}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\pi \pi}{\alpha \beta k k}\right)$$

vnde per formulas ſupra datas colligitur

$$x'' = x \left(\frac{13}{12} + \frac{25 q}{144 p} \right)$$

poſito $\frac{\pi}{k} = - \frac{1}{12} q$ quia ſcilicet q eſt quantitas negatiua, conſequenter pro lente vicaria habebimus

$$X = P Q x \left(\frac{13}{12} + \frac{25 q}{144 p} \right)$$

haecque eſt ſecunda conditio pro determinatione lentis vicariae.

§. 9. Praecipua autem conditio adimplenda in hoc conſiſtit, vt lens vicaria in calculo confuſionis eundem plane obtineat valorem, quem pro lente triplicata inuenimus; ſupra quidem tantum formulis vſi ſumus quibus haec confuſio erat proportionalis, quia hoc ad propoſitum noſtrum ſufficiebat; nunc autem veram expreſſionem pro ſemidiametro confuſionis conſiderare debemus. In dioptrica autem pro ſemidiametro confuſionis quatenus ad noſtram lentem triplicatam refertur, dum ad multiplicationem m producendam adhi-

adhibetur, ſemidiameter confuſionis reperitur expreſſus

$$\frac{\mu\, m\, x^3}{4\, p^3}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\mu\, P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\,\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3\, P\, Q}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\,\mathfrak{C}}\right)\right)$$

quae formula ſi ad noſtram lentem referatur dabit ſemidiametrum confuſionis

$$\frac{\mu\, m\, X^3}{4\, \Phi^3}\, \Lambda$$

quare vt confuſio vtrinque fiat eadem, neceſſe eſt vt ſit

$$\Lambda = \frac{\Phi^3\, x^3}{p^3\, X^3}(\lambda - \text{etc.})$$

vbi ſimul adiungendi ſunt termini λ' et λ'' inuolventes: quod ſi ergo loco Φ et X valores inuentos ſubſtituamus, reperiemus

$$\Lambda = \frac{\Pi^3}{p^3\left(\frac{15}{16} + \frac{25\, q}{144\, q}\right)^3}(\lambda - \text{etc.})$$

in hac ergo formula etiam tertia conditio continetur, qua lens noſtra vicaria penitus determinatur, atque pro quouis teleſcopiorum genere loco lentis triplicatae in calculum introduci poteſt, vnde ad ſequens Problema principale progredimur.

Problema.

§. 10. *Pro quouis teleſcopiorum genere, lentem triplicatam loco obiectiuae adhibendam, ita determinare, vt omnis plane confuſio a lentium apertura oriunda prorſus deſtruatur.*

Solutio.

§. 11. Loco lentis obiectiuae triplicatae, in computum introducatur lens obiectiua ſimplex vicaria modo determinata, quaſi ex vitro coronario eſſet parata, et tum ex data multiplicatione $= m$ et elementis huius lentis vicariae, quae ſunt Φ X et Λ, ſecundum praecepta in *Dioptrica* data, colligantur ſequentium lentium omnium confuſiones, vnde prodeat ſemidiameter confuſionis totalis

$$= \frac{\mu m X^3}{4 \Phi^3} (\Lambda + \Omega)$$

ita vt Ω contineat formulas pro reliquis lentibus confuſionem exhibentes; quo facto omnis confuſio penitus tolletur, ſi fiat $\Lambda + \Omega = 0$ cum igitur ſit

$$\Lambda = \frac{\Pi^3}{p^3 \left(\frac{13}{12} + \frac{25 q}{144 p}\right)^3} (\lambda - [\lambda'] + [\lambda''])$$

vbi ſcilicet loco terminorum

$$\frac{\mu'}{\mu P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B \mathfrak{B}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{B P Q}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C \mathfrak{C}}\right)$$

ſcribamus ſimpliciter

$$[\lambda'] \quad \text{et} \quad [\lambda'']$$

tum vero ſit etiam breuitatis gratia

$$\frac{\Pi^3}{p^3 \left(\frac{13}{12} + \frac{25 q}{144 p}\right)^3} = \Delta$$

vt habeamus

$$\Lambda = \Delta (\lambda - [\lambda'] + [\lambda''])$$

ſicque habebimus hanc aequationem adimplendam

$$\Delta (\lambda - [\lambda'] + [\lambda'']) + \Omega = 0 \text{ ſiue}$$
$$\lambda - [\lambda'] + [\lambda''] + \frac{\Omega}{\Delta} = 0.$$

Supra

Supra autem, vbi lentes triplicatas tractauimus, ſuppoſuimus confuſionem a reliquis lentibus oriundam eſſe $= O$ ita vt ſatisfieri oporteret huic aequationi

$$\lambda - [\lambda'] + [\lambda''] + O = 0$$

qua aequatione cum illa comparata intelligimus eſſe $O = \frac{\Omega}{\Delta}$; cum igitur quantitas Ω per praecepta dioptricae fuerit definita, determinationem lentis triplicatae obtinebimus per hanc formulam

$$\lambda = [\lambda'] - [\lambda''] - \frac{\Omega}{\Delta};$$

quo facto lentem triplicatam ante locum primae imaginis ad diſtantiam $= \Pi$ collocare oportebit.

§. 12. Quae igitur hactenus in genere expoſuimus, ea tam ad lentes illas triplicatas, quas in ſuperiore diſſertatione deſcripſimus, quam ad lentem duplicatam in appendice deſcriptam accommodemus; in ipſa autem illa diſſertatione binas lentes triplicatas dedimus, alteram ex hypotheſi $\vartheta = \frac{59}{36}$, alteram vero ex hypotheſi $\vartheta = \frac{7}{4}$ deductam, vnde tres caſus nobis erunt euoluendi, quos ordine inuerſo pertractemus, et quomodo omnis generis teleſcopia ope talium lentium obiectiuarum ad ſummum perfectionis gradum perduci queant, oſtendamus.

I. DE TELESCOPIIS
Lente obiectiua duplicata inſtruendis.

§. 13. Poſita huius lentis duplicatae diſtantia focali $= \Pi$, prioris lentis quae ex vitro coronario eſt paranda diſtantia focalis inuenta eſt

$p = 0,19835\ \Pi$, quae

quae cum eſſe debeat vtrinque aequaliter conuexa, radius vtriusque faciei erit

$$= 0,21023\,\Pi,$$

poſterioris vero lentis cryſtallinae diſtantia focalis negatiua aſſignata eſt

$$q = -0,4444\,\Pi,$$

pro cuius conſtructione, ſi numerus arbitrarius eo pertinens inuentus fuerit $= \lambda'$, radium faciei anterioris eſſe oportet

$$= \frac{-0,4444\,\Pi}{-1,4453 + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}} = \frac{-0,15648\,\Pi}{-0,51161 + \sqrt{\lambda' - 1}}$$

faciei autem poſterioris

$$= \frac{-0,4444\,\Pi}{2,2233 - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}} = \frac{-0,[illegible]\,\Pi}{2,5334 - \sqrt{\lambda' - 1}}$$

diſtantia autem inter has binas lentes conſtituta eſt $0,01653\,\Pi$. Quod ſi iam hac lente vti velimus ad multiplicationem $= m$ producendam, eam ad tantam aperturam recipiendam parari oportet, cuius ſemidiameter in facie anteriore ſit $x = \frac{m}{50}$ digitor. tum vero obſeruauimus, diſtantiam focalem capi poſſe $= \Pi = \frac{5}{8}\,m$ dig.

§. 14. Pro hac vero lente duplicata erat $P = \frac{70}{121}$, qui valor ſufficit, dum duae tantum habeantur lentes, et hoc valore loco PQ vti conueniet. Tum vero pro ſemidiametro aperturae ſecundae lentis cryſtallinae erit

$$x' = x\left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12}\,x,$$

ita vt iam loco formulae $\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p}$ hic tantum $\frac{11}{12}$ ſcribi oporteat; praeterea vero pro confuſione huius lentis

lentis obiectiuae, quam in praeceptis ante traditis hac formula $\lambda - [\lambda'] + [\lambda'']$ deſignauimus, nunc habebimus iſtum valorem

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda'.$$

§. 15. His de noſtra lente duplicata definitis, in calculum pro teleſcopiis cuiusque generis loco iſtius lentis duplicatae, introducamus lentem ſimplicem ex vitro coronario factam, cuius diſtantia focalis ſit Φ et ſemidiameter aperturae $= X$, atque ex iis quae ante ſunt demonſtrata habebimus

$$\Phi = P\,\Pi = \tfrac{78}{121}\,\Pi = 0,6446\,\Pi$$

tum vero

$$X = \tfrac{78}{121}\cdot\tfrac{11}{12}\,x = \tfrac{13}{22}\,x = 0,5909\,x$$

denique hac lente obiectiua ſimplici in calculum introducta colligantur ſingularum lentium reliquarum confuſiones, ſecundum formulas in dioptrica traditas, ſitque earum confuſio $= \Omega$ et cum debeat eſſe

$$\lambda - [\lambda'] + [\lambda'']\,\tfrac{\Omega}{\Delta} = 0 \text{ ob } \Delta = \frac{\Pi^3}{\left(\tfrac{11}{12}\right)^3 p^3} \text{ erit}$$

$$\sqrt[3]{\Delta} = \frac{12\,\Pi}{11\,p} = \frac{12}{2,18185}$$

vnde fit

$$l\,\Delta = 2,2210692 \text{ hincque } l\,\tfrac{1}{\Delta} = 7,7789308$$

ergo

$$\tfrac{1}{\Delta} = 0,00601$$

ſicque aequatio pro confuſione tollenda erit

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda' + 0,00601\,\Omega = 0$$

 vnde

vnde reperitur

$$\lambda' = \frac{1,66429 + 0,00601\,\Omega}{0,77583} = 2,14520 + 0,00775\,\Omega.$$

Nunc igitur ex hoc valore λ', lens poſterior cryſtallina conſtruatur, quo facto lens iſta duplicata ante imaginem collocetur ad diſtantiam $= \Pi$, manentibus reliquis lentibus vti fuerint determinatae, et teleſcopium erit perfectum.

II. DE TELESCOPIIS
Lente triplicata obiectiua poſteriore inſtruendi.

§. 16. Poſita huius lentis triplicatae diſtantia focali $= \Pi$, primae lentis ex vitro coronario parandae diſtantia focalis aſſignata eſt

$$p = 0,40663\,\Pi,$$

cuius ſi numerus arbitrarius ſit $= \lambda$, conſtructio ita ſe habet

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{0,47950\,\Pi}{1,79442 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Radius faciei poſterioris} = \frac{0,47059\,\Pi}{0,24492 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

Lens vero ſecunda cryſtallina diſtantiam focalem habet

$$q = -0,27109\,\Pi,$$

quae cum eſſe debeat vtrinque aequaliter concaua, vtriusque faciei radius erit $= -0,31446\,\Pi$; tertiae denique lentis iterum coronariae diſtantia focalis erat $= 0,48567\,\Pi$, quae cum ſit etiam vtrinque aequaliter conuexa, radius vtriusque faciei erit $0,51483\,\Pi$; tum

tum vero diſtantia, tam a prima lente ad ſecundam, quam a ſecunda ad tertiam conſtituta eſt $= 0{,}02260\,\Pi$; quod ſi iam haec lens adhiberi debeat ad multiplicationem $= m$ producendam, ſemidiameter aperturae in prima lente debet eſſe $x = \frac{m}{50}$ dig. tum vero capi poterit diſtantia focalis $\Pi = \frac{m}{4}$ dig.

§. 17. Pro hac porro lente triplicata inuenimus fore

$$PQ = \tfrac{216}{209} \text{ et } l\,PQ = 0{,}0143075$$

deinde pro calculo ſequente notetur eſſe

$$l\,\tfrac{\Pi}{p} = 0{,}3908021,$$

tum vero pro formula

$$\tfrac{13}{12} + \tfrac{25\,q}{144\,p} \text{ reperitur } \tfrac{25\,q}{144\,p} = -\,0{,}11574$$

vnde fit

$$\tfrac{13}{12} + \tfrac{25\,q}{144\,p} = 0{,}96759.$$

Cum porro ſit

$$\sqrt[3]{\Delta} = \frac{\Pi}{p\left(\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p}\right)} \text{ erit } l\sqrt[3]{\Delta} = 0{,}4051107$$

hinc

$$l\,\Delta = 1{,}2153321 \text{ et } l\,\tfrac{1}{\Delta} = 8{,}7846679 \text{ ergo}$$
$$\tfrac{1}{\Delta} = 0{,}06091.$$

§. 18. In calculo igitur, pro teleſcopiis cuiusque generis, loco lentis noſtrae triplicatae, me te ſaltem ſubſtituatur lens ſimplex coronaria, cuius diſtantia focalis ſit Φ, et ſemidiameter aperturae $= X$, eritque vti ſupra oſtendimus

$$\Phi = PQ\,\Pi = 1{,}03349\,\Pi \text{ et } X = 0{,}99999\,x.$$

Hinc pro reliquis lentibus computentur confuſiones, quarum ſumma ſit $= \Omega$, et quia confuſio ex lente triplicata oriunda inuenta eſt $\lambda - 2,2191$, vt omnis confuſio tollatur huic aequationi eſt ſatisfaciendum

$$\lambda - 2,2191 + 0,06091\,\Omega = 0,$$

vnde reperitur

$$\lambda = 2,2191 - 0,06091\,\Omega,$$

quo valore inuento prima lens erit perfecte determinata; tantum igitur ſupereſt, vt tota lens triplicata ante primam imaginem ad diſtantiam $= \Pi$ conſtituatur.

III. DE TELESCOPIIS
Lente obiectiua triplicata priori inſtruendis.

§. 18. Primae lentis ex vitro coronario parandae diſtantia focalis eſt

$$p = 0,44550\,\Pi,$$

cui ſi conueniat numerus arbitrarius λ

Radius faciei anterioris eſto $= \dfrac{0,48154\,\Pi}{1,79442 - \sqrt{\lambda - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \dfrac{0,49154\,\Pi}{0,24452 + \sqrt{\lambda - 1}}$

ſecundae autem lentis diſtantia focalis debet eſſe $q = -0,27184$, quae cum effici debeat vtrinque aequaliter concaua, radius vtriusque faciei capiatur

$$= -0,31532\,\Pi.$$

Tertiae autem lentis iterum coronariae atque aequaliter vtrinque conuexae diſtantia focalis aſſignata eſt

$$r = 0,44042\,\Pi$$

et

et radius vtriusque faciei

$$= 0,46684\,\Pi\,;$$

tum vero interualla inter bina harum lentium conſtituta ſunt

$$= 0,02265\,\Pi,$$

quae ſcilicet interualla a puncto medio ſeu centro cuiusque lentis ſunt ſumenda. Quod ſi iam haec lens ad multiplicationem $= m$ producendam adhibeatur, eius aperturae ſemidiameter erit $x = \frac{m}{50}$ dig., diſtantia autem eius focalis ſumi poterit $\frac{\Pi}{4}$ digitor; Confuſio vero huic lenti triplicatae conueniens reperta eſt

$$= \lambda - 2,50862.$$

§. 19. Pro hac porro lente erat

$$l\,PQ = 0,0099272$$

deinde vero colligitur

$$\frac{25\,q}{144\,p} = \frac{q}{5,76 \cdot p} = -0,10593$$

vnde fit formula

$$\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p} = 0,97740\,;$$

cum poſtea ſit

$$l\frac{\Pi}{p} = 0,3511328 \text{ et } l\sqrt{\Delta} = 0,3610605$$

ideoque

$$l\Delta = 1,0831815,\ l\frac{1}{\Delta} = 8,9168185 \text{ et } \frac{1}{\Delta} = 0,08257.$$

§. 20. Iam in calculo teleſcopiorum, loco huius lentis triplicatae, mente ſaltem ſubſtituatur lens coronaria ſimplex, cuius diſtantia focalis ſit $= \Phi$ et ſemidiameter aperturae $= X$, eritque vti ſupra demonſtrauimus

$$\Phi = PQ\Pi = 1,02311\,\Pi \text{ et } X = 1,0000\,x$$

ita vt ſit $X = x$: quo facto reliquarum lentium confuſiones colligantur, quarum ſumma ſi ponatur $= \Omega$, tota confuſio cenſenda erit

$$= \lambda - 2,50862 + 0,08257\,\Omega,$$

quae ergo penitus deſtruetur ſi capiatur

$$\lambda = 2,50862 - 0,08257\,\Omega$$

vnde prima lens iam penitus erit determinata et conſtrui poterit.

§. 21. Coeterum quia in Dioptrica formulae pro confuſione lentium variis modis ſunt repreſentatae, dum factor communis alio atque alio modo aſſumitur, hic iis formulis erit vtendum quae hac forma ſunt exhibitae

$$\lambda - \tfrac{1}{P}\left(\tfrac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \tfrac{\nu}{B\,\mathfrak{B}}\right) + \text{etc.}$$

cuius ſcilicet primum membrum eſt ſimpliciter numerus λ, primae lenti obiectiuae reſpondens. Beneficio igitur horum praeceptorum, omnia teleſcopiorum genera in Dioptrica pertractata, ad ſummum perfectionis gradum reduci poterunt. Hunc in finem autem eas tantum ſpecies adhiberi conueniet, in

in quibus lens obiectiua ſimplex eſt vſurpata, quandoquidem hic lentes compoſitas ad ſimplicem vicariam reducere docuimus. Denique circumſtantia hic ſe offert notatu maxime digna: quod confuſio a reliquis lentibus nata Ω, in noſtris formulis valde exiguum obtinuerit coefficientem, vnde intelligitur, ob lentes ſequentes, conſtructionem lentis obiectiuae ſiue duplicatae ſiue triplicatae parum immutari.

DE

DE PERFECTIONE TELESCOPIORVM PRIMI GENERIS NVLLAM IMAGINEM REALEM CONTINENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hic igitur contemplemur ſimpliciſſimam ſpeciem horum teleſcopiorum, in Dioptricae tomo ſecundo, pagina 73^a deſcriptam; quae tantum duabus lentibus conſtat, priore obiectiua, cuius diſtantia focalis ibi ponitur $= p$, altera oculari concaua cuius diſtantia focalis eſt $= q$, vbi pro data multiplicatione $= m$ debet eſſe $q = -\frac{p}{m}$, diſtantia autem harum lentium $= (\frac{m-1}{m}) p$; Tum vero oculum lenti oculari immediate applicari opportet, vt maximum campum apparentem contueatur, cuius ſemidiameter erit $\Phi = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{p}$, denotante ω ſemidiametrum pupillae, qui cum aeſtimari ſoleat $= \frac{1}{20}$ dig., diſtantiam focalem lentis ocularis minorem ſtatui non licet quam $\frac{1}{4}$ dig. vel ad ſummum $\frac{1}{5}$ dig.

§. 2. Hic igitur lens obiectiua vti eſt ſimplex, nobis vicem gerat lentis perfectae, ſiue duplicatae, ſiue

ſiue triplicatae, quales ſupra deſcripſimus; ſicque p denotat id, quod ibi vocauimus Φ, quemadmodum X deſignat ſemidiametrum aperturae iſtius lentis obiectiuae vicariae, pro qua ſupra numerum arbitrarium poſuimus $= \Lambda$, quo autem non amplius opus erit, quando eius loco lentem ſiue duplicatam ſiue triplicatam ſubſtituemus. His igitur praenotatis, vtramque lentem tanquam ex eadem vitri ſpecie paratam ſpectamus, quae ſit coronaria.

§. 3. Sit iam numerus arbitrarius lenti oculari reſpondens λ', et quia hanc lentem vtrinque aequaliter concauam fieri conuenit, vt maximam aperturam admittat, erit $\sqrt{\lambda' - 1} = (\frac{\sigma - \varrho}{\tau})(\frac{1}{2})$, vnde colligitur numerus $\lambda' = 1,60024$. Hinc autem ob $\mu' = \mu$ formula pro confuſione inuenta eſt $\frac{\mu m x^3}{4 p^3}(\Lambda - \frac{\lambda'}{m})$, vnde cum ſupra ad confuſionem, ex omnibus lentibus natam, deſignandam, exhibuerimus hanc formulam $\Lambda + \Omega$, erit noſtro caſu

$$\Omega = -\frac{\lambda'}{m} = -\frac{1,60024}{m}$$

vnde prout alia atque alia lens obiectiua compoſita in vſum vocatur, conſtructio totius teleſcopii omnino determinatur, dummodo ſemidiameter aperturae X ſiue x, vna cum diſtantia focali Π, ita accipiatur, vti multiplicatio m poſtulat. Pro ternis igitur lentibus perfectis, quae ſupra ſunt deſcriptae, tres caſus euoluamus.

CASVS PRIMVS

quo pro lente obiectiua accipitur lens duplicata ſupra deſcripta.

§. 4. Pro data igitur multiplicatione m primo accipiatur

$$x = \tfrac{m}{55}\ \text{dig.} \quad \text{et} \quad \Pi = \tfrac{5}{8} m\ \text{dig.},$$

quibus valoribus conſtitutis erit

$$\Phi = 0,6446\, \Pi = p,$$

vnde colligitur

$$q = -\frac{0,6446\, \Pi}{m},$$

tum vero quia imago realis poſt lentem hanc obiectiuam cadit, ad diſtantiam $= \Pi$, lens ocularis autem ad diſtantiam

$$= 0,6446\, \frac{\Pi}{m}$$

erit diſtantia inter lentem obiectiuam et ocularem

$$= \Pi \left(1 - \frac{0,6446}{m}\right)$$

quae erit longitudo teleſcopii; deinde vero ob

$$\Omega = -\frac{1,6\text{[illegible]}}{m}$$

pro conſtructione lentis cryſtallinae habebimus numerum arbitrarium

$$\lambda' = 2,14520 - \frac{\text{[illegible]}}{m} \quad \text{ſiue} \quad \lambda' = 2,14520 - \frac{0,01240}{m}.$$

Praeterea vero etiam notetur eſſe $X = 0,5909\, x$.

§. 5. Nunc igitur conſtructio lentis obiectiuae duplicatae ita ſe habebit.

1°. Prior

1°. Prior eius lens ex vitro coronario paranda, diſtantiam focalem habeat $= 0, 19835\, \Pi$, radium vero vtriusque faciei conuexae $= 0, 21023\, \Pi$.

2°. A medio huius lentis ad lentem ſequentem ſtatuatur interuallum $= 0, 01653\, \Pi$.

3°. Lentis porro cryſtallinae concauae, diſtantia focalis aſſignata eſt $= -0, 4444\, \Pi$ et pro eius conſtructione

Radius faciei anterioris $= \frac{-0, 50649\, \Pi}{-0, 51202 + \sqrt{\lambda' - 1}}$

Radius faciei poſterioris $= \frac{-0, 50649\, \Pi}{2, 53368 - \sqrt{\lambda' - 1}}$.

Exiſtente $\lambda' = 2, 14520 - \frac{0, 01240}{m}$.

4°. Poſt hanc lentem, ad diſtantiam $\Pi\left(1 - \frac{0,6446}{m}\right)$ ſtatuatur lens ocularis coronaria concaua, cuius diſtantia focalis $= -0, 6446 \frac{\Pi}{m}$ et radius vtriusque faciei $= -0, 6833 \frac{\Pi}{m}$, cui oculum immediate applicari oportet.

5°. Tum vero pro ſemidiametro campi apparentis erit $\Phi = \frac{m}{m-1} \frac{\omega}{0, 6446\, \Pi}$, vbi ω eſt circiter $\frac{1}{50}$ dig. quae expreſſio, cum ad radium referatur, multiplicari debet per numerum 3437, vt reperiantur minuta prima.

6°. Quod ad aperturas attinet, lenti oculari quidem maxima tribuitur, quam capere poteſt. At pro lente obiectiua dubium naſci poteſt, vtrum capi debeat $x = \frac{m}{50}$ dig. an $X = \frac{m}{50}$ dig. quia inter X et x tam inſigne diſcrimen intercedit, vtique autem praeſtabit ſumſiſſe $X = \frac{m}{50}$, vnde fit $x = \frac{X}{0,60} = \frac{m}{30}$. Tum

Iii 2 autem

autem quantitas Π in eadem ratione 3 : 5 erit augenda, ita vt fiat $\Pi = \frac{5}{8} m$; hoc enim modo certe maior claritatis gradus obtinebitur. Hinc igitur vnicum exemplum computemus.

Exemplum.

§. 6. Sit primo multiplicatio $m = 5$, capiatur ergo $x = \frac{1}{6}$ dig. et $\Pi = \frac{25}{8}$, ſeu proxime $\Pi = 3$ dig. tum erit $\lambda' = 2,14272$ hinc

$$\lambda' - 1 = 1,14272 \text{ et } \sqrt{\lambda' - 1} = 1,069$$

vnde conſtructio huius teleſcopii ſequenti modo ſe habebit.

1°. Prior eius lens ex vitro coronario paranda diſtantiam focalem habeat $= 0,595$ dig. radium vtriusque faciei $= 0,631$ dig. et ſemidiametrum aperturae $= \frac{1}{8}$ dig.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſequentis, ſtatuatur interuallum $= 0,059$ digit.

3°. Lentis porro cryſtallinae concauae, diſtantia focalis aſſignata eſt $= -1,3333$ dig.

Radius faciei anterioris $= -\frac{1,519}{0,557} = -2,727$ dig. et

Radius faciei poſterioris $= -\frac{1,519}{1,465} = -1,037$ dig.

4°. Poſt hanc lentem, ad diſtantiam 2,613 dig. ſtatuatur lens ocularis coronaria concaua, cuius diſtantia focalis $= -0,387$ dig. et radius vtriusque faciei $= -0,410$ digit. cui oculum immediate applicari oportet.

5°.

5°. Tum vero pro ſemidiametro campi adparentis erit $\Phi = \frac{3437}{31} = 111$ minut.

CASVS SECVNDVS
quo pro lente obiectiua accipitur lens triplicata, priore loco deſcripta.

§. 7. Pro data igitur multiplicatione m, accipiatur

$$x = \frac{m}{55} \text{ et } \Pi = \frac{m}{4} \text{ dig.}$$

quibus valoribus conſtitutis erit

$$\Phi = 1,03349\,\Pi = p, \text{ et } X = 1,00.x, \text{ ſiue } X = x$$

porro colligitur

$$q = -1,03349\,\frac{\Pi}{m}$$

vnde diſtantia inter lentem obiectiuam et ocularem erit

$$= \Pi\left(1 - \frac{1,03349}{m}\right); \text{ deinde ob } \Omega = -\frac{1,6002}{m} \text{ erit}$$

$$\lambda = 2,2191 + \frac{0,0609.\,1,6002}{m} \text{ ſiue } \lambda = 2,2191 + \frac{0,0975}{m}.$$

§. 8. Nunc igitur conſtructio, tam lentis obiectiuae triplicatae, quam totius teleſcopii ita ſe habebit.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 0,40663\,\Pi$, et ex numero λ modo inuento ita formari debet iſta lens, vt ſit

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{1,79442 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Radius faciei poſterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{0,24492 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

 2°. A

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,02260\ \Pi$.

3°. Secundum locum obtinet lens cryſtallina, vtrinque aeque concaua, cuius diſtantia focalis eſt $= -0,2711\ \Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,31446\ \Pi$.

4°. Ab huius medio vsque ad medium tertiae, iterum ſtatuatur interuallum $= 0,02260\ \Pi$.

5°. Tertiae vero lentis ex vitro coronario, et vtrinque aeque conuexe parandae diſtantia focalis debet eſſe $= 0,48567\ \Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= 0,51483\ \Pi$.

6°. Ab hac lente vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum $= \Pi\left(1 - \frac{1,03349}{m}\right)$.

7°. At lens haec ocularis, ex vitro coronario, et aequaliter vtrinque concaua paranda, habeat diſtantiam focalem $= -1,0335\ \frac{\Pi}{m}$ et radium vtriusque faciei $= -1,1136\ \frac{\Pi}{m}$.

8°. Tum vero pro ſemidiametro campi adparentis erit $\Phi = \frac{m}{m-1}\left(\frac{\omega}{1,03349\ \Pi}\right)$ exiſtente ω circiter $= \frac{1}{20}$ dig. qui, ſumto igitur $\omega = \frac{1}{25}$ et $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. in minutis primis ita exprimitur, vt ſit $\Phi = \frac{665}{m-1}$ min. vnde ſequentia exempla euoluamus.

Exemplum primum.

§. 8. Incipiamus a multiplicatione $m = 10$, et ſumto ſemidiametro aperturae in lente obiectiua

$x = \frac{m}{50} = \frac{1}{5}$ dig. $= 0,200$ dig.

et

et diſtantia focali

$\Pi = \frac{m}{4} = 2,500$ dig. erit $\lambda = 2,2288$

et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,108$

vnde conſtructio teleſcopii ita ſe habebit.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 1,016$ dig. tum vero

Radius faciei anterioris $= \frac{1,090}{0,680} = 1,603$ dig.

Radius faciei poſterioris $= \frac{1,099}{1,353} = 0,813$ dig.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,056$ dig.

3°. Secundum locum tenet lens cryſtallina, vtrinque aeque concaua, cuius diſtantia focalis eſt $= -0,678$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -0,786$ digit.

4°. Ab huius lentis medio, ad medium tertiae ſtatuatur iterum interuallum $= 0,056$ digit.

5°. Tertiae vero lentis ex vitro coronario, et vtrinque aeque conuexe parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 1,214$ dig. et

Radins vtriusque faciei $= 1,287$ dig.

6°. Ab hac lente vsque ad lentem ocularem, ſtatuatur interuallum $= 2,242$ dig.

7°. Haec lens ocularis ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua parari debet, ita vt ſit diſtantia focalis $= -0,258$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -0,278$ dig.

8°. Tum vero ſemidiameter campi apparentis

tis $= 66\frac{1}{2}$ mir. coeterum campus apparens maxime eſt incertus, ob variationem pupillae.

Exemplum ſecundum.

§. 9. Sit iam multiplicatio $m = 20$, et ſumto ſemidiametro aperturae in lente obiectiua

$x = \frac{m}{50} = 0,400$ dig.

et diſtantia focali $\Pi = 5$ digit. erit

$\lambda = 2,2240$ ergo $\sqrt{\lambda - 1} = 1,1063$

vnde conſtructio teleſcopii ita ſe habebit.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 2,033$ digit.; tum vero

Radius faciei anterioris $= \frac{2,1975}{0,6881}$ dig. $= 3,193$ dig.

Radius faciei poſterioris $= \frac{2,1975}{1,3512}$ dig. $= 1,626$ dig.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,113$ digit.

3°. Secundum locum obtinet lens cryſtallina, vtrinque aeque concaua, cuius diſtantia focalis eſt $= -1,355$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -1,572$ digit.

4°. Ab huius medio, vsque ad medium tertiae, ſtatuatur interuallum $= 0,113$ digit.

5°. Tertiae vero lentis ex vitro coronario parandae et vtrinque aeque conuexae, diſtantia focalis debet eſſe $= 2,428$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 2,574$.

6°. Ab

6°. Ab hac lente, vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum $= 4, 742$ dig.

7°. Quae lens ocularis ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua parari debet, ita vt diſtantia focalis $= -0, 258$ dig. et

Radius vtrivsque faciei $= -0, 278$ dig.

8°. Tum vero ſemidiameter campi adparentis erit 35 min.

EVOLVTIO GENERALIS pro multiplicationibus maioribus.

§. 10. Pro multiplicatione quacunque $= m$, capiatur ſemidiameter aperturae $x = \frac{m}{50}$, et diſtantia focalis lentis triplicatae $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. tum vero cum ſit

$$\lambda = 2, 2191 + \frac{0, 0975}{m} \text{ erit}$$

$$\lambda - 1 = 1, 2191 + \frac{0, 0975}{m} = 1, 2191 \left(1 + \frac{2}{25 m}\right)$$

hincque

$$\sqrt{\lambda - 1} = 1, 1041 \left(1 + \frac{1}{25 m}\right) = 1, 1041 + \frac{0, 0442}{m}$$

hinc pro primae lentis facie anteriore erit denominator

$$= 0, 6903 - \frac{0, 0442}{m} = 0, 6903 \left(1 - \frac{0, 0640}{m}\right)$$

vnde cum numerator ſit $0, 10987\, m$, erit radius faciei anterioris

$$= \frac{0, 10987\, m}{0, 6903} \left(1 + \frac{0, 0640}{m}\right) = 0, 159163\, m + 0, 010;$$

ſimili modo pro facie poſteriore erit denominator

$$1, 3490 + \frac{0, 0442}{m} = 1, 3490 \left(1 + \frac{0, 0328}{m}\right)$$

hinc ergo radius faciei poſterioris erit

$$= \frac{0,\ 0087\ m}{1,\ 490}\left(1 - \frac{0,\ 0328}{m}\right) = 0,\ 081446\ m - 0,\ 003$$

quae particulae extremae ſubiunctae tam ſunt paruae vt in praxi prorſus ſentiri nequeant.

CONSTRVCTIO TELESCOPIORVM pro multiplicatione quacunque $= m$.

§. 11. Cum igitur hic ſit $x = \frac{m}{55}$ et $\Pi = \frac{m}{4}$, conſtructio ita eſt exſequenda.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 0,\ 10166\ m$ dig. et

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris } = 0,159163.m + 0,010 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris } = 0,081446.m - 0,003 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,\ 00565.\ m$ dig.

3°. Secundum locum tenet lens cryſtallina, vtrinque aequaliter concaua, cuius diſtantia focalis debet eſſe $= -0,\ 0678.\ m$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,\ 07861.\ m$ dig.

4°. Iterum ſtatuatur diſtantia inter hanc lentem et ſequentem $= 0,\ 00565.\ m$ dig.

5°. Tertiae lentis ex vitro coronario, et vtrinque aequaliter conuexe parandae, diſtantia focalis eſſe debet $= 0,\ 12142\ m.$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 0,\ 12871\ m$ dig.

6°. Ab huius lentis medio, vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum

$$= \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1,\ 0340}{m}\right) = \frac{m}{4} - 0,\ 258 \text{ dig.}$$

7°. At

7°. At haec lens ocularis, ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua paranda, habeat diſtantiam focalem $= -0,258$ dig. et

Radium vtriusque faciei $= -0,278$ dig.

8°. Tum vero erit ſemidiameter campi viſi $= \frac{665}{m-1}$ min.

Exemplum

pro multiplicatione $m = 200$.

§ 12. Cum ſit $x = 4$ dig. et $\Pi = 50$ dig. haec conſtructio obtinetur.

1°. Pro prima lente, ex vitro coronario paranda debet eſſe diſtantia focalis $= 20,332$ dig.

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 31,842 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 16,293 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae ſtatuatur interuallum $= 1,130$ dig.

3°. Secundum locum tenet lens cryſtallina vtrinque aequaliter concaua, cuius diſtantia focalis eſſe debet $= -12,560$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -15,722$.

4°. Statuatur iterum, diſtantia inter hanc lentem et ſequentem $= 1,130$ dig.

5° Tertiae lentis ex vitro coronario et vtrinque aequaliter conuexe parandae, diſtantia focalis eſſe debet $= 24\ 284$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 25,742$ dig.

6°. Ab hac lente vsque ad ocularem, interuallum $= 49, 742$ dig.

7°. At haec lens ocularis, ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua paranda, habeat diſtantiam focalem $= -0, 258$ dig. et

Radium vtriusque faciei $= -0, 278$.

8°. Tum vero ſemidiameter campi apparentis $= 3'. 20''$.

CASVS TERTIVS

quo pro lente obiectiua accipiatur lens triplicata *tertio loco deſcripta.*

§. 13. Pro data multiplicatione m accipiatur $x = \frac{m}{55}$ et $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. quibus valoribus conſtitutis erit

$$\Phi = 1,02311\, \Pi = p \text{ et } X = x$$

porro colligitur

$$q = -1,02311 \frac{\Pi}{m}$$

vnde diſtantia inter lentem obiectiuam et ocularem erit

$$= \Pi \left(1 - \frac{1,02311}{m}\right)$$

deinde ob

$$\Omega = -\frac{1,6002}{m} \text{ erit } \lambda = 2,50862 + \frac{0,08257 \cdot 1,6002}{m}$$

ſiue $\lambda = 2,50862 + \frac{0,13213}{m}$.

Quoniam autem in caſu precedente vidimus, ob hanc partem poſteriorem, conſtructionem lentis vix vllam muta-

mutationem ſubire, quaequidem in praxi obſeruari queat, hic eam ſtatim negligamus, vt ſit

$\lambda = 2,50862$ idcoque

$\lambda - 1 = 1,50862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,2282$

vnde pro prima lente habebimus

Radium faciei anterioris $= \frac{0,48154}{0,5662}\Pi = 0,85048\,\Pi$

Radium faciei poſterioris $= \frac{0,48154}{1,4731}\Pi = 0,32689\,\Pi.$

Lentis ſecundae cryſtallinae concauae, diſtantia focalis $= 0,27184\,\Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,31532\,\Pi$;

lentis vero tertiae coronariae vtrinque aeque convexae, diſtantia focalis eſt $= 0,44042\,\Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= 0,46684\,\Pi$;

diſtantiae autem inter binas harum lentium ſunt $= 0,02265\,\Pi$; tum vero erit ſemidiameter campi adparentis $= \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{1,0231\,\Pi}$ et ſumto $\omega = \frac{1}{20}$ dig. et $\Pi = \frac{m}{4}$ erit is, in minutis primis expreſſus $= \frac{9.3437}{46(m-1)}$ $= \frac{672,45}{m-1}$ min.

CONSTRVCTIO GENERALIS
horum Teleſcopiorum pro quacunque multiplicatione $= m$.

§. 14. Tribuatur igitur lenti obiectiuae apertura, cuius ſemidiameter $= \frac{m}{50}$ dig. et ſumatur $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. tum vero pro prima lente adiungantur particulae minimae abſolutae, pro precedenti caſu inuentae.

1°. Primae lentis coronariae, cuius diſtantia focalis $= 0,11138\, m$ dig.

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,21262\, m + 0,010 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 0,08172\, m - 0,003 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis, vsque ad medium ſecundae ſtatuatur interuallum $= 0,00564\, m$ dig.

3°. Secundae lentis cryſtallinae, vtrinque aeque concauae, diſtantia focalis $= -0,06796\, m$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -0,07883\, m$.

4°. A medio huius lentis, ad medium ſequentis interuallum $= 0,00564\, m$ dig.

5°. Tertiae lentis coronariae, vtrinque aeque convexae diſtantia focalis debet eſſe $= 0,11011\, m$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 0,11671\, m$ dig.

6°. Hinc vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum $= 0,250\, m - 0,256$ dig.

7°. Lentis autem ocularis, vtrinque aequae concauae diſtantia focalis $= -0,256$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,271$ dig.

8°. Semidiameter campi adparentis $= \frac{672,45}{m-1}$ min.

§. 15. In his autem teleſcopiis primi generis non licuit marginem coloratum penitus deſtruere; quamquam enim lens obiectiua eſt perfecta, ideoque nullam confuſionem, ob diuerſam radiorum refractionem producit, tamen lens ocularis exiguam quandam confu-

confuſionem huius generis generare debet, quae autem plerumque vix percipi poterit; interim tamen id teleſcopiorum genus hoc defectu etiam laborat, quod campus apparens multo minor ſit, quam in ſequentibus generibus, vnde vix conſultum videtur; huiusmodi teleſcopia, praecipue pro maioribus multiplicationibus conficere. Noſtras ergo lentes obiectiuas triplicatas ad ſequentia teleſcopiorum genera accommodemus.

DE

DE PERFECTIONE TELESCOPIORVM SECVNDI GENERIS SEV ASTRONOMICORVM, VNICAM IMAGINEM REALEM CONTINENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum vnica lens ocularis non ſufficiat, vt margo coloratus tolli poſſit, ſtatim duas lentes oculares introducamus, ita, vt cum lente obiectiua vicaria tres habeamus lentes, ex eadem vitri ſpecie, puta coronaria formatas, quarum diſtantiae focales ſint p, q et r, ideoque $p = \Phi$ et ſemidiameter aperturae primae lentis $= X$, at ſemidiameter aperturae ſecundae lentis $= \pi q$, tertiae vero $= \pi' r$; vbi litterae π et π' denotant denotant fractiones, ſiue poſitiuas, ſiue negatiuas, quadrantem vnitatis non ſuperantes; vnde pro campo apparente et multiplicatione $= m$ ſtatim habebimus, ſemidiametrum campi $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1}$. Hinc autem ſi ξ denotet maximam fractionem, quam litterae π et π' habere poſſunt, ponamus breuitatis gratia $\frac{\pi - \pi'}{m+1} = M\xi$.

§. 2. Sint iam pro noſtris tribus lentibus, diſtantiae determinatrices a, α; b, β; et c, γ eritque

1.

1°. $a = \infty$; $\alpha = p = \Phi$ et $\gamma = \infty$

hincque fiet

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \text{ ſiue } r = c,$$

hinc autem porro ſequentes litterae definiantur

$$P = -\frac{\alpha}{b} \text{ et } Q = -\frac{\beta}{c}$$

vnde pro data multiplicatione $= m$, ob ſitum inuerſum erit $PQ = -m$, ita, vt litterarum P et Q altera debeat eſſe poſitiua, altera negatiua; praeterea vero ponatur

$$B = \frac{\beta}{b} \text{ et } C = \frac{\gamma}{c} = \infty \text{ vnde fit}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C} = 1,$$

hinc autem viciſſim erit

$$b = -\frac{\alpha}{P},\ \beta = -\frac{B\alpha}{P};\ c = +\frac{B\alpha}{PQ} = -\frac{B\alpha}{m}$$

hincque porro

$$q = \mathfrak{B}\,b = -\frac{\mathfrak{B}\alpha}{P} \text{ et } r = \mathfrak{C}\,c = -\frac{B\alpha}{m}$$

ex quibus valoribus deducuntur interualla lentium

I°.; $I - II = \alpha + b = \alpha\,(1 - \frac{1}{P})$ et

II°; $II - III = \beta + c = -B\,\alpha\,(\frac{1}{P} + \frac{1}{m})$

quae ambo neceſſario debent eſſe poſitiua.

§. 3. Iam conſideremus campum adparentem; quem vt reddamus maximum ſtatim ſumamus

$$\pi = \xi \text{ et } \pi' = -\xi$$

vt fiat

$$\Phi = \frac{2\xi}{m+1} \text{ ideoque } M = \frac{2}{m+1}$$

 qui

qui valor cum in partibus radii ſit expreſſus, ob radium $1 = 3437$ min. ſumto $\xi = \frac{1}{4}$ erit $\Phi = \frac{1718}{m+1}$ minutis primis; nunc vero, pro margine colorato deſtruendo ſatisfieri oportet huic aequationi

$$0 = \frac{\pi}{P} - \frac{\pi'}{PQ} \text{ ſiue } \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} = 0$$

vnde fit

$$Q = -1 \quad \text{et } P = m$$

hinc autem deductae ſunt iſtae aequationes

$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = -P$ et $\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ$ quae ob $\pi = \xi$; $\pi' = -\xi$ et $\Phi = M\xi$ abeunt in has

$$\frac{\mathfrak{B} - M}{M} = -P \text{ et } -\frac{\mathfrak{C} - 1 + M}{M} = PQ = -m$$

quae poſterior, ob $\mathfrak{C} = 1$ praebet $M = \frac{1}{1+m}$ prorſus vt ante; ex illa vero reperitur

$$\mathfrak{B} = (1 - P)M = -\frac{2(m-1)}{m+1}$$

vnde fit

$$B = \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{B}} = -\frac{2(m-1)}{3m-1}$$

denique diſtantia oculi poſt vltimam lentem eſt

$$\frac{r}{Mm} = \frac{m+1}{2m} r.$$

§. 4. Nunc igitur omnia elementa, quibus conſtructio teleſcopii continetur, penitus ſunt determinata, quae ita ſe habebunt

$$\alpha = \Phi; \; b = -\frac{\alpha}{m}; \; \mathfrak{c} = +\frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}; \; c = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

vnde ſtatim prodeunt interualla lentium

$$I - II = \alpha\left(1 - \frac{1}{m}\right); \; II - III = \frac{4(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

diſtan-

diſtantiae denique focales erunt

$$p = \alpha;\ q = \frac{2(m-1)\alpha}{m(m+1)} \text{ et } r = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}.$$

§. 5. Formula autem pro confuſione tollenda quae ex apertura lentium oritur, ſi λ, λ' et λ'' denotent numeros arbitrarios, ſingulis lentibus reſpondentes, ita ſe habet

$$\lambda - \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)$$

vbi eſt vti vidimus

$$P = m \text{ et } PQ = -m,\ \mathfrak{B} = -\frac{2(m-1)}{m+1};\ B = -\frac{2(m-1)}{3m-1}$$

$$\mathfrak{C} = 1 \text{ et } C = \infty;$$

Quibus valoribus ſubſtitutis prodit iſta formula

$$\lambda + \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda'(m+1)^3}{8(m-1)^3} - \frac{\nu(m+1)(3m-1)}{4(m-1)^2}\right) + \frac{\lambda''(3m-1)^3}{8m(m-1)^3}.$$

Hinc ergo confuſio ex ſecunda et tertia lente nata quam littera Ω ſumus complexi erit

$$\Omega = \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda'(m+1)^3}{8(m-1)^3} - \frac{\nu(m+1)(3m-1)}{4(m-1)^2}\right) + \frac{\lambda''(3m-1)^3}{8m(m-1)^3}.$$

Quia autem his lentibus maximam aperturam tribuimus, cuius ſint capaces, numeri λ' et λ'' ex his formulis definiri debent

$$\sqrt{\lambda'-1} = \left(\frac{\sigma-\rho}{\tau}\right)\left(\mathfrak{B} - \frac{1}{2}\right) \text{ et } \sqrt{\lambda''-1} = \left(\frac{\sigma-\rho}{\tau}\right)\frac{1}{2}$$

vbi pro vitro coronario eſt

$$l\frac{\sigma-\rho}{\tau} = 0,1901924 \text{ et } l\nu = 9,3412366$$

inuento autem hoc numero Ω, ſupra oſtendimus, quemadmodum lens compoſita ſiue duplicata ſiue triplicata, loco lentis primae ſubſtituenda, determinari debeat; quo facto teleſcopium omnibus numeris erit

 abſo-

abſolutum. Quia autem hic in genere nihil definire licet, caſus aliquot pro datis multiplicationibus euolvamus.

Exemplum primum.

§. 6. Sit multiplicatio $m = 50$, erunt primo litterae

$$P = 50;\ Q = -1;\ \mathfrak{B} = -\tfrac{98}{51};\ \text{et}\ B = -\tfrac{98}{149}$$

hincque

$$l\,\mathfrak{B} = (-)\,0,2836559;\ l\,B = 9,8180389\,(-)$$

hinc igitur erunt diſtantiae determinatrices

$$\alpha = \Phi;\ b = -\tfrac{\alpha}{50} = -0,020.\alpha;\ \mathfrak{C} = 0,01316.\alpha;$$
$$c = 0,01316\,\alpha$$

vnde interualla lentium colliguntur

$$\text{I} - \text{II} = 0,980.\alpha\ \text{et}\ \text{II} - \text{III} = 0,02632.\alpha$$

diſtantiae denique focales

$$p = \alpha;\ q = 0,03843.\alpha\ \text{et}\ r = 0,01316.\alpha.$$

Quia igitur binae lentes poſteriores vtrinque ſunt aeque conuexae, erit radius vtriusque faciei ſecundae lentis

$$= 1,06\,q = 0,04071\,\alpha$$

et tertiae lentis

$$= 1,06\,r = 0,01394.\alpha,$$

at locus oculi poſt lentem tertiam

$$= 0,00671.\alpha,$$

denique ſemidiameter campi adparentis $= 33'.\ 41''$.

§ 7.

§. 7. Nunc igitur quaerantur numeri λ' et λ'', et quia eſt

$$\mathfrak{B} = -1,92157 \text{ erit } \mathfrak{B} - \tfrac{1}{2} = -2,42157$$

vnde calculus ita ſe habebit:

$l\left(\frac{\sigma-\varrho}{\tau}\right) = 0,1901924$	$l\left(\frac{\sigma-\varrho}{\tau}\right) = 0,1901924$
$l(\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}) = 0,3830971$	$l\,2 = 0,3010300$
$l\sqrt{\lambda' - 1} = 0,5732895$	$l\sqrt{\lambda'' - 1} = 9,8891624$
$l(\lambda' - 1) = 1,1465790$	$l(\lambda'' - 1) = 9,7783248$
hinc $\lambda' = 15,01455$	hincque $\lambda'' = 1,60024$

quia igitur eſt

$$l\tfrac{1}{P} = 8,3010300\,;\ l\mathfrak{B}^2 = 0,8509677\ (-)$$

et $lB\mathfrak{B} = 0,1016957$ tum vero $l\frac{-1}{\mathfrak{B}^3 m} = 8,8469806$

hinc calculus pro littera Ω ita inſtituatur

$l\frac{1}{m} = 8,3010300$	$l\frac{1}{P} = 8,3010300$	$l\frac{-1}{B^3 m} = 8,8469806$
$l\lambda' = 1,1765112$	$l\nu = 9,3412366$	$l\lambda'' = 0,2041851$
$9,4775412$	$7,6422666$	$9,0511657$
$l\mathfrak{B}^2 = 0,8509677$	$lB\mathfrak{B} = 0,1016957$	Pars III $= 0,11250$
$8,6265735$	$7,5405709$	
Pars I $= 0,04232$	Pars II $= -0,00347$	

vnde colligitur numerus $\Omega = 0,15135$.

§. 8. Adhibeamus ſtatim lentem obiectiuam triplicatam poſtremam, vtpote perfectiſſimam, cuius diſtantia focalis ſit $= \Pi$, ac ſupra vidimus fore

$$\Phi = 1,02311\,\Pi = \alpha$$

et $X = x$; tum vero pro prima lente erit numerus arbitrarius

$$\lambda = 2,50862 - 0,08257\,\Omega = 2,49612,$$

vnde patet, ob confuſionem ω, numerum λ tam parum immutari, vt effectus in conſtructione lentis prorſus euadat inſenſibilis, vnde tuto aſſumere poterimus

$$\lambda = 2,50862$$

ita vt huius lentes conſtructio futura ſit

Radius faciei anterioris $= 0,85048\,\Pi$
Radius faciei poſterioris $= 0,32689\,\Pi$.

Cum igitur hic ſit $m = 50$, ſi capiamus

$\Pi = 12\frac{1}{2} = 12,50$ dig. erit $a = 12,789$ dig.

hincque deducitur ſequens.

CONSTRVCTIO

Tab. IV. Fig. 3. Tubi aſtronomici pro multiplicatione $m = 50$.

1°. Lens igitur obiectiua eſt triplicata, diſtantiam focalem habens $= 12\frac{1}{2}$ dig. et aperturae ſemidiametrum $= 1$ dig.

1°. Eius prima lens coronaria diſtantiam focalem habet $= 5,569$ dig. et ita conſtruatur vt ſit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 10,631 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 4,036 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. Ab huius medio, ad medium ſecundae ſtatuatur interuallum $= 0,283$ dig.

3°. Secunda lens cryſtallina vtrinque aeque concaua, diſtantiam focalem habet $= -3,398$ dig. et radium vtriusque faciei $= -3,942$.

4°.

4°. Ab huius medio, vsque ad medium lentis tertiae ſtatuatur interuallum $= 0, 283$.

5°. Tertiae lentis coronariae diſtantia focalis eſt $= 5, 505$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 5, 836$ dig.

II. Ab hac lente vsque ad lentem quartam ſeu primam ocularem interuallum eſt $= 12, 244$.

1°. Iſtius lentis coronariae vtrinque aequaliter conuexae diſtantia focalis $= 0, 491$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 0, 520$ dig. et ſemidiameter aperturae $= 0, 123$ dig.

2°. Hinc vsque ad lentem vltimam diſtantia $= 0,337$ digitor.

III. Haec autem lens coronaria vtrinque, aeque conuexa diſtantiam habet focalem $= 0, 168$ dig.

Radium vtriusque faciei $= 0, 178$ dig.

et ſemidiametrum aperturae $= 0, 042$ dig.

Ab hac lente vsque ad oculum diſtantia $= 0, 086$ dig.

Longitudo totius teleſcopii $= 13, 516$.

Semidiameter campi adparentis $= 33\frac{2}{3}'$, qui apparebit inſtar ſpatii circularis in coelo, cuius radius $= 26°. 3'$ ideoque diameter $= 52°. 6'$.

§. 9. Circa tubum autem ſequentia ſunt notanda: primo quod lens ocularis prodierit nimis parva, id quod in praxi non ſatis commodum videtur; deinde lens penultima nimis videtur propinqua foco lentis obiectiuae, ſcilicet vnius tantum quadrantis digiti

giti; vnde verendum eſt, ne maculae vel ſtriae huius lentis cum repreſentatione obiecti miſceantur. Praeterea vero, vt totus campus apparens vbique aeque lucidus videatur, non ſufficit vt ſemidiameter huius lentis ſit $= \pi q$, ſed requiritur vt is ſit $= \pi q + \frac{x}{m}$. His igitur incommodis, vt remedium, afferatur de campo adparente aliquid eſt remittendum quod, fit ſi loco π non valorem maximum ξ accipiamus, ſed tantum eius partem quandam, veluti $\pi = \frac{1}{2}\xi$, manente $\pi' = -\xi$ ſicque erit

$$\Phi = \frac{\frac{3}{2}\xi}{m+1} \quad \text{et} \quad M = \frac{\frac{3}{2}}{m+1} = \frac{3}{2(m+1)}.$$

§. 10. Poſito igitur $\pi = \frac{1}{2}\xi$ et $\pi' = -\xi$, aequatio pro margine colorato tollendo erit

$$0 = \frac{1}{2P} + \frac{1}{PQ}, \text{ vnde fit } Q = -2 \text{ ergo } P = \frac{m}{2}$$

deinde reperitur

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{m+1}{3} \text{ ideoque } \frac{\mathfrak{B}(m+1)}{3} - 1 = -\frac{m}{2} \text{ ideoque}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{3 - \frac{3}{2}m}{m+1} = \frac{6-3m}{2(m+1)} \text{ hincque } B = \frac{6-3m}{5m-4}$$

ſequentes igitur habebimus determinationes

$$b = -\frac{2\alpha}{m};\; \mathfrak{C} = \frac{(6m-12)}{m(5m-4)}\alpha;\; c = \frac{(3m-6)\alpha}{m(5m-4)}$$

diſtantiae focales

$$p = \alpha;\; q = \frac{(3m-6)\alpha}{m(m+1)} \text{ et } r = \frac{(3m-6)\alpha}{m(5m-4)}$$

hinc autem, etſi ſecundae lenti conſulitur, tamen lens ocularis adhuc fit minor quam ante, vnde hac emendatione ſuperſedebimus.

§. 11.

§. 11. Quia confuſio a lentibus ocularibus oriunda, vix quicquam in lente obiectiua immutat, vel ſaltem in praxi obſeruari nequit: conſtructionem horum teleſcopiorum pro omni multiplicatione in genere tradere poterimus. Vtamur igitur iterum lente triplicata poſtrema, cui tribuimus ſtatim diſtantiam focalem $\Pi = \frac{m}{4}$, et ſemidiametrum aperturae $= \frac{m}{50}$ dig. vnde colligimus

$$\Phi = \alpha = 0,25578\, m \text{ dig.}$$

qui numerus cum in ſequentibus lentibus vbique occurrit, ponamus breuitatis gratia

$$\vartheta = 0,25578 \text{ vt ſit } \alpha = \vartheta m \text{ et } l\vartheta = 9,4078666.$$

Quia igitur eſt $\frac{\alpha}{m} = \vartheta$, et ſecunda lens tanto intervallo ante primam imaginem conſtituitur, erit diſtantia a lente obiectiua vsque ad primam ocularem $= \frac{m}{4} - \vartheta$ digitis; tum vero haec lens ocularis habebit diſtantiam focalem $= \frac{2\vartheta(m-1)}{m+1}$, quae expreſſio, ob m numerum praegrandem, reducitur ad hanc $2\vartheta - \frac{4\vartheta}{m}$ quae in 1,06 ducta, dabit radium vtriusque faciei; deinde interuallum ab hac lente ad ipſam ocularem erit $\frac{4\vartheta(m-1)}{3m-1} = \frac{4}{3}\vartheta - \frac{8\vartheta}{9m}$ dig. tum vero diſtantia focalis vltimae lentis $= \frac{2}{3}\vartheta - \frac{4\vartheta}{9m}$, quae denuo in 1,06 ducta, praebet radium faciei huius lentis, poſt quam oculus collocari debet ad diſtantiam $= \frac{m+1}{2m} r = \frac{1}{3}\vartheta + \frac{\vartheta}{9m}$, campi autem adparentis ſemidiameter erit $= \frac{1718}{m+1}$ min.

CONSTRVCTIO GENERALIS

horum teleſcopiorum pro multiplicatione quacunque $= m$.

I. Lens obiectiua conſtat ex tribus lentibus, habens diſtantiam focalem $= \frac{m}{4}$ dig. et aperturam ſemidiametri $= \frac{m}{50}$ dig. ternae autem eius lentes ita determinantur.

1°. Primae lentis coronariae diſtantia focalis ſit $= 0,11137\, m$ dig.

Tum vero radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,21262.\, m \\ \text{poſterioris} = 0,08172.\, m \end{cases}$

2°. A medio huius lentis ad ſequentem, ſtatuatur interuallum $= 0,00566.\, m$.

3°. Secundae lentis cryſtallinae concauae diſtantia focalis eſt $= -0,06796.\, m$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,07883.\, m$ dig.

4°. A medio huius lentis ad tertiam, interuallum eſto $= 0,00566.\, m$ dig.

5°. Tertiae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis $= 0,11010.\, m$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 0,11671.\, m$ dig.

II. Ab hac lente obiectiua vsque ad lentem quartam, ſtatuatur interuallum $= \frac{1}{4} m - \vartheta$ dig.

III. Quartae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= 2\vartheta - \frac{4\vartheta}{m}$ et

Radius vtriusque faciei $= 1,06 (2\vartheta - \frac{4\vartheta}{m})$.

IV. Hinc vsque ad lentem vltimam eſt interuallum $= \frac{4}{3}\vartheta - \frac{8\vartheta}{9m}$.

V. Vltimae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= \frac{2}{3}\vartheta - \frac{4\vartheta}{9m}$ et radius vtriusque faciei $= 1,06(\frac{2}{3}\vartheta - \frac{4\vartheta}{9m})$.

VI. Ab hac lente ad oculum diſtantia $= \frac{1}{3}\vartheta + \frac{\vartheta}{9m}$.

VII. Semidiameter campi apparentis $= \frac{1718}{m+1}$ min.

VIII. Longitudo tubi $= \frac{1}{4}m + \frac{2}{3}\vartheta - \frac{7\vartheta}{9m}$ dig.

§. 12. Quoniam in conſtructione lentis obiectiuae triplicatae menſuras praeſcriptas exactiſſime exſequi vix licet, imprimis autem interualla harum lentium accuratiſſime in praxi definiri nequeunt, maxime conſultum erit: has ternas lentes ita capſulae idoneae includere, vt, ope cochlearum tantillum promoueri, vel a ſe inuicem remoueri queant, donec repreſentatio diſtinctiſſima obtineatur. Caeterum per ſe intelligitur, etiam vltimam lentem mobilem relinqui debere, vt ad indolem cuiusque-oculi adcommodari poſſit.

DE VLTERIORI horum teleſcopiorum perfectione, vnica inſuper lente oculari adiiciendo.

§. 13. Praeter primam igitur lentem vicariam, cuius diſtantia focalis $\Phi = p = \alpha$, tres habebimus lentes, quarum diſtantiae focales ſint q, r et s, quibus reſpondeant diſtantiae determinatrices

b, $\mathfrak{b}$, c, γ et d, δ; vbi $\delta = \infty$

ita vt ſit

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \text{ et } \frac{1}{s} = \frac{1}{d} \text{ ſiue } s = d$$

tum vero ponatur

$$P = -\frac{\alpha}{b}; \quad Q = -\frac{\beta}{c} \quad \text{et } R = -\frac{\gamma}{d}$$

atque ob multiplicationem datam $= m$, debebit eſſe $PQR = -m$, ſicque litterarum P, Q et R vna debet eſſe negatiua; praeterea ponatur

$$\beta = Bb; \quad \gamma = Cc$$

hincque porro

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} \quad \text{et } \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C}$$

ita vt ſit

$$q = \mathfrak{B}b; \quad r = \mathfrak{C}c \text{ et } s = d$$

ex his autem litteris viciſſim erit

$$b = -\frac{\alpha}{P}; \quad c = \frac{B\alpha}{PQ}; \quad d = -\frac{BC\alpha}{PQR}$$

$$\beta = -\frac{B\alpha}{P}; \quad \gamma = \frac{BC\alpha}{PQ}; \quad \delta = \infty$$

vnde interualla lentium erunt

$$I - II = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right); \quad II - III = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right);$$

$$III - IV = \frac{BC\alpha}{PQ}\left(1 - \frac{1}{R}\right).$$

§. 14. Quod ſi iam ſemidiametri aperturarum ternarum lentium ſtatuantur:

πq; $\pi' r$ et $\pi'' s$ erit

ſemidiameter campi adparentis $\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{m+1}$

tum vero erit

$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi}$

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = P \quad \text{ſiue} \quad \mathfrak{B} = \frac{\Phi(1-P)}{\pi}$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ \qquad \mathfrak{C} = \frac{\Phi(PQ-1)+\pi}{\pi'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = -PQR; \; \mathfrak{D} = \frac{\Phi(1-PQR)-\pi+\pi'}{\pi''}$$

ex quibus valoribus viciſſim colligimus

$B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$; $C = \frac{\mathfrak{C}}{1-\mathfrak{C}}$; $D = \frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}} = \infty$, ob $\mathfrak{D} = 1$ ſicque omnia elementa per litteras P, Q et R erunt expreſſa; vbi ante omnia requiritur vt interualla lentium prodeant poſitiua.

§. 15. Iam ſi ξ fuerit maximus valor, quem litteris π, π' et π'' tribuere licet, pro quo aſſumi poteſt $\xi = \frac{1}{4}$; vt maximum campum adparentem obtineamus, ſtatuamus

$$\pi = \xi; \; \pi' = -\xi \text{ et } \pi'' = +\xi$$

vt prodeat

$$\Phi = \frac{3\xi}{m+1} \text{ vnde fit } M = \frac{3}{m+1} \text{ et } \Phi = M\xi$$

hinc igitur ſumendo $\xi = \frac{1}{4}$, in minutis primis fiet

$$\Phi = \frac{3 \cdot 3437}{4(m+1)} \text{ min.} = \frac{2578}{m+1} \text{ min.}$$

Ex his igitur valoribus nanciſcimur

$$\mathfrak{B} = (1-P)M; \; \mathfrak{C} = M(1-PQ)-1; \; \mathfrak{D} = M(m+1)-2 = 1$$

vti primae conditiones requirunt.

§. 16. Pro margine autem colorato tollendo huic aequationi ſatisfieri opportet

$$\frac{\pi}{P} - \frac{\pi'}{PQ} + \frac{\pi''}{PQR} = 0$$

quae ergo abit in hanc

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} = 0 \text{ ſiue in hanc } 1 + \frac{1}{Q} + \frac{1}{QR} = 0$$

 cum

cum nunc litterarum P, Q et R vna debeat eſſe negatiua, ſit

$$Q = -k, \text{ eritque } 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{kR} = 0$$

vnde reperitur

$$R = \frac{1}{k-1}; \text{ ſicque fiet } PQR = -\frac{Pk}{(k-1)} = -m$$

ideoque $P = \frac{m(k-1)}{k}$, vbi notandum, vt R fiat poſitiuum eſſe debere $k > 1$; qua conditione etiam littera P fiet poſitiua; hinc igitur nanciſcimur

$$\mathfrak{B} = M(1 - \frac{m(k-1)}{k} = \frac{3k - 3m(k-1)}{k(m+1)}.$$

$$\mathfrak{C} = M(1 + m(k-1)) - 1 = \frac{2 + m(3k-4)}{m+1}.$$

§. 17. Hic primo patet, litteram $\mathfrak{B}$ eſſe negatiuam, vnde etiam B erit numerus negatiuus; deinde etiam numerus $\mathfrak{C}$ erit poſitiuus, dummodo non fuerit $3k < 4$, hincque erit

$$C = \frac{2 + m(3k-4)}{m(5-3k) - 1}$$

qui numerus eſt poſitiuus ſi fuerit $3k < 5$, ſiue $k < \frac{5}{3}$ attamen $k > \frac{4}{3}$; ſin autem eſſet $k < \frac{4}{3}$, numerator foret negatiuus, et denominator maneret poſitiuus, ideoque hoc caſu C fieret negatiuum; hinc interualla lentium ita ſe habebunt

$$I - II = \alpha\left(1 - \frac{k}{m(k-1)}\right)$$

quod certe eſt poſitiuum ob $k > 1$

$$II - III = -\frac{Bk\alpha}{m(k-1)}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

quod vt fiat poſitiuum, littera B debet eſſe negatiua, quod fit ſi fuerit $k > \frac{4}{3}$

$$III - IV = -\frac{BC\alpha'}{m(k-1)}(2 - k)$$

quia

quia nunc $-B$ eſt quantitas poſitiua, relinquitur vt ſit $C(2-k)$ poſitiuum, vnde patet ſi fuerit $k < 2$ tum C debere eſſe poſitiuum; ſin autem eſſet $k > 2$ tum C eſſe debere negatiuum, id quod ſponte accidit.

Caſus I. §. 18. Hic ergo duo caſus occurrunt, prout k fuerit vel < 2 vel > 2; ſit igitur primo $k < 2$ atque vt C fiat poſitiuum, eſſe debebit

$k > \frac{4}{3}$ et $k < \frac{5}{3}$.

Caſus II. At ſi $k > 2$, tum C fiat negatiuum. Operae igitur pretium erit hos caſus exemplo illuſtraſſe.

Caſus prior

quo $k > \frac{4}{3}$ et $< \frac{5}{3}$.

§. 19. Sumamus igitur $k = \frac{3}{2}$ erit $P = \frac{1}{3}m$; $Q = -\frac{3}{2}$ et $R = 2$; porro

$$\mathfrak{B} = \frac{3-m}{m+1} = -\frac{(m-3)}{m+1} \text{ et } B = \frac{3-m}{2m-2} \quad \mathfrak{C} = \frac{4+m}{2(m+1)}$$
$$\text{et } C = \frac{4+m}{m-2}$$

hinc autem interualla lentium prodeunt:

$$\text{I} - \text{II} = \alpha\left(1 - \frac{3}{m}\right)$$
$$\text{II} - \text{III} = \frac{5(m-3)}{2m(m-1)}\alpha$$
$$\text{III} - \text{IV} = \frac{(m-3)(m+4)}{2m(m-1)(m-2)}\alpha$$

quae ergo omnia ſunt poſitiua; deinde vero habebimus

$$b = -\frac{3\alpha}{m}; \quad \mathfrak{b} = +\frac{3(m-3)\alpha}{2m(m-1)}; \quad c = \frac{(m-3)\alpha}{m(m-1)};$$
$$\gamma = \frac{(m-3)(m+4)\alpha}{m(m-1)(m-2)}; \quad d = -\frac{(m-3)(m+4)\alpha}{2m(m-1)(m-2)}$$

hinc-

hincque colliguntur diſtantiae focales

$$q = \frac{3(m-3)}{m(m+1)}\alpha; \quad r = \frac{(m-3)(m+4)\alpha}{2m(m-1)(m+1)}; \quad s = -\frac{(m-3)(m+4)\alpha}{2m(m-1)(m-3)}$$

ſicque vltima lens fieret concaua, vnde diſtantia oculi etiam prodiret negatiua, ita, vt campum adparentem nequidem tueri liceret.

Caſus poſterior

quo $k > 2$.

§. 20. Sit igitur $k = \frac{5}{2}$ erit $P = \frac{3m}{5}$; $Q = -\frac{6}{2}$ et $R = \frac{2}{3}$ porro fit

$$\mathfrak{B} = \frac{15-9m}{5m+5} \text{ et } B = \frac{15-9m}{14m-10}; \quad \mathfrak{C} = \frac{4+7m}{2m+2}; \quad C = -\frac{(4+7m)}{5m+2}$$

deinde vero

$$b = -\frac{5\alpha}{3m}; \quad \beta = \frac{5(3m-5)}{m(14m-10)}\alpha; \quad c = \frac{(3m-5)}{m(7m-5)}\alpha;$$

$$\gamma = -\frac{(3m-5)(7m+4)}{m(7m-5)(5m+2)}\alpha; \quad d = +\frac{3(3m-5)(7m+4)}{2m(7m-5)(5m+2)}\alpha$$

hinc interualla lentium

$$\text{I} - \text{II} = \alpha\left(1 - \frac{5}{3m}\right); \quad \text{II} - \text{III} = \frac{7(3m-5)}{m(14m-10)}\alpha;$$

$$\text{III} - \text{IV} = \frac{(3m-5)(7m+4)}{2m(7m-5)(5m+4)}\alpha$$

denique diſtantiae focales

$$q = \frac{3m-5)}{m(m+1)}\alpha; \quad r = \frac{(7m+4)(3m-5)}{2m(m+1)(7m-5)}\alpha; \quad s = \frac{3(3m-5)(7m+4)}{2m(7m-5)(5m+2)}\alpha.$$

§. 21. Quoniam igitur hic caſus ad praxin videtur accommodatus, ſumamus quoque $k = 3$ eritque

$P = \frac{2m}{3}$; $Q = -3$ et $R = \frac{1}{2}$ hinc

$$\mathfrak{B} = \frac{3-2m}{m+1}; \quad B = \frac{3-2m}{3m-2}; \quad \mathfrak{C} = \frac{2+5m}{m+1}; \quad C = -\frac{(2+5m)}{4m+1}$$

porro

porro vero

$$b = -\frac{3\alpha}{2m};\ \mathfrak{B} = \frac{3(2m-3)}{2m(3m-2)}\alpha;\ c = \frac{(2m-3)}{2m(3m-2)}\alpha;$$

$$\gamma = -\frac{(2+5m)(2m-3)}{2m(4m+1)(3m-2)}\alpha;\ d = \frac{(2+5m)(2m-1)}{m(4m+1)(3m-2)}\alpha$$

et interualla lentium

$$I - II = \alpha\left(1 - \frac{3}{2m}\right);\ II - III = \frac{2(2m-1)}{m(3m-2)}\alpha;$$

$$III - IV = \frac{(2+5m)(2m-3)}{2m(4m+1)(3m-2)}\alpha$$

at diſtantiae focales erunt

$$q = \frac{3(2m-3)}{2m(m+1)}\alpha;\ r = \frac{(2+5m)(2m-1)}{2m(m+1)(3m-2)}\alpha;\ s = \frac{(5m+2)(2m-1)}{m(4m+1)(3m-2)}\alpha.$$

§. 22. Huic autem caſui poſtremo, precedens quo $k = \frac{5}{3}$ merito anteſertur; quia pro vltima lente maiorem praebet diſtantiam focalem, vnde operae pretium erit eum ad praxin accommodare; id quod facile vt ſupra in genere praeſtabitur: dum loco lentis obiectiuae lens illa triplicata perfectiſſima praefigitur. Sumta ſcilicet diſtantia focali $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. et $x = \frac{m}{50}$ dig. tum vero poſito vt ante $\vartheta = 0,25578$ capi debet $\alpha = \vartheta m$ dig. exiſtente $l\vartheta = 9,4078666$; quia autem ex ternis lentibus poſterioribus maior confuſio naſci poteſt, prima lens quadam correctione egebit, vnde pro eius conſtructione ſtatuamus

$$\text{Radium faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0,21262.\,m + \mathfrak{f} \\ \text{poſterioris} = 0,08172.\,m + \mathfrak{g} \end{cases}$$

vbi quantitates $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ ex vnico exemplo definire licebit.

§. 23. Sumamus igitur multiplicationem $m = 50$, indeque computentur ſequentes valores numerici

$P = 30$	$lP = (+)1,4771213$	
$PQ = -75$	$lPQ = (-)1,8750613$	
$PQR = -50$	$lPQR = (-)1,6989700$	
	$l\mathfrak{B} = (-)0,2319491$	$l\mathfrak{B}^3 = (-)0,6958473$
$\mathfrak{B} = -\frac{29}{17}$	$lB = (-)9,7996402$	$lB^3 = (-)9,3989206$
	$lB\mathfrak{B} = (+)0,0315893$	
$B = -\frac{29}{45}$	$l\mathfrak{C} = (+)0,5404031$	$l\mathfrak{C}^3 = (+)1,6212093$
$\mathfrak{C} = \frac{59}{17}$	$lC = (-)0,1476027$	$lC^3 = (-)0,4428081$
$C = -\frac{59}{42}$	$l\mathfrak{C}C = (-)0,6880058$	

§. 24. Iam pro tribus lentibus poſtremis, quia vtrinque debent eſſe aeque conuexae, quaerantur numeri reſpondentes λ', λ'' et λ''' ex formulis

$$\sqrt{\lambda'-1} = \frac{(\sigma-\varrho)}{\tau}(\mathfrak{B}-\tfrac{1}{2});\quad \sqrt{\lambda''-1} = \frac{(\sigma-\varrho)}{\tau}(\mathfrak{C}-\tfrac{1}{2})$$

$$\text{et } \sqrt{\lambda'''-1} = \frac{(\sigma-\varrho)}{\tau}\cdot\frac{1}{2},$$

quia igitur

$$\mathfrak{B}-\tfrac{1}{2} = -\tfrac{75}{34} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}-\tfrac{1}{2} = \tfrac{101}{34}$$

inde calculus ita ſe habebit

$l\left(\frac{\sigma-\varrho}{\tau}\right)$	$= 0,1901924$	$l\left(\frac{\sigma-\varrho}{\tau}\right)$	$= 0,1901924$
$l\,75$	$= 1,8750613$	$l\,101$	$= 2,0043214$
	$2,0652537$		$2,1945138$
$l\,34$	$1,5314789$	$l\,34$	$= 1,5314789$
$l\sqrt{\lambda'-1}$	$= 0,5337748$	$l\sqrt{\lambda''-1}$	$= 0,6630349$
$l(\lambda'-1)$	$= 1,0675496$	$l(\lambda''-1)$	$= 1,3260698$
hinc λ'	$= 12,68290$	hinc λ''	$= 22,18700$

At pro vltima lente erit vt ante $\lambda''' = 1,60024$

§. 25. Nunc autem pro calculo confuſionis ponamus breuitatis gratia

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^3 P Q} = M \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\mathfrak{B}^3 \mathfrak{C}^3 P Q R} = N$$

vt fiat

$$\Omega = -\tfrac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + M\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) + N\lambda'''$$

vbi ergo erit

$l\frac{1}{P} = 8,5228787$; $lM = 8,7260181$; $lN = 8,4593013$

vnde calculus ita ſe habebit

$l\frac{-1}{P} = (-)\,8,5228787$	$lM = 8,7260181$	$lN = 8,4593013$
$l\lambda' = 1,1032186$	$l\lambda'' = 1,3450986$	$l\lambda''' = 0,2041851$
$(-)\,9,6260973$	$0,0711167$	$8,6634864$
$l\mathfrak{B}^3 = (-)\,0,6958473$	$l\mathfrak{C}^3 = 1,6212093$	ideoque $0,04608$
$(+)\,8,9302500$	$8,4499074$	
ergo $+\,0,08516$	ergo $+\,0,02818$	

$l-\frac{1}{P} = (-)\,8,5228787$	$lM = 8,7260181$
$l\nu = (+)\,9,3412366$	$l\nu = 9,3412366$
$(-)\,7,8641153$	$8,0672547$
$lB\mathfrak{B} = (+)\,0,0315893$	$lC\mathfrak{C} = (-)\,0,6880058$
$(-)\,7,8325260$	$(-)\,7,3792489$
ergo $(-)\,0,00680$	ideoque $= (-)\,0,00239$

hinc igitur erit $\Omega = 0,15023$.

§. 26. Hoc igitur valore inuento erit pro prima ternarum lentium obiectiuarum

$$\lambda = 2,50862 - 0,08257\,\Omega \text{ ſiue } \lambda = 2,49622$$

hinc

hinc

$$\lambda - 1 = 1,49622 \text{ et } \sqrt{\lambda - 1}, 22320,$$

quocirca pro radio faciei anterioris iſtius lentis erit denominator $= 0,57122$; numerator autem erat

$$= 0,48154\,\Pi = 6,0190$$

vnde radius huius faciei fit $= 10,5371$, quem ſupra ſuppoſuimus

$$= 0,21262.\,m + \mathfrak{f} = 10,631 + \mathfrak{f}$$

vnde concludimus $\mathfrak{f} = -0,094$ dig.

§. 27. Simili modo pro facie poſteriore erit denominator $1,46812$; numerator vero manet vt ante $= 6,0190$, vnde ipſe radius colligitur $= 4,0998$ dig. quem ſuppoſuimus ante

$$= 0,08172.\,m + \mathfrak{g} = 4,086 + \mathfrak{g}$$

vnde concluditur fore $\mathfrak{g} = 0,0138$. Nunc igitur demum certi ſumus, hanc correctionem tam eſſe paruam, vt omnem induſtriam artificis effugiat.

§. 28. Proſequamur igitur conſtructionem huius teleſcopii, quod omnibus numeris abſolutum videri poteſt; et cum ſit $\alpha = \vartheta m$, exiſtente $\vartheta = 0,25578$: ſecunda lens ante imaginem lentis obiectiuae ſtatui debet interuallo $= -b = \frac{5}{7}\vartheta$ dig. ideoque poſt lentem obiectiuam triplicatam ſecunda lens collocari debet ad diſtantiam $= \frac{1}{4}m - \frac{5}{7}\vartheta$; deinde diſtantia huius ſecundae lentis a tertia erit

$$= \frac{7\vartheta(2m - 5)}{14m - 10} = \frac{1}{2}\vartheta - \frac{10\vartheta}{7m}$$

at

at diſtantia tertiae lentis ad quartam

$$= \frac{(3m-5)(7m+4)\vartheta}{2(7m-5)(5m+4)} = \tfrac{3}{10}\vartheta - \tfrac{62}{175m}\vartheta$$

tum vero erit ſecundae lentis diſtantia focalis

$$= \frac{(3m-5)\vartheta}{m+1} = 3\vartheta - \frac{8\vartheta}{m}\ \text{dig.}$$

tertiae autem lentis diſtantia focalis

$$= \frac{(7m+4)(3m-5)}{2(m+1)(7m-5)}\vartheta = \tfrac{3}{2}\vartheta - \tfrac{29}{14m}\vartheta$$

vltimae denique lentis diſtantia focalis eſt

$$= \frac{3\vartheta(3m-5)(7m+4)}{2(7m-5)(5m+2)} = \tfrac{9}{10}\vartheta - \tfrac{186}{175m}\vartheta$$

denique diſtantia oculi

$$= \frac{m+1}{3m}s = \tfrac{3}{10}\vartheta - \tfrac{19}{350m}\vartheta$$

et ſemidiameter campi adparentis $= \frac{2578\,m}{m+1}$; qui apparebit inſtar ſpatii circularis in coelo, cuius ſemidiameter eſt $36°.\ 33'$ ideoque diameter $= 73°.\ 6'$.

CONSTRVCTIO GENERALIS

Tuborum Aſtronomicorum, perfectiſſimorum, ſex lentibus inſtructorum, pro multiplicatione quacunque *m*.

I. Lens obiectiua conſtat ex tribus lentibus, habens diſtantiam focalem $= \frac{m}{4}$ dig. et aperturam ſemidiametri $= \frac{m}{50}$ dig. ternae autem lentes ita determinantur. Tab. IV. Fig. 4.

1°. Primae lentis coronariae diſtantia focalis ſit $= 0,11137.\,m$ dig.

Tum vero radius faciei $\begin{cases}\text{anterioris} = 0,21262.\,m - 0,094\ \text{dig.}\\ \text{poſterioris} = 0,08172.\,m + 0,014\ \text{dig.}\end{cases}$

2°. A medio huius lentis vſque ad medium ſequentis, ſtatuatur interuallum $= 0,00566.\,m$.

3°. Secundae lentis cryſtallinae diſtantia focalis $= -0,06796.\,m$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,07883.\,m$ dig.

4°. A medio huius, ad ſequentem interuallum $= 0,00566\,m$.

5°. Tertiae lentis coronariae diſtantia focalis $= 0,11010\,m$ et

Radius vtriusque faciei eſto $= +0,11671\,m$ digit.

II. Ab hac lente obiectiua vſque ad lentem quartam, ſtatuatur interuallum $\frac{1}{4}m - 0,426$ digit.

III. Quartae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= 0,767 - \frac{2,045}{m}$ dig. et radius vtriusque faciei $= 0,813 - \frac{2,167}{m}$ dig.

IV. Hinc vſque ad quintam, interuallum eſto $= 0,383 - \frac{0,165}{m}$ dig.

V. Huius lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= 0,383 - \frac{0,529}{m}$ dig. et radius vtriusque faciei $= 0,406 - \frac{0,561}{m}$ dig.

VI. Hinc, ad lentem vltimam interuallum $= 0,076 - \frac{0,090}{m}$ dig.

VII. Vltimae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis $= 0,230 - \frac{0,270}{m}$ dig. et radius vtriusque faciei $= 0,244 - \frac{0,256}{m}$ dig.

VIII.

VIII. Hinc, vſque ad oculum interuallum ſtatuatur $= 0,076 - \frac{0,005}{m}$.

IX. Semidiameter campi adparentis $= \frac{2578}{m+1}$ min. qui inſtar ſpatii circularis in coelo cernetur, cuius diameter $= 73^{\circ}.\ 6.$ min.

Caeterum tribus lentibus poſtremis tanta tribuatur apertura, quantam per figuram admittunt, cuius ſemidiameter circiter eſt pars quarta diſtantiae focalis cuiusque lentis. Denique, quia hic binae lentes poſtremae reuera vicem gerunt lentis ocularis: conſultum erit, eas ambas eidem capſulae mobili includere quae ad indolem cuiusque oculi adcommodari poſſit.

DE PERFECTIONE TELESCOPIORVM TERTII GENERIS, DVAS IMAGINES REALES CONTINENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quia pro hoc genere tres lentes non ſufficiunt, ſtatim conſideremus quatuor: quarum diſtantiae focales ſint p, q, r, s et ex earum diſtantiis determinatricibus vt ante formemus has quantitates:

$$P = -\frac{\alpha}{b}; \; Q = -\frac{\beta}{c} \quad \text{et} \quad R = -\frac{\gamma}{d}$$

quarum productum PQR aequetur multiplicationi m poſitiue ſumtae, quia repreſentatio debet eſſe erecta, ita vt ſit $PQR = m$; et quia duae imagines requiruntur reales, litterarum P, Q et R, duas negatiuas eſſe opportet. Porro autem ſtatuamus vt ante

$$B = \frac{\beta}{b}; \; C = \frac{\gamma}{c} \quad \text{et} \quad D = \frac{\delta}{d} = \infty, \text{ ob } \delta = \infty$$

hincque fiat

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B}; \; \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C} \text{ et } \mathfrak{D} = \frac{D}{1+D} = 1$$

ex quibus colliguntur viciſſim diſtantiae determinatrices

$b = -$

$b = -\frac{\alpha}{P}$; $c = \frac{B\alpha}{PQ}$; $d = -\frac{BC\alpha}{PQR} = -\frac{BC\alpha}{m}$

$\beta = -\frac{B\alpha}{P}$; $\gamma = \frac{BC\alpha}{PQ}$; $\delta = \infty$

vnde colliguntur interualla lentium

$$I - II = \alpha + b = \alpha(1 - \tfrac{1}{P})$$

$$II - III = \beta + c = -\tfrac{B\alpha}{P}(1 - \tfrac{1}{Q})$$

$$III - IV = \gamma + d = \tfrac{BC\alpha}{PQ}(1 - \tfrac{1}{R})$$

quae omnia debent eſſe poſitiua,

denique diſtantiae focales hinc ita definiuntur

$$p = \alpha;\quad q = \mathfrak{B}\, b;\quad r = \mathfrak{C}\, c \quad \text{et} \quad s = d.$$

§. 2. Cum nunc primae lentis ſemidiameter aperturae ſit $= X$, ponatur ſemidiameter aperturae ſecundae lentis $= \pi q$, tertiae lentis $= \pi' r$, et quartae lentis $= \pi'' s$: vbi litterae π, π' et π'' denotant fractiones, quartam partem vnitatis non ſuperantes, ſiue poſitiuas ſiue negatiuas; hincque ſemidiameter campi apparentis Φ ſtatim ita determinatur, vt ſit $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$; ab his autem porro viciſſim ſuperiores litterae ita pendent vt ſit

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = -P \quad \text{ſeu} \quad \mathfrak{B} = \frac{\Phi(1 - P)}{\pi}$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ \quad \text{hinc} \quad \mathfrak{C} = \frac{\Phi(PQ - 1) + \pi}{\pi'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = -PQR = -m \quad \text{vnde fit}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\Phi(1 - m) - \pi + \pi'}{\pi''}$$

quia igitur $\mathfrak{D} = +1$ hinc ſequitur

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{1 - m} \quad \text{ſiue} \quad \Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$$

vti opportet: vt autem repraeſentatio ab omni margine colorato liberetur, ſatisfieri oportet huic aequationi

$$\frac{\pi}{P} - \frac{\pi'}{PQ} + \frac{\pi''}{PQR} = 0.$$

§. 3. Statim nunc videamus, an campo apparenti maximum valorem conciliare liceat, id quod praeſtaretur, ſi denotante ξ maximum valorem, quem litterae π, π' et π'' recipere poſſunt, poneretur

$$\pi = -\xi,\ \pi' = +\xi \text{ et } \pi'' = -\xi$$

tum enim prodiret

$$\Phi = + \frac{3\xi}{m-1} = M\xi \text{ ſumto } M = \frac{3}{m-1}$$

ex quo valore determinatur diſtantia oculi poſt vltimam lentem $= \frac{s}{Mm}$, quam ergo pariter poſitiuam eſſe neceſſe eſt, quia alioquin campus aſſignatus ab oculo conſpici non poſſet; His igitur poſitis deſtructio marginis colorati hanc exigit aequationem

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} = 0 \text{ ſiue } 1 + \frac{1}{Q} + \frac{1}{QR} = 0.$$

Caſus quo $P > 0$

§. 4. Quia litterarum P, Q et R binae debent eſſe negatiuae, ſumamus primo litteram P eſſe poſitiuam, vnde tam Q quam R negatiuas eſſe oportet; quocirca ponamus $Q = -k$ atque reperietur $R = \frac{1}{k-1}$, ſicque debet eſſe $k < 1$ vt fiat

$$R = \frac{-1}{1-k} \text{ ideoque } PQR = \frac{Pk}{1-k} = m$$

conſequenter $P = \frac{m(1-k)}{k}$; quia igitur

$$P = \frac{(1-k)}{k} m \text{ et } PQ = -(1-k)\, m \text{ ob}$$

$$\pi = -\xi,\ \pi' = +\xi,\ \pi'' = -\xi \text{ et } \Phi = M\xi;$$

repe-

reperiemus

$$\mathfrak{B} = M\left(\frac{m(1-k)}{k} - 1\right) = \frac{3m(1-k) - 3k}{k(m-1)}$$

$$B = \frac{3m(1-k) - 3k}{m(4k-3) + 2k} \text{ deinde}$$

$$\mathfrak{C} = -M((1-k)m + 1) - 1 = -\frac{m(4-3k) - 2}{m-1}$$

$$C = -\frac{m(4-3k) - 2}{m(5-3k) + 1}.$$

§. 5. Nunc igitur ad interualla lentium reſpiciamus, ac primum quidem erit $= \alpha\left(1 - \frac{k}{m(1-k)}\right)$ quod ſemper eſt poſitiuum ob $k < 1$, ſecundum autem erit $= -\frac{B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, quod poſitiuum eſſe nequit niſi B ſit numerus negatiuus. Cum igitur numerator ipſius B ſit poſitiuus, denominator negatiuus eſſe opportet, vnde ſequitur $4k < 3$ et $k < \frac{3}{4}$, tertium autem interuallum eſt $= -\frac{BC\alpha}{(1-k)m}(2-k)$ vnde patet BC eſſe debere negatiuum; quia igitur B iam eſt negatiuum, opportet eſſe C poſitiuum; ob numeratorem vero ipſius C negatiuum, videamus an denominator etiam negatiuus reddi poſſit: quod cum fieri nequeat, patet hunc caſum locum habere non poſſe, quo erat $P > 0$.

§. 6. Tribuamus igitur litterae P valorem negatiuum, et nunc vel Q vel R debet eſſe negatiuum. Sit primo Q negatiuum et ponamus $Q = -k$ erit $1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{kR} = 0$, vnde fit $R = \frac{1}{k-1}$ ſicque R debet eſſe poſitiuum; erit igitur Caſus quo $P < 0$ et $Q > 0$.

$$PQR = -\frac{Pk}{k-1} = +m$$

ideoque

$$P = -\frac{m(k-1)}{k} \quad \text{et} \quad PQ = +m(k-1)$$

 vnde

vnde colligimus

$$\mathfrak{B} = -M\left(1 + \frac{m(k-1)}{k}\right) = -\frac{3m(k-1)-3k}{k(m-1)}$$

$$B = -\frac{3m(k-1)-3k}{m(4k-3)+2k} \quad \text{deinde}$$

$$\mathfrak{C} = M(m(k-1)-1)-1 = \frac{m(3k-4)-2}{m-1} \quad \text{et}$$

$$C = \frac{m(3k-4)-2}{m(5-3k)+1}.$$

§. 7. Examinemus nunc pariter ſingula interualla, ac primum quidem $\alpha(1-\frac{1}{P})$ certe eſt poſitiuum, ſecundum $-\frac{B\alpha}{P}(1+\frac{1}{k})$ vbi ob P negatiuum B debet eſſe poſitiuum, cuius numerator cum ſit negatiuus etiam denominator debet eſſe negatiuus, quod autem fieri nequit: vnde etiam hic caſus $P < 0$ et $Q < 0$ locum habere nequit, quare tertium caſum euoluamus quo $P < 0$ et $R < 0$.

Caſus quo $P < 0$ et $R < 0$.

§. 8. Hic igitur nil aliud opus eſt niſi vt loco k ſcribamus $-k$ eritque

$$P = -\frac{m(k+1)}{k}; \quad Q = +k \quad \text{et} \quad R = \frac{-1}{k+1} \quad \text{hincque}$$

$$PQ = -m(k+1)$$

ex his porro colligitur

$$\mathfrak{B} = \frac{-3m(k+1)-3k}{k(m-1)}; \quad B = \frac{-3m(k+1)-3k}{m(4k+3)+2k}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-m(3k+4)-2}{m-1}; \quad C = \frac{-m(3k+4k)-2}{m(5+3k)+1}$$

iam quia primum interuallum nulla laborat difficultate; ſecundum interuallum eſt $-\frac{B\alpha}{P}(1-\frac{1}{k})$ vbi duo caſus occurrunt prout fuerit $k > 1$ vel $k < 1$. Sit

I°. $k > 1$ et quia P eſt negatiuum neceſſe eſt vt ſit $B > 0$ quod autem fieri nequit.

II°.

II°. Sit igitur $k < 1$ et fieri debet B negatiuum quod ſponte euenit; tertium autem interuallum eſt $\frac{BC\alpha}{-m(k+1)}(2+k)$ vnde patet C eſſe debere poſitiuum, cuius numerator cum ſit manifeſto negatiuus denominator vero poſitiuus, etiam hic caſus locum habere nequit: quocirca nunc quidem certum eſt, in hoc genere per quaternas lentes campum apparentem $\Phi = \frac{3\xi}{m-1}$ obtineri non poſſe.

§. 9. Hinc igitur intelligimus omnes tres lentes ſimul adhiberi non poſſe ad campum apparentem augendum, quocirca aſſumamus eſſe

$$\pi = +\tfrac{1}{2}\xi \text{ et } \pi' = +\xi \text{ et } \pi'' = -\xi$$

eritque pro campo apparente

$$\Phi = \frac{7\xi}{2(m-1)} \text{ hinc } M = \frac{5}{2(m-1)}$$

tum vero erit

$$\mathfrak{B} = \frac{3(1-P)}{m-1};\ \mathfrak{C} = \frac{3PQ+m-4}{2(m-1)}$$

aequatio autem pro margine colorato erit

$$\frac{1}{2P} - \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PQR} = 0 \text{ ſiue } 1 - \frac{2}{Q} - \frac{2}{QR} = 0$$

vbi notandum, trium litterarum P, Q et R duas eſſe debere negatiuas; ponamus primo P et R eſſe negatiuas et ſit $Q = +k$ eritque $1 - \frac{2}{k} - \frac{2}{kR} = 0$ vnde reperitur $R = \frac{-2}{2-k}$

hinc patet eſſe $k < 2$ vnde erit

Caſus

$$PQR = -\frac{2kP}{2-k} = m \text{ ideoque } P = -\frac{m(2-k)}{2k} \text{ et } P < 0 \text{ et}$$

$$PQ = -\frac{m(2-k)}{2} \quad R < 0.$$

ex his iam valoribus habebimus

$$\mathfrak{B} = \frac{3(2k + m(2-k))}{2k(m-1)}; \quad \mathfrak{C} = \frac{m(3k-4)-8}{4(m-1)}$$

vnde ſequitur

$$B = \frac{3(2k + m(2-k))}{m(5k-6)-8k} \text{ et } C = \frac{m(3k-4)-8}{m(8-3k)+4}.$$

§. 10. Quod ad interualla attinet, primum per ſe eſt poſitiuum

$$a\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \alpha\left(1 + \frac{2k}{m(2-k)}\right)$$

ſecundum autem interuallum $= -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ vbi duo caſus conſiderandi veniunt prout fuerit vel $k > 1$ vel $k < 1$.

I°. Primo ſit $k > 1$, ideoque $1 - \frac{1}{k} > 0$, quia P eſt negatiuum, B debet eſſe poſitiuum, quod vt eueniat, eſſe debet $k > \frac{6}{5}$ attamen $k < 2$.

II. Sin autem ſit $k < 1$; B debet eſſe negatiuum, cuius numerator cum ſit poſitiuus, deberet eſſe $k < \frac{6}{5}$ quod per ſe euenit.

§. 11. Tertium interuallum erat $\frac{BC\alpha}{PQ}\left(\frac{4-k}{2}\right)$; vnde patet ob PQ negatiuum etiam BC negatiuum eſſe debere; quare binos caſus praecedentes percurramus.

I. Priore caſu $k > \frac{6}{5}$ quo B poſitiuum, debet eſſe C negatiuum, cuius denominator cum ſit per ſe poſitiuus, numerator debet eſſe negatiuus quod fit ſi ſit $k < \frac{4}{3}$, vnde hos duos limites habemus $k < \frac{4}{3}$ et $k > \frac{6}{5}$. Praeterea erat $s = -\frac{BC\alpha}{m}$ ideoque ob $B > 0$ et $C < 0$ vti requiritur.

§. 12.

§. 12. Examinemus quoque alterum caſum vbi ob $k < 1$ et B negatiuum, debet eſſe C poſitiuum cuius denominator cum per ſe ſit poſitiuus debet eſſe $k > \frac{4}{3}$; quod quia fieri nequit hic caſus ſecundus locum habere nequit.

Euolutio caſus prioris.

quo $k > \frac{6}{5}$ et $k < \frac{4}{3}$.

§. 13. Sumamus igitur $k = \frac{5}{4}$ et ſequentes nanciſcemur determinationes:

$$P = -\tfrac{3}{10}m;\ Q = \tfrac{5}{4};\ R = -\tfrac{8}{3}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{9m+30}{10(m-1)};\ B = \frac{9m+30}{m-40};\ \mathfrak{C} = \frac{-m-32}{16(m-1)};\ C = \frac{-m-32}{17m+16}$$

vnde elementa deriuantur

$$b = \frac{10\alpha}{3m};\ \ \mathfrak{b} = \frac{10(3m+10)}{m(m-40)}\alpha;\ \ c = -\frac{8(3m+10)}{m(m-40)}\alpha;$$

$$\gamma = +\frac{8(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha;\ \ d = \frac{3(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha$$

hinc interualla lentium

$$\text{I} - \text{II} = \alpha + b = \frac{(3m-10)}{3m}\alpha$$

$$\text{II} - \text{III} = \mathfrak{b} + c = \frac{2(3m+10)}{m(m-40)}\alpha$$

$$\text{III} - \text{IV} = \gamma + d = \frac{11(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha$$

diſtantiae focales

$$p = \alpha;\ q = \frac{3m+10}{m(m-1)}\alpha;\ \ r = +\frac{(m-32)(3m+10)}{2m(m-1)(m-40)}\alpha;$$

$$s = \frac{3(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha$$

diſtantia autem oculi $= \frac{2s(m-1)}{3m}$ et ſemidiameter campi apparentis

$$\Phi = \frac{3\xi}{2(m-1)} = \frac{1290}{m-1}\ \text{min.}$$

§. 14.

§ 14. Haec igitur ſpecies locum habere nequit niſi multiplicatio m multo ſit maior quam 40, tum autem vt ſupra loco lentis obiectiuae ſubſtituatur lens noſtra triplicata perfecta iam aliquoties deſcripta, ſumendo $\Pi = \frac{m}{4}$ cig. et $\alpha = 0,25578.\, m$. Interuallum autem inter hanc lentem obiectiuam et lentem q debet eſſe $= \frac{1}{4} m + b$; reliquae determinationes hinc facile deducuntur, quandoquidem ob confuſionem ſequentium lentium conſtructio lentis obiectiuae vix quicquam immutatur.

Euolutio caſus

quo $P > 0$ ideoque Q et R negatiuae.

§. 15. Quia igitur Q negatiuum loco k ſcribamus $-k$ eritque

$$P = + \frac{m(2+k)}{2k}; \quad R = \frac{-2}{2+k}$$

exiſtente $Q = -k$

vnde erit vt ante $\Phi = \frac{3\xi}{2(m-1)}$, porro vero erit

$$\mathfrak{B} = \frac{-3m(2+k)+6k}{2k(m-1)}; \quad B = \frac{-3m(2+k)+6k}{m(5k+6)-6k}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-m(3k+4)-8}{4(m-1)}; \quad C = \frac{-m(3k+4)-8}{m(8+3k)+4}.$$

§. 16. Nunc igitur ſecundum interuallum erit $-\frac{B\alpha}{P}(1+\frac{1}{k})$, ob P poſitiuum hoc interuallum poſtulat vt B ſit negatiuum, quod ſponte euenit, tertium autem interuallum $\frac{BC\alpha}{PQ}\left(\frac{4+k}{2}\right)$, vnde C debet eſſe poſitiuum, quod plane fieri nequit.

EVO-

EVOLVTIO TELESCOPIORVM

pro caſu in tomo ſecundo Dioptricae pag. 393. expoſito.

§. 17. Haec teleſcopiorum ſpecies imprimis memorabilis ſequenti modo eſt determinata: propoſita multiplicatione quacunque m quaeratur numerus $k = -m + \sqrt{2m(m-1)}$ et diſtantiae focales lentium ita determinabuntur

$$p = \alpha; \quad q = \frac{\alpha}{k}; \quad r = \frac{\vartheta\alpha}{k} \text{ et } s = \frac{\vartheta\alpha}{m}$$

vbi numerum ϑ pro arbitrio aſſumere licet; tum vero interualla lentium ita ſe habebunt

$$I - II = p + q = \alpha\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$II - III = \eta\alpha = \left(\frac{k+1}{k^2}\right)\alpha + \frac{\vartheta\alpha(\sqrt{2m(m-1)})}{2kk}$$

$$III - IV = r + s = \vartheta\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)$$

oculi autem diſtantia eſt $= \frac{s(m-1)}{\sqrt{2m(m-1)}}$.

§. 18. Nunc igitur ad perfectionem huius ſpeciei teleſcopiorum nihil aliud requiritur niſi vt loco lentis obiectiuae P noſtra lens triplicata ſubſtituatur ſumendo $\Pi = \frac{m}{4}$ digit. eamque ante lentem ſecundam ſtatuendo ad diſtantiam $\frac{1}{4}m + q$, tum vero erit $\alpha = 0,25578\,m$. Praeterea, vt lentes oculares maximam aperturam admittant eas vtrinque aequaliter conuexas parari conuenit, ex quo radius vtriusque faciei pro lente q erit $1,06\,q$, pro lente $r = 1,06.\,r$ et pro lente $s = 1,06\ s$. Denique campi apparentis ſemidiameter in minutis primis erit

$$\Phi = \frac{1217}{\sqrt{m(m-1)}} = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}} \text{ ſiue } \Phi = \frac{1718}{m+k}.$$

§. 19. Quo autem facilius haec formulae ad calculum reuocari poſſint, ſequentem tabulam ſubiungamus:

m	$\sqrt{2m(m-1)}$	k	η
10	13,416	3,416	$0,3784 + 1,1497 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
20	27,568	7,568	$0,1495 + 0,4813 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
30	41,713	11,713	$0,0927 + 0,3040 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
40	55,857	15,857	$0,0670 + 0,2221 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
50	70,000	20,000	$0,0525 + 0,1750 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
75	105,357	30,357	$0,0340 + 0,1143 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
100	140,712	40,712	$0,0252 + 0,0849 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
150	211,424	61,424	$0,0165 + 0,0560 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
200	282,135	82,135	$0,0123 + 0,0418 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
300	423,556	123,556	$0,0081 + 0,0277 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
400	564,978	164,978	$0,0061 + 0,0207 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$

APPLICATIO

ad eam teleſcopiorum ſpeciem, quae in Dioptricae tomo 2do pag. 448. eſt expoſita.

§. 20. Haec ſpecies prae caeteris omni attentione digna videtur, quia campus apparens pro lubitu augeri poteſt, ita vt eius ſemidiameter fiat $\Phi = \frac{1\xi}{m+\sqrt{m}}$ quia autem ibi lens obiectiua aſſumta eſt duplicata hic pro inſtituto noſtro lente ſimplici vicaria vtamur, vnde litterae P, B et C penitus ex formulis ibi datis ſunt excludendae, ſequentes vero vno gradu

du remouendae; hinc igitur ex loco citato ſequentes habebimus valores

$P = \frac{2i\sqrt{m}}{1+i}$; $Pk = \sqrt{m}$; $Pkk' = im$; $Pkk'S = \frac{im}{2}$;

$Pkk'ST = \frac{im}{3}$; $Pkk'STU = \frac{im}{4}$ etc.

ita vt horum productorum vltimum ſit $= \frac{im}{i} = m$ ſicque omnium lentium numerus erit $= i + 3$.

§. 21. Praeterea habebimus ſequentes numeros

$\mathfrak{B} = \frac{-2i\sqrt{m}+i+1}{(1+i)(1+\sqrt{m})}$	$B = \frac{-2i\sqrt{m}+i+1}{(1+3i)\sqrt{m}}$
$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1+\theta}$	$C = \vartheta$
$\mathfrak{D} = \frac{i(1+i\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}}$	$D = \frac{-(i+ii\sqrt{m})}{(i-1)(1+(i+1)\sqrt{m})}$
$\mathfrak{E} = \frac{i(2+i\sqrt{m})}{2(1+\sqrt{m})} - 1$	$E = \frac{-(2(i-1)+(ii-1.2)\sqrt{m})}{(i-2)(2+(i+2)\sqrt{m})}$
$\mathfrak{F} = \frac{i(3+i\sqrt{m})}{3(1+\sqrt{m})} - 2$	$F = \frac{-(3(i-2)+(ii-2.3)\sqrt{m})}{(i-3)(3+(i+3)\sqrt{m})}$
$\mathfrak{G} = \frac{i(4+i\sqrt{m})}{4(1+\sqrt{m})} - 3$	$G = \frac{-(4(i-3)+(ii-3.4)\sqrt{m})}{(i-4)(4+(i+4)\sqrt{m})}$
etc.	etc.

Pro priori columna littera penultima erit

$\frac{2(i-1)+(3i-2)\sqrt{m}}{(i-1)(1+\sqrt{m})}$ vltima vero $= 1$.

§. 22. Ex his litteris diſtantiae determinatrices ſingularum lentium ſequentibus formulis exprimentur

$b = -\frac{\alpha}{P}$	$\mathfrak{b} = -\frac{B\alpha}{P}$
$c = -\frac{B\alpha}{Pk}$	$\gamma = -\frac{BC\alpha}{Pk}$
$d = -\frac{BC\alpha}{Pkk'}$	$\delta = -\frac{BCD\alpha}{Pkk'}$
$e = +\frac{BCD\alpha}{Pkk'S}$	$\varepsilon = +\frac{BCDE\alpha}{Pkk'S}$
$f = -\frac{BCDE\alpha}{Pkk'ST}$	$\zeta = -\frac{BCDEF\alpha}{Pkk'ST}$
$g = +\frac{BCDEF\alpha}{Pkk'STU}$	$\eta = +\frac{BCDEFG\alpha}{Pkk'STU}$
etc.	etc.

23. Hinc porro diſtantiae focales ſingularum lentium ita definientur

$$p = \alpha;\ q = \mathfrak{B}b;\ r = \mathfrak{C}c;\ s = \mathfrak{D}d;\ t = \mathfrak{E}e \text{ etc.}$$

quarum vltima ſi vocetur $= z$ poſt eam oculus teneri debet ad diſtantiam

$$= \frac{m + \sqrt{m}}{1\,m} z = \frac{1 + \sqrt{m}}{1\sqrt{m}} z$$

vnde tantus campus conſpicietur cuius ſemidiameter in minutis primis erit $\frac{859\,\vartheta}{m + \sqrt{m}}$

caeterum littera ϑ quae hic eſt introducta penitus arbitrio noſtro relinquitur, eamque ita aſſumi conuenit vt diſtantiae focales vltimarum lentium ſatis modicae magnitudinis euadant, ſcilicet ne minores fiant quam vnus digitus vel ad ſummum $\frac{1}{2}$ digit.

§. 24. Denique ſi $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda''''$ etc. denotent ordine numeros arbitrarios ad formationem ſingularum lentium pertinentes, confuſio illa Ω ex qua lentem obiectiuam ſiue duplicatam ſiue triplicatam determinari opportet ſequenti modo expreſſa prodibit

$\Omega =$

$$\Omega = -\frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\,\mathfrak{B}}\right) - \frac{1}{B^3\,P\,k}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\,\mathfrak{C}}\right)$$

$$- \frac{1}{B^3\,C^3\,P\,k\,k'}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\,\mathfrak{D}}\right) + \frac{1}{B\cdot C^3\,D^3\,P\,k\,k'\,S}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^3} + \frac{\nu}{E\,\mathfrak{E}}\right) \text{ etc.}$$

vbi pro ſecunda lente ſumi poteſt $\lambda' = 2$ et $\lambda'' = 1$ reliquae autem ita debent eſſe comparatae, vt ſingulae lentes prodeant vtrinque aequaliter conuexae. Caeterum hi termini valorem Ω praebentes plerumque tam erunt exigui vt inde in conſtructionem lentis obiectiuae multiplicatae vix vlla mutatio ſenſibilis ingrediatur, ob quam cauſam etiam parum referet, vtrum lentes ſecunda et tertia etiam parentur aequaliter conuexae nec ne.

§. 24. Quod denique ad aperturas lentium attinet, ſi primae obiectiuae ſemidiameter aperturae fuerit $= X$, ſecundae ſemidiameter debet eſſe

$$= \frac{i}{\sqrt{m}}\frac{q}{4} \pm \frac{X(1+i)}{2\,i\sqrt{m}}; \text{ tertiae } = 0.\frac{r}{4} \pm \frac{X}{\sqrt{m}};$$

$$\text{quartae } = \frac{s}{4} \pm \frac{X}{i\,m}; \text{ quintae } = \frac{t}{4} \pm \frac{2X}{i\,m};$$

$$\text{ſextae } = \frac{u}{4} \pm \frac{3X}{i\,m} \text{ etc.}$$

vbi notandum eſt: partes poſteriores nihil ad campum augendum conferre, ſed ideo tantum eſſe adiectas, vt aequabilis claritas per totum campum obtineatur, quam conditionem non adeo neceſſe eſt adimpleri. Hinc igitur pro variis valoribus litterae *i* ſequentes caſus euoluamus.

CASVS I.

quo $i = 1$, numerus lentium $= 4$ et ſemidiameter campi $\Phi = \frac{859}{m + \sqrt{m}}$ min.

§. 25. Pro hoc igitur caſu habebimus ſequentes valores principales, ex quibus omnes determinationes facile deducuntur:

$P = \sqrt{m}$	$\mathfrak{B} = \frac{-\sqrt{m} + 1}{1 + \sqrt{m}}$	$B = \frac{-\sqrt{m} + 1}{2\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1 + \vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = m$	$\mathfrak{D} = 1$	$E = \frac{-\sqrt{m} - 1}{0(1 + 2\sqrt{m})} = \infty.$

CASVS II.

quo $i = 2$, numerus lentium $= 5$ et ſemidiameter campi $\Phi = \frac{1718}{m + \sqrt{m}}$ min.

§. 26. Pro hoc igitur caſu noſtrae litterae principales ſequentes accipiunt valores

$P = \frac{4\sqrt{m}}{3}$	$\mathfrak{B} = \frac{-4\sqrt{m} + 3}{3(1 + \sqrt{m})}$	$B = \frac{-4\sqrt{m} + 3}{7\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1 + \vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = 2m$	$\mathfrak{D} = \frac{2 + 4\sqrt{m})}{1 + \sqrt{m}}$	$D = \frac{-2 - 4\sqrt{m}}{1 + 3\sqrt{m}}$
$Pkk'S = m$	$\mathfrak{E} = 1$	$E = \infty.$

CASVS III.

Quo $i = 3$, numerus lentium 6 et ſemidiameter campi $= \frac{2577}{m + \sqrt{m}}$ min.

§. 27. Pro hoc igitur caſu noſtrae litterae principales ſequentes accipiunt valores

P =

$P = \frac{3\sqrt{m}}{2}$	$\mathfrak{B} = \frac{-3\sqrt{m}+2}{2(1+\sqrt{m})}$	$B = \frac{-3\sqrt{m}+2}{5\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = 3m$	$\mathfrak{D} = \frac{9\sqrt{m}+3}{1+\sqrt{m}}$	$D = \frac{-9\sqrt{m}-3}{2(1+4\sqrt{m})}$
$Pkk'S = \frac{3m}{2}$	$\mathfrak{E} = \frac{7\sqrt{m}+4}{2(1+\sqrt{m})}$	$E = \frac{-7\sqrt{m}-4}{2+5\sqrt{m}}$
$Pkk'ST = m$	$\mathfrak{F} = 1$	$F = \infty.$

CASVS IV.

Quo $i = 4$, numerus lentium 7 et campi ſemidiameter $= \frac{3436}{m+\sqrt{m}}$ min.

§. 28. Pro hoc igitur caſu ſequentes conſequimur valores principales

$P = \frac{8\sqrt{m}}{5}$	$\mathfrak{B} = \frac{-8\sqrt{m}+5}{5(1+\sqrt{m})}$	$B = \frac{-8\sqrt{m}+5}{13\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = 4m$	$\mathfrak{D} = \frac{16\sqrt{m}+4}{1+\sqrt{m}}$	$D = \frac{-16\sqrt{m}-4}{3(1+5\sqrt{m})}$
$Pkk'S = 2m$	$\mathfrak{E} = \frac{7\sqrt{m}+3}{1+\sqrt{m}}$	$E = \frac{-7\sqrt{m}-3}{2+6\sqrt{m}}$
$Pkk'ST = \frac{4m}{3}$	$\mathfrak{F} = \frac{16\sqrt{m}+6}{3(1+\sqrt{m})}$	$F = \frac{-10\sqrt{m}-6}{3+7\sqrt{m}}$
$Pkk'STU = m$	$\mathfrak{G} = 1$	$G = \infty.$

§. 29. In hoc teleſcopiorum genere tertia lens ſingularia ſuppeditat phaenomena; cum enim primo quam minimam requirat aperturam, ea commodiſſime vicem geret diaphragmatis, quo radii peregrini ab introitu in lentes ſequentes arceantur; deinde vero quia portio confuſionis ex hac lente nata eſt

$$= -\frac{1}{B^3\sqrt{m}}\left(\frac{\lambda'(1+\vartheta)^3}{\theta^3} + \frac{\nu(1+\vartheta)}{\theta^2}\right)$$

non

non ſolum ob $\frac{(1+9)^3}{9^3}$ numerum ſatis notabilem ac vnitate ſemper maiorem haec quantitas vnitatem non mediocriter ſuperabit etiamſi capiatur $\lambda'' = 1$, ſed etiam quia $\frac{1}{B^3}$ ſit numerus plerumque ſatis magnus; cum enim primo caſu quo $i = 1$ ſit

$$B = \frac{-\surd m + 1}{2\surd m} \text{ erit } -\frac{1}{B} = \frac{2\surd m}{\surd m - 1} \text{ et } -\frac{1}{B^3 \surd m} = \frac{8m}{(\surd m - 1)^3}.$$

Caſu autem ſecundo quo $i = 2$ eſt

$$B = \frac{-4\surd m + 3}{3\surd m} \text{ hinc } -\frac{1}{B} = \frac{3\surd m}{4\surd m - 3} \text{ et } -\frac{1}{B^3 \surd m} = \frac{27m}{(4\surd m - 3)^3}$$

tertio vero caſu quo eſt

$$B = \frac{-3\surd m + 2}{5\surd m} \text{ erit } -\frac{1}{B^3 \surd m} = \frac{125m}{(3\surd m - 2)^3};$$

Quarto denique caſu ob

$$B = \frac{-5\surd m + 5}{13\surd m} \text{ erit } -\frac{1}{B^3 \surd m} = \frac{2197m}{(5\surd m - 5)^3} \text{ etc.}$$

hinc igitur littera noſtra Ω tantum accipere poterit augmentum, vt lens obiectiua triplicata ſatis notabilem mutationem ſubire queat, quam in praxi negligere nequaquam licebit, id quod vnico exemplo oſtendiſſe ſufficiet.

EXEMPLVM TELESCOPII

ex ſex lentibus compoſiti quod obiecta centies multiplicet.

§. 30. Hic igitur erit $i = 3$, vnde valores ex caſu tertio depromere opportet; tum vero ſemidiameter campi erit $\Phi = 23\frac{1}{3}$ min. ideoque inſtar ſpatii circularis in coelo ſpectabitur cuius ſemidiameter erit $= 34°.\ 10'$ ideoque diameter $68°.\ 20'$; tum vero

ro aſſumamus $\vartheta = 3$, vnde ſequentes prodibunt valores:

$P = 15$	$\mathfrak{B} = -\frac{14}{11}$	$B = -\frac{14}{25}$
$Pk = 10$	$\mathfrak{C} = \frac{3}{4}$	$C = 3$
$Pkk' = 300$	$\mathfrak{D} = \frac{93}{11}$	$D = -\frac{93}{82}$
$Pkk'S = 150$	$\mathfrak{E} = \frac{37}{11}$	$E = -\frac{37}{26}$
$Pkk'ST = 100$	$\mathfrak{F} = 1$	$F = \infty$

horum igitur numerorum logarithmos in ſubſidium calculi adponamus

logar. $P = 1,1760913$	$l\mathfrak{B} = (-)\,0,1047358$	$lB = (-)\,9,7481883$
logar. $Pk = 1,0000000$	$l\mathfrak{C} = (+)\,9,8750613$	$lC = (+)\,0,4771213$
log. $Pkk' = 2,4771213$	$l\mathfrak{D} = (+)\,0,9270902$	$lD = (-)\,0,0546690$
$lPkk'S = 2,1760913$	$l\mathfrak{E} = (+)\,0,5268090$	$lE = (-)\,0,1532284$
$lPkk'ST = 2,0000000$	$l\mathfrak{F} = (+)\,0,0000000$	$lF = \infty$.

§. 31. Ex his igitur valoribus definiamus ſingularum lentium diſtantias determinatrices, quas cum ſuis logarithmis ſingulas hic apponamus

$b = -0,0666\,\alpha$	$lb = (-)\,8,8239087$	$\beta = +0,0373.\alpha$
$c = +0,0560\,\alpha$	$lc = (+)\,8,7481883$	$\gamma = +0,1680.\alpha$
$d = +0,0056\,\alpha$	$ld = (+)\,7,7481883$	$\delta = -0,0063.\alpha$
$e = +0,0127\,\alpha$	$le = (+)\,8,1038873$	$\epsilon = -0,0181.\alpha$
$f = +0,0271\,\alpha$	$lf = (+)\,8,4332070$	$\zeta = \infty$ . . .

$$l\beta = (+)\,8,5720970$$
$$l\gamma = (+)\,9,2253096$$
$$l\delta = (-)\,7,8028573$$
$$l\epsilon = (-)\,8,2571157$$
$$l\zeta = \infty \;.\;.\;.\;.$$

§. 32. Ex his porro valoribus deriuemus interualla lentium, tum vero etiam diſtantias focales cum ſuis logarithmis:

$\text{I}-\text{II}=\alpha+b=0,9333.\alpha$	$q=0,0848.\alpha$	$lq=8,9286445$
$\text{II}-\text{III}=\beta+c=0,0933.\alpha$	$r=0,0420.\alpha$	$lr=8,6232496$
$\text{III}-\text{IV}=\gamma+d=0,1736.\alpha$	$s=0,0473.\alpha$	$ls=8,6752785$
$\text{IV}-\text{V}=\delta+e=0,0064.\alpha$	$t=0,0427.\alpha$	$lt=8,6306963$
$\text{V}-\text{VI}=\varepsilon+f=0,0090.\alpha$	$u=0,0271.\alpha$	$lu=8,4332070$

diſtantia oculi ab vltima lente $=\frac{u(m+1)}{3\sqrt{m}}=0,010\,\alpha.$

§. 33. Nunc igitur videamus quanta confuſio ex tertia lente oriatur, quae, vt tam parua oriatur quam fieri poteſt ſumamus $\lambda''=1$, et cum ſit

$$l-\frac{1}{\mathfrak{B}^3\,\mathfrak{P}\,k}=9,7554351 \text{ erit } \frac{\lambda''}{\mathfrak{B}^3\,\mathfrak{C}^3\,\mathfrak{P}\,k}=1,3497$$

vnde, ſi pro reliquis lentibus circiter vnam partem quartam vnitatis computemus, fiet $\Omega=1,60$; hinc igitur, pro conſtructione lentis triplicatae quam ſupra tertio loco deſcripſimus, habebimus

$$\lambda=2,37 \text{ hinc } \lambda-1=1,37 \text{ et } \sqrt{\lambda-1}=1,17$$

quocirca pro lente obiectiua compoſita lentis primae coronariae

radius faciei anterioris erit $=\frac{0,48\,\Pi}{0,62}$ et poſterioris $=\frac{0,48\,\Pi}{1,41}$; hinc igitur ſi ſumamus $\Pi=\frac{m}{4}=25$ pro hac lente reperietur

Radius

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 19\frac{1}{7} \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 8\frac{1}{2} \text{ dig.} \end{cases}$

binae reliquae lentes ad obiectiuam pertinentes manent vti ſupra ſunt aſſignatae, ſumto $\Pi = \frac{m}{4} = 25$ dig. Tum vero vt reliquae lentes cum hac obiectiua debite iungantur, ſumi debet

$$\alpha = 0,2558\, m = 25,58 \text{ dig.}$$

et lens obiectiua ante noſtram ſequentem lentem q conſtitui debet ad diſtantiam

$$\Pi + b = \tfrac{1}{4} m - 0,066\, \alpha = 23,31 \text{ digit.}$$

§. 34. Cum igitur ſit $\alpha = 25,58$ digit. erit $l\alpha = 1,40790$ vnde colligimus diſtantias focales ſequentium lentium in digitis

$$q = 2,170 \text{ dig.};\ r = 1,074 \text{ dig.};\ s = 1,211 \text{ dig.};$$
$$t = 1,092 \text{ dig.};\ u = 0,693$$

tum vero interualla harum lentium omiſſo primo quippe quod iam eſt aſſignatum erunt

$$\text{II} - \text{III} = 2,39 \text{ dig.};\quad \text{III} - \text{IV} = 4,45 \text{ dig.};$$
$$\text{IV} - \text{V} = 0,16 \text{ dig.};\quad \text{V} - \text{VI} = 0,23 \text{ dig.}$$

quibus accedit diſtantia oculi ab vltima lente $= 0,23$ dig. interim tamen etiam primum interuallum quod hic erat $\alpha + b = 23,91$ ideo notari meretur: quoniam, ſi in hoc loco obiectum conſtituatur, eius imago per ſecundum lentem q proiecta in locum tertiae lentis cadere debet.

§. 35. Reſtat igitur vt adhuc conſtructionem ſequentium lentium doceamus. Pro ſecunda quidem lente q ſupra notauimus ſumi poſſe $\lambda' = 1$; vt autem haec lens etiam alteram partem aperturae a litera X pendentem recipere poſſit, ſtatuamus $\lambda' = 2$ et eius conſtructio ita ſe habebit

Radius faciei anterioris $= \frac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) - \tau} = \frac{q}{1,0614} = 1,16$ dig.

Radius faciei poſterioris $= \frac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) + \tau} = \frac{q}{0,0025} = 869,71$ d.

vbi eſt $\mathfrak{B}(\sigma - \varrho) = -1,1264$.

Patet ergo hanc lentem conuexo-planam confici poſſe, dummodo diſtantiam focalem aſſignatam obtineat: tanto maiorem autem induſtriam adhibere oportet in formatione tertiae lentis pro qua ſumſimus $\lambda' = 1$ vnde hinc erit pro iſta lente

Radius faciei anterioris $= \frac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \frac{r}{0,5450} = 1,836$ dig.

Radius faciei poſterioris $= \frac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \frac{r}{1,3019} = 0,825$ dig.

vbi eſt $\mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 1,07520$.

Reliquae tres lentes debent eſſe aequaliter conuexae vnde erit

Radius vtriusque faciei

Pro lente quarta $s = 1,283$ dig.

Pro lente quinta $t = 1,157$ dig.

Pro lente ſexta $u = 0,734$ dig.

CON-

CONSTRVCTIO TELESCOPII
pro multiplicatione $m = 100$.

§. 36. Conſtabit igitur hoc teleſcopium ex ſex lentibus, quarum prima autem eſt triplicata: conſtructio ſequentibus articulis continetur.

I°. Lentis obiectiuae diſtantia focalis eſt $= 25$ dig. et ſemidiameter aperturae $= 2$ dig.

1°. Eius primae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= 11,137$ dig. et

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 19\tfrac{1}{3} \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 8\tfrac{1}{2} \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis ad medium ſequentis, interuallum eſt $= 0,566$ dig.

3°. Secundae lentis conuexae et ex vitro cryſtallino parandae diſtantia focalis eſt $= -6,296$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -7,883$ dig.

4°. A medio huius ad medium tertiae, intervallum eſto $= 0,566$ dig.

5°. Tertiae lentis coronariae diſtantia focalis eſt $= 11,010$ digit. et

Radius vtriusque faciei $= 11,671$.

II. A lente obiectiua vsque ad ſecundam lentem ſtatuatur diſtantia $= 23,31$.

III. Secundae lentis ex vitro coronario parandae diſtantia focalis $= 2,170$ dig. et

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 1,160 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 869,710 \text{ dig.} \end{cases}$

Tum vero eius ſemidiameter aperturae $= 0,163 + \frac{1}{15}$ dig.

IV. Ab hac lente vsque ad tertiam ſtatuatur interuallum $= 2,39$ dig.

V. Tertiae lentis itidem coronariae diſtantia focalis eſt $= 1,074$ dig.

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 1,836 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 0,825 \text{ dig.} \end{cases}$

Et ſemidiameter aperturae $= 0, + \frac{1}{5}$ dig.

VI. A lente tertia vsque ad quartam ſtatuatur interuallum $= 4,45$ dig.

VII. Quartae lentis coronariae diſtantia focalis $= 1,211$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 1,283$ dig.

Et ſemidiameter aperturae $= 0,303 + \frac{1}{150}$ dig.

VIII. Ab hac lente vsque ad quintam interuallum $= 0,16$ dig.

IX. Quintae lentis coronariae diſtantia focalis $= 1,092$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 1,157$ dig. et

Semidiameter aperturae $= 0,273 + \frac{1}{75}$ digit.

X. Ab hac lente ad vltimam ſtatuatur interuallum $= 0,23$ dig.

XI. Vltimae lentis diſtantia focalis eſt $= 0,693$

Radius vtriusque faciei $= 0,734$ et

Semi-

Semidiameter aperturae $= 0, 173 + \frac{1}{55}$ dig.

XII. Ab hac lente vſque ad oculum diſtantia ſit $= 0, 23$ dig.

XIII. Tum vero ſemidiameter campi apparentis erit $= 23\frac{1}{3}$ min. qui inſtar ſpatii circularis in coelo ſpectabitur cuius ſemidiameter eſt $= 34$ gr. 10 min.

XIV. Tandem longitudo totius tubi erit 32,47 dig.

Quia tres lentes vltimae proprie lentem ocularem conſtituunt, eae ſimul capſulae mobili inſerantur, vt pro indole oculi pauliſper vel admoueri vel remoueri poſſint.

ADDI-

ADDITAMENTVM.

§. 1.

Poſtquam haec iam ſcripſiſſem, in manus incidit nouiſſimum volumen Comment. Acad. Reg. Paris. in quo ſatis ampla deſcriptio lentium obiectiuarum compoſitarum reperitur, a Dno. *Jeaurat* elaborata, vbi autem tantum confuſioni a diuerſa radiorum refractione oriundae occurritur, altera confuſione ab apertura oriunda penitus neglecta, vnde ab his lentibus obiectiuis neutiquam fructus ſperatus exſpectari poteſt.

§. 2. Egregia autem experimenta affert, quibus tam refractionem quam diſperſionem radiorum pro vtraque vitri ſpecie, coronaria ſcilicet, cui vitrum venetum aequiualere cenſet, et cryſtallo anglica ſeu Flintglaſſ determinat. Inuenit autem pro hac poſtrema ſpecie refractionem mediam vt 160 : 100, diſperſionem autem vitri veneti ad cryſtallum vt 18 : 31. quae determinationes, ſiue omni vitro huius ſpeciei conueniant ſiue ſecus, omnino merentur vt meos calculos circa conſtructionem lentium triplicatarum etiam ad hanc vitri ſpeciem accommodem. Nunc ergo erit

$n' = 1,60$ et ratio $\zeta : \eta =$ ſiue $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n-1} = 100 : 153$.

§. 3. Introducamus igitur has determinationes in hypotheſin quintam, qua aſſumſimus $\vartheta = \frac{59}{36}$; vbi omnes valores iidem manent, vsque ad valorem litterae

terae f vbi loco fractionis $\frac{4}{3}$ ſcribi debet 1, 53 ita vt ſit

$$f = \frac{HH}{1,53\,GG - FHH - 1}$$ vnde reperitur

$$\begin{array}{lr} f = & 1,3342 \\ g = & -2,1867 \\ h = & 1,7583 \end{array} \quad \text{hinc} \quad \left\{ \begin{array}{ll} lf = & 0,1252326 \\ lg = & (-)\,0,3397821 \\ lh = & 0,2450930 \end{array} \right.$$

hincque

$$\begin{array}{lr|ll} p = & 0,7495.\,\Pi & lp = & 9,8747674 \\ q = & -0,4573.\,\Pi & lq = & (-)\,9,6602179 \\ r = & 0,5687.\,\Pi & lr = & 9,7549070 \end{array}$$

praeterea vero erit

$$lP = 0,0226640; \quad \text{et} \quad lPQ = 0,0099272$$

$$\begin{array}{l|l|l} B = \frac{9}{5} & lB = 0,2552725 & lB^3 = 0,7658175 \\ \mathfrak{B} = \frac{9}{14} & l\mathfrak{B} = 9,8081145 & l\mathfrak{B}^3 = 9,4243435 \\ & lB\mathfrak{B} = 0,0633870 & \\ C = h - 1 & lC = 9,8798411 & lC^3 = 9,6395233 \\ \mathfrak{C} = \frac{h-1}{h} = & l\mathfrak{C} = 9,6347481 & l\mathfrak{C}^3 = 8,9042443 \\ = 0,4313 & lC\mathfrak{C} = 9,5145892 & \end{array}$$

tandem

$$lM = 9,9036003 \quad \text{et} \quad lN = 9,2242553$$

hic enim pro refractione $n' = 1,60$ ſequentes habentur valores

$$\begin{aligned} \mu' &= 0,8333 \\ \nu' &= 0,2666 \\ \varrho' &= 0,1111 \\ \sigma' &= 1,5555 \\ \tau' &= 0,8607. \end{aligned}$$

 §. 4.

§. 4. Hinc igitur, quia lens cryſtallina aſſumitur vtrinque aeque concaua: erit pro ea

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \left(\frac{\sigma' - \varrho'}{\tau'}\right) \left(\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\right)$$

deinde, quia etiam tertia lens eſt vtrinque aeque conuexa: pro ea erit

$$\sqrt{\lambda'' - 1} = \left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right) \left(\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\right)$$

vnde numeri λ' et λ'' ob

$$\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{7}; \quad \mathfrak{C} - \tfrac{1}{2} = -0,0687,$$

ſequenti modo determinantur

a $l\left(\frac{\sigma' - \varrho'}{\tau'}\right) = 0,2248357$	ad $l\left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right) = 0,1901924 (+)$
ſubtr. $l\,7 = 0,8450980$	add. $l(\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}) = 8,8369567 (-)$
$l\sqrt{\lambda' - 1} = 9,3797377$	$l\sqrt{\lambda'' - 1} = 9,0271491 (-)$
hinc $l(\lambda' - 1) = 8,7594754$	hinc $l(\lambda'' - 1) = 8,0542982 (+)$
ideoque $\lambda' = 1,0575$	ideoque $\lambda'' = 1,0113$

quibus inuentis calculus pro confuſione ita inſtituatur.

Pro parte prima		*Pro ſecunda parte*	
$l\,M$	$= 9,9036003$	$l\,M$	$= 9,9036003$
$l\,\lambda'$	$= 0,0242804$	$l\,\nu'$	$= 9,4258601$
	$9,9278807$		$9,3294604$
$l\,\mathfrak{B}^3$	$= 9,4243435$	$l\,B\mathfrak{B}$	$= 0,0633870$
log. p. I	$= 0,5035372$	l. p. II.	$= 9,2660734$
ideoque pars I	$= -3,1881$	ideoque pars II	$= -0,1845$

Pro

Pro parte tertia.		*Pro parte quarta.*	
$l\,N$	$= 9,2242553$	$l\,N$	$= 0,2242553$
$l\,\lambda''$	$= 0,0048800$	$l\,\nu$	$= 9,3412366$
	$9,2291353$		$8,5654919$
$l\,\mathfrak{C}'$	$= 8,9042443$	$l\,C\,\mathfrak{C}$	$= 9,5145892$
l. p. III	$= 0,3248910$	l. p. IV	$9,0509027$
hincque pars III	$= 2,1130$	hinc pars IV	$= 0,1124$

confuſio igitur a lente triplicata nata erit $\lambda - 1,1472$ vnde ſi confuſio a reliquis lentibus nata fuerit $= O$ tum capi debet $\lambda = 1,1472 - O$, hincque patet: confuſionem maiorem tolli non poſſe quam $O = 0,1472$.

§. 5. Definito autem numero λ conſtructio primae lentis coronariae ita ſe habebit

Radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0,8101\,\Pi}{1,7544 - \sqrt{\lambda - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \frac{p}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0,8101\,\Pi}{0,2449 + \sqrt{\lambda - 1}}$

quocirca ſi confuſio a reliquis lentibus nata pro nihilo reputari poſſit, vt ſit $\lambda = 1,1472$, erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = 0,3837$$

ſicque pro prima lente habebimus

radium faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,5742.\,\Pi \\ \text{poſterioris} = 1,2887.\,\Pi \end{cases}$

cuius lentis conſtructio eo tutius ſuccedit, quod valor ipſius λ vnitatem parum ſuperat.

§. 6. Quia ſecunda lens cryſtallina, cuius diſtantia focalis reperta eſt $q = -0,4573\,\Pi$ vtrinque

 debet

debet eſſe aeque concaua, radius vtriusque faciei erit $= 1,20 . q = -0,5488$ II. Tertiae denique lentis coronariae cuius diſtantia focalis eſt $r = 0,5687$ II quia etiam vtrinque ponitur aeque conuexa, radius vtriusque faciei debet eſſe $1,06 . r = 0,6028$ II. Interuallum tandem lentis mediae ab vtraque extrema ſumatur $= \frac{1}{12} q = 0,0381$ II.

§. 7. Quia lentis cryſtallinae radius vtriusque faciei eſt $= 0,5488$ II, eius pars quarta ſemidiametrum dabit aperturae $= 0,1372$. II vnde talis lens compoſita ad multiplicationem $= m$ producendam adhiberi poterit ſumendo $0,1372 \,\Pi = \frac{m}{50}$, vnde fit $\Pi = \frac{m}{6,86}$; quae circumſtantia ſummum lucrum affert in teleſcopiis* contrahendis. Si enim ex. gr. multiplicatio $m = 100$ deſideretur, hoc praeſtari poterit ope talis lentis, cuius diſtantia focalis $\Pi = 14,58$ dig. ſiue nondum 15 dig. cum ante requirerentur 25 dig. Quod ſi autem etiam in his lentibus ſumere velimus $\Pi = \frac{m}{4}$ et ſemidiametrum aperturae $= \frac{m}{50}$ dig. iſtae lentes feliciſſimo cum ſucceſſu loco praecedentium ſubſtitui poterunt, quandoquidem laeues aberrationes a menſuris praeſcriptis hic multo minus ſunt pertimeſcendae.

PHYSICA.

PHYSICA.

DESCRIPTIO PISCIS, E COREGONORVM GENERE, RVSSICE RIAPVCHA DICTI, HISTORICO-ANATOMICA.

I. T. KOELREVTER.

Salmo (*Albula*) *maxillis edentulis* : *inferiore longiore*. LINN. *Syſt. Nat. ed.* 12. *p.* 512. *n.* 16. *Fn. Suec.* 353.

Coregonus edentulus, *maxilla inferiore longiore. Art. gen.* 9. *Syn.* 18. *Spec.* 40.

Albula minima GESN. *piſc.* 34. *Aldrov. ichth.* 660 *Ionſt. piſc.* 173. *t.* 30. *f.* 7. *Charl. onom.* 164. WILL. *ichth.* 186. *Raj. piſc.* 61.

Corpus totum cathetoplateum. Caput exiguum, ac, a latere adſpectum, fere triangulare: angulo antico, ad os ſc. ceteris acutiori. Ab maxillae ſuperioris ora angulus eminens, latior, ad verticem anguſtior paullo, in medium caput excurrebat, ab alio tranſuerſo, minus notabili, in vnius, circiter lineae diſtantia a dorſi principio, exceptus. Ductus oſſei, cauernoſi, muciferi in vtroque capitis latere varii. Ore clauſo, maxilla inferior

rior ſuperiore paullo longior, aperto autem ſuper eandem notabiliter exporrecta. Oculi, pro magnitudine piſcis, inprimis vero capitis ratione, grandes. Iris argentei coloris. Operculum branchiarum tribus conſtare mihi videbatur laminis, quarum ſuperior maxima, ſuperne rotundata, inferne ſubacuta, media minor, acinaciformis ſ. cultrata, infima vero minima, antrorſumque acuminata. Margo inſuper operculi branchiarum, ad aperturam firmius claudendam, membrana auctus. Oſſicula membranae branchioſtegae ſeptem. Hiatus branchiarum, operculo diducto, ampliſſimus.

Dorſum ſubconuexum, ante pinnam dorſualem vero in acumen elatius deſinens. Abdomen circa pinnas pectorales conuexum, ad pinnas ventrales fere planum, circa anum iterum conuexum, inter pinnae ani finem et caudae principium vero planiuſculum.

Prona corporis facies e viridescenti fuſca, eiusque latera argentei ſplendoris.

Squamae tenues, ſubrotundae, integrae, ſat denſe conſtipatae, a corpore tamen facile ſeparabiles.

Linea longitudinalis, ab ortu ſuo ad aliquot linearum diſtantiam leuiter tantum deorſum flexa, recto abhinc tramite in caudam vsque excurrebat, dorſo, quam ventri, vndique propior. Punctorum vel tubulorum linearium, lineam hanc conſtituentium, numerus circiter LXX ad LXXX.

Pinna

Pinna dorſi prima radiorum duodecim; quorum tres primi ſimplices, ceteri vero omnes ramoſi. Longitudo primi, ſecundo arcte adpreſſi, $1\frac{2}{3}'''$, ſecundi $6'''$, tertii, omnium longiſſimi, $11'''$; ſequentes ex ordine iterum breuiores.

Pinna dorſi ſecunda, adipoſa, ſubfalcata, a principio fixo ad finem ipſius liberum $5\frac{1}{2}'''$ longa, et $2'''$ circiter lata.

Pinnae pectorales radiorum quindecim, quorum primus longior reliquis, fortiorque.

Pinnae ventrales radiorum vndecim, quorum primus omnium fortiſſimus ac ſimplex, ſecundus iſto parum longior, ſubramoſus omniumque longiſſimus, reliqui ex ordine iterum breuiores ac ramoſi, vltimo excepto, ſimplici.

Pinna ani radiorum quindecim, quorum primus omnium breuiſſimus.

Pinna caudae radiorum circiter XXXIII.

Pinnae dorſi ac caudae, itidemque ſquamae, lineae longitudinali proximae, punctis nigricantibus pluribus conſperſae; ceterae pinnae pallidae, albeſcentes, punctisque tantum rarioribus notatae.

Anatome.

Abdomine aperto, viſcera in conſpectum veniebant ſequentia. Hepatis pars in hypochondrio ſiniſtro, longitudine ſex linearum, verſus ſuperiora

 latior

latior et craſſior, inferiora verſus tenuior ac anguſtior. In hypochondrio dextro appendices pylori, quarum plurimae non ſolum totam ventriculi ſummitatem obtegebant, ſed etiam ad latus eius ſiniſtrum deflectebantur. Maximus tamen earum numerus dextrum ventriculi latus occupabat, ex abdominis imo antrorſum ac oblique deorſum flexarum, inque ſitu naturali apicibus tantum caecis prominentium. Appendicum harum, maxime inferiorum extremitates in decimae vel vndecimae coſtarum vicinia, ad ventriculi baſin conſpiciendae. Latus autem ventriculi anticum et, quoad maximam partem quoque ſiniſtrum, nudum apparebat. Ipſe ventriculus in medio abdomine ſitus.

Infra huius baſin ſubſtantia quaedam e fuſco rubens, lien ſc. eminebat, cuius interno lateri tractus pinguedineus, recta ſuper veſicam aeream extenſus, contiguus erat. In hypochondrio ſiniſtro lactes eiusdem lateris, ſub lobo hepatis ſupra deſcripto primo in conſpectum veniebant, initio quidem craſſae, ſenſim vero ſenſimque attenuatae, iterumque tandem mole increſcentes, forma quodammodo triangulares. Lactium dextrarum minima tantum pars viſui patebat, earumque lateri interno inteſtinum recta deorſum extenſum parallelo ſub ſitu proxime adiacebat. Haecque ſunt, quae de viſceribus in ſitu naturali relictis dicenda habeo.

Viſceribus exemtis, ſingulisque ſeorſim conſideratis, hepar primo in duas partes, dextram ſc. mino-

minorem, ſiniſtramque paullo maiorem diuiſum, et quaſi cordatum erat. Concaua ipſius facies, membranae ope, radicibus appendicum primarum, quae pyloro proxime adſtant, annexa.

Veſicula fellis valde oblonga. Ductus choledochus ſatis amplus, ſiniſtrae hepatis portioni arctiſſime adhaerens, ac inter appendices pylori ſuperiores deflexus, duodenum, in diſtantia vnius circiter lineae ab eius principio, intrabat.

Oeſophagus ſub diaphragmate $10'''$ longus, $1\frac{1}{2}'''$ latus, ac inferius, ſub ingreſſu ſuo in ventriculum, incuruatus.

Ventriculus ſubſtantiae firmioris ac rubicundioris, $7\frac{1}{2}'''$ longus ac $2\frac{1}{3}'''$ latus, diaphragma verſus reflectebatur, oeſophagoque incumbebat. Summitas ipſius circa pylorum obtuſa et coarctata. Vtriusque, tam oeſophagi, quam ventriculi ſuperficies interior rugis quinque longitudinalibus diſtincta, quae, muco tenaci, quo obtectae erant, abſterſo, optimae conſpiciebantur. Principium pylori ruga e contrario transuerſa munitum.

Appendices pylori LXXI, longitudine $2 - 3'''$; harum triginta circiter illi ipſi circumſitae, ceterae vero omnes ad ſex lineas vsque duodeni ſummitati a latere appenſae.

Duodenum circa initium amplius, inde vero ſenſim ſenſimque anguſtius, pone poſticam ventriculi faciem paululumque dextrorſum flexum, recto

 dein

dein tramite, ſub vlteriori tractus inteſtinalis ſpecie, ad anum vsque excurrebat.

Lien tam fundo ventriculi ac duodeno, quam tractui pinguedineo, membranarum vaſorumque ſanguineorum ope, connexus.

Lactes vtriusque lateris, ſupra mediam ipſarum partem, craſſiores varioque modo ſinuoſae, faciei ventriculi poſticae, aereaeque veſicae ſummitati cohaerebant: dextrae ſiniſtris latiores ac craſſiores, flauoque colore, ob veſiculae felleae viciniam, tinctae. Ita ſc. erant conformatae menſe Nouembri, quo anatomen hanc ſuſceperam.

Veſica aerea ſimplex, vtramque extremitatem verſus anguſtior. Ductus aereus tres circiter quatuorue lineas longus, vix vltra quartam lineae partem latus, oeſophagum, in diſtantia $6\frac{1}{2}'''$ ab eiusdem fine, intrabat; ſub ipſo ingreſſu notabiliter conſtrictus.

Renes ſecundum totam abdominis longitudinem extenſi, a ſumma ad imam vsque partem ſenſim decreſcentes, ac a ſpina dorſi in duos quaſi diſtinctos diuiſi, extremitate inferiore in vrethram ſeu ductum vrinarium communem, orificio ſuo pone veſicularum ſeminalium oſtium patentem, deſinebant. Veſica vrinaria, qua vere caret piſcis, improprie iſte diceretur, cum valde anguſtus, nec vlla parte liber ſit.

Peri-

Peritoneum argentei ſplendoris, punctis nigricantibus, minoribus rarius adſperſum, leuiſſimique cum renum ſubſtantia nexus.

Coſtae viginti nouem, in vtroque latere.

In Piſce *Foemina*, $7''$, $2'''$ longo, indiuiduo ſc. huius ſpeciei facile omnium maximo, Decembris initio ouarium maximum, ſimplex ſiue vnicum, totum fere abdominis cauum replens. Ouula innumera, e rufo flaueſcentia, diametri $\frac{2}{3}'''$, vix amplius inter ſe cohaerentia, adeoque maturitati ac emiſſioni proxima. Lien ouato-lanceolatus, ex atro rubens, $4\frac{1}{2}'''$ longus, ſuperne $1\frac{2}{3}'''$ latus, cum ventriculi fundo, dextri lateris appendicibus ouarioque lacertulorum carneorum vel vaſorum ſanguineorum ope coniunctus. Ouiductus poſt anum, vrethrae vero orificium pone ouiductum conſpiciendum.

Obſeru. Tunica ventriculi exterior in vno alteroue harum piſcium indiuiduo hinc inde in tubercula aliquot lentiformia, duriuſcula ac ſubrubella erat eleuata, quibus caute diſſectis, comparuit, ſingulum eorundem habitaculum fuiſſe vermis Gordii *marini* vel *lacuſtris*, (vtrumque enim vnum eundemque eſſe, nullus dubito;) in ſpiram conuoluti. LINN. Syſt. Nat. ed. 12. p. 1076. n°. 4 et 5. Semel atque iterum etiam eiusmodi tubercula, Gordium includentia, radiis branchiarum vaſculoſis innata vidi.

Menſura.

	Poll.	Lin. Paris.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices pinnae caudae longior - - -	6	2
Ab oris extremo ad oculi medium - -	—	$4\frac{1}{2}$
—— —— —— ad marginem operc. branch. poſticum - - - - - - -	1	1
—— —— —— ad pinnas pectorales - -	1	1
—— —— —— ad pinnam dorſi primam	2	$4\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnam dorſi ſecundam	4	$3\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnas ventrales - -	2	$5\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnae ani principium	3	8
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	—	11
—— —— pinnae dorſi primae, ad baſin -	—	$6\frac{2}{3}$
—— —— —— —— ſecundae ad baſin -	—	3
—— —— pinnarum ventralium - - -	—	$10\frac{1}{3}$
—— —— pinnae ani, ad baſin - - -	—	9
—— —— pinnae caudae, tota - - -	1	3
A fine fixo pinnae dorſ. primae ad pinnae dorſ. ſecundae principium - -	1	$4\frac{1}{3}$
—— —— pinnae dorſi ſecundae ad pinnae caudae principium - - - -	—	$5\frac{1}{2}$
A principio pinnarum pectoralium ad principium pinnarum ventralium -	1	6
—— —— pinnarum ventralium ad pinnae ani principium - - - -	1	3
A fine fixo pinnae ani ad pinnae caudae principium - - - - - - -	—	6

Dia-

	Poll.	Lin. paris.
Diameter oculi perpendicular. - - - -	—	3
—— —— —— horizontalis - - - - - -	—	$3\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	—	$3\frac{1}{2}$
—— —— —— —— ad dorſi initium - -	—	$5\frac{1}{2}$
—— —— —— —— ſex lin. ante pinn. dorſ. primam - - - - - - - -	—	$6\frac{2}{3}$
—— —— —— —— ad pinn. dorſ. ſecundae principium - - - - - - -	—	$3\frac{1}{3}$
—— —— —— —— ad pinnae caudae principium - - - - - - - - -	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium	—	6
—— —— —— —— iuxta dorſi initium	—	9
—— —— —— —— per pinnae dorſ. primae principium - - - -	— 1	$2\frac{1}{2}$
—— —— —— —— —— —— —— finem	1	2
—— —— —— —— per pinnae ani principium - - - - - - - -	—	$10\frac{2}{3}$
—— —— —— —— —— finem fixum -	—	$6\frac{1}{2}$
—— —— —— —— pinnae caudae principium - - - - - - -	—	5

DE-

DESCRIPTIO PISCIS, E GADORVM GENERE, RVSSIS *SAIDA* DICTI.

Auctore

I. LEPECHIN.

Mare album, cuius ambitum mihi perluſtrare licuit, varia animantium et vegetabilium marinorum genera conſpicienda et colligenda praebuit, ex quorum penu nunc duos piſciculos in medium proferre placet. Primus eorum eſto.

Deſcriptio. Tab. V.

Gadus ſaida.

Ratione trunci et formae externae plurimum conuenit cum gado *Nauaga* Koelreuteri (*). Capitis pars anterior a roſtro ad oculos non nihil compreſſa, poſterior magis rotundata et cathetoplatea.

Maxilla

(*) Vid. Nov. Comment. Acad. Scientiar. Petropol. T. XIV. p. 484. Dedita opera citaui Clariſſ. Koelrevter ad nomen ruthenum; non confundendus enim eſt ipſius gadus cum *gado callaria* Illuſtr. Linnaei, licet Clariſſ. diſſertationis Auctor eundem eſſe putet. *Callarias* Celeb. Linn. dicitur cirratus et eſt idem, quem Clariſſ. Klein in hiſtoria piſcium miſſ. V. p. 6. n. 5. ſub nomine *callariae barbati lituris maculisque fuſcis varii, gula ventreque albi-*

Maxilla inferior acutiuſcula paululum longior ſuperiore; in medio ipſius exiguus vixque conſpicuus reperitur cirrus. Maxilla ſuperior magis obtuſa et rotundata, vtraque per totum marginem inſtructa denticulis plurimis, acutis, ſetaceis, retrorſum hamatis; horum duplex quoque obſeruatur ordo in cartilagine palatina arcum referente. Ad introitum faucium, vbi finis ſuperior branchiarum implan-

---

albicantibus iride flauicante nigro mixta deſcripſit et icone T. I. f. 2. ſat bene expreſſit. Quamuis non eſt inficiendum gadum *Nauaga* itidem eſſe cirratum, ſed cirro minimo, et vix vltra lineam longo, quod et Clariſſ. Koelrevter l. c. p. 428. obſeruat. In mari albo praeſertim ſinu ipſius Candalakſcoy (кандалакская губа) capitur gadi ſpecies, quae ſub nomine rutheno мелкая треска (Morrhua minor) venit et ratione liturarum ac conformationis externae cum gado *Nauaga* haud parum conuenit, et iconem ſuccinctam que deſcriptionem Clariſſ. Kleinii ex amuſſim refert. Sed ſi vterque recens inter ſe confertur piſcis, magnum omnino occurrit diſcrimen. 1) Cirrus mentalis, vt antea dictum, in *Nauaga* exiguus, in *Morrhua* minori ſat euidens. 2) Pondus Morrhuae minoris non raro ad libras quinque increſcit, *Nauagae* vero intra vnam libram conſiſtit. 3) Color in *Morrhua* minori magis oliuaceus, in *Nauaga* obſcurior vel albidor. 4) Pinna caudae ipſa in Morrhua minori magis abrupta, in *Nauaga* autem rotundata. His collatis nullus inferre dubito, *Morrhuam* minorem eſſe gadum *Callariam* Illuſtr. Linnaei, *Callariam* V. Clariſſ. Kleinii; *Nauagam vero* Clariſſ. Koelrevteri, nouam, aut certe non ſufficienter ab Auctoribus deſcriptam ſpeciem cenſeri debere. Deſcriptio Koelreutiana optima, ſed icon, ratione colorum, mala.

implantatur, adſunt vtrinque duo corpuſcula dura, lentiformia, denticulis aſpera. Lingua craſſa, nigris punctis irrorata, ſoluta, rictus amplus.

Vertex capitis glaber, ſordide niger, nares vnico foramine rotundo peruiae, oculis quam roſtro propiores. Oculi ampli, membrana nictitans ſemilunaris, irides coeruleſcentes, pupilla ſordide alba.

Opercula branchiarum tribus conſtant laminis oſſeis: harum baſin conſtituens lunata; radios membranae branchioſtegae reſpiciens elliptica; ad angulum aperturae ſuperiorem ſita triangularis, bicuſpidata. Omnes ſunt coloris argentei, punctulis nigris adſperſae, tectae cuti fuſca in medio tantillum coeruleſcente. Membrana branchioſtega alba, radiis ſex non nihil arcuatis ſuffulta.

Branchiae vtrinque quatuor, ſuperius ad angulum obtuſum geniculatae, inferius tantillum arcuatae. In parte conuexa omnium reperiuntur plumae duplicis ordinis laxae; in parte concaua margo exterior primae ſetis longioribus inſtruitur, interior vero, vt et reliquarum pars concaua, faſciculis brevibus per interualla diſpoſitis adornantur.

Dorſum non multum ſupra planitiem capitis eleuatum, conuexum, fere in linea recta ad caudam vsque percurrens, inter caput et pinnam dorſi anteriorem leuiter ſulcatum. Venter valde arcuatus, craſſus vsque ad anum, inde ſenſim ſenſimque ad pinnam caudae anguſtatur. Anus capiti propior quam caudae.

Linea

Linea lateralis recta propior dorſo. Color piſcis varius: dorſum vndique ad lineam lateralem ſorditum, punctis nigricantibus inuicem confluentibus adſperſum; latera ventris coeruleſcunt, cum tranſparente albedine, imus venter, gula et reliquus truncus albent.

Pinnae dorſi tres malacopterygiae, triangulares, fuſcae, radiis albicantibus.

Pinna prima medio fere ventri opponitur et conſtat radiis 10 — 11.

Secunda reſpondet pinnae ani primae et radiis 16 — 17 ſuſtentatur, quorum vltimi breuiſſimi.

Tertia e diametro opponitur pinnae ani ſecundae, habet que 20. oſſicula; eorum quartum longiſſimum, reliqua ſenſim decreſcunt.

Pinnae anales duae, quarum baſes verſus anteriora obſcure - coeruleae.

Pinna ani prima ex triangulari oblonga, radiorum 18. quinto reliquis longiore.

Secunda itidem trigona, ſuffulta radiis 20.

Pinnae ventrales ad iugulum ſitae, baſi albicantes, 5 — 6 radiis ſuſtentatae, eorum ſecundus in ſetam ſat longam terminatur.

Pinnae pectorales reliquis concolores radiorum 16. horum ſeptimus, numerando a ſuperioribus, longior, reliqui ſecundum ordinem vtrinque decreſcunt.

Pinna caudalis bifurca radiorum 24 — 26.

Ichthyotomia.

Peritoneum tenue, extus argenteum, intus innumeris punctis nigris adſperſum. Cauitas abdominis repleta erat copioſa pinguedine, ita vt omnia viſcera adipe ſepulta viderentur. Gula (*a*) ampla 5''' in diametro, terminata in ventriculum (*b*) longum ſaccum formantem, ſecundum abdominis longitudinem protenſum, et tantulum ad hypochondrium ſiniſtrum inclinatum.

Longitudo ventriculi a diaphragmate ad fundum 11'' et 11''', Latitudo maxima XI'''; in diſtantia I'' et VII''' a fundo ventriculi in ſuperficie anteriori prorumpit canalis arcuatus V'''. longus IV''' craſſus, qui facta inſigni plica terminatur in inteſtinum duodenum et loco pylori inſeruit. Extremum ipſius vndique ambiunt appendices coecae, vermiformes dictae, quarum numerus inter XXXV et IL. variare ſolet. Appendices quaedam ſimplices, quaedam vero coagmentatae, et quaſi per faſciculos diſpoſitae videbantur. In proceſſibus his corpuſcula innumera, ſubrotunda, ſucco viſcido flauicanti turgidula, cernere licuit (*).

Inte-

(*) Ex hac ſimplici ventriculi fabrica magna Naturae induſtria in temperanda huius generis piſcium voracitate apparet. Ventriculus ſimplex fere ad perpendiculum dependens, non ſat habet virium ad retinendos diutius cibos; hinc duo obſtacula effinxit Natura 1) exortum canalis ſub angulo acuto, plica recluſum 2) finem ipſius itidem intortum

Inteſtinum duodenum, ab initio largius, ſurſum ad diaphragma, et parum ad hypochondrium dextrum inclinatum per $V\frac{1}{2}'''$ aſſurgit, ibique facta plica in eodem hypochondrio deſcendit ſub forma inteſtinorum tenuium. Inde interuallo IV''' ab ano ſurſum flectitur et in medio fere abdomine percurrit vsque ad appendices coecas inferiores, vbi vltima inflexione facta iuxta fundum ventriculi et latus ſiniſtrum ima petebat ad anum.

Oeſophagi interior tunica rugis longitudinalibus et transuerſalibus quam plurimis obſita erat, quae in ventriculum deſcendens naturam ſuam non immutauit quidem; ſed rugarum numerus erat imminutus. Pylorus (*c*) modo oſculis ex appendicibus coecis hiantibus, et quodammodo protuberantibus, erat obſitus. Reliquus inteſtinorum tractus nihil praecipui habebat, praeter orificium ductus cholidochi, quod tenui membranula tegebatur. Longitudo omnium inteſtinorum vna cum ventriculo vix longitudinem piſcis ſuperabat.

Hepar magnam abdominis partem adimplebat, diuiſum in partes duas, quarum altera breuior et mole minor, ſiniſtrum occupabat hypochondrium, altera in dextro erat ſita. Huius extremitas infe-

tortum formauit ne cibi cito elabi poſſent. Capacitatem ipſius adauxit proceſſibus vermiformibus, quibus et fontes liquoris ſuponacei addidit, vt hic ciborum natura in ſuccum nutritiuum mutaretur, ſic breuitatem primarum viarum obſtaculis dictis ſuppleuit.

rior iterum in duos ſubdiuiſa lobos, quorum ſuperior multo breuior inferiore antrorſum transuerſimque in abdomine flexus, ſiniſtrum ventriculi latus leuiter tangebat, inferior vero ipſam ſuperficiem poſticam ſubibat. Media atque anterior hepatis portio incumbebat ventriculi ſummitati, a ſummo ad imum 7‴ longa; poſtica vero magno ſulco, ad vtrumque oeſophagi latus reperiundo immerſa, cohaerebat diaphragmati per innumera vaſa ſanguinea. Veſicula fellea ex coeruleo viridis deliteſcebat in fouea conſpiciunda ſub dextra ac poſtica portione hepatis. Subſtantia inſignis huius viſceris ſat erat firma atque tenax, color ſubrubellus, circa veſiculam felleam autem liuidus. Lien itidem rubellus, et prouti in piſcibus ſemper obſeruatur, admodum longus, lobulo triangulari terminatus.

Ouaria duo, longa, albida, ouis turgida, in principio in vnum corpus coalita, extremitatibus denuo ſeiuncta. Quodlibet eorum proprio orificio in communem ouiductum patebat. Lactes maris variis lobis conſpicuae erant.

Veſica aërea, ſimplex, longa, albida, glutinoſa, mollis, ad ſummitatem bicornis.

Viſcus renale ſanguinolentum, ſpinae dorſi, retro veſicam aeream, adhaerens, in vnum corpus coalitum, mediante tela celuloſa ligatum. Vreteres variis ſurculis orti, ad fines renum conſpicui, ſundum veſicae vrinariae oblique patebant. Veſica vrinaria ad coniunctionem ouariorum ſita, collo

lo ſuo oſtium horum commune, fundo vero abdominis finem reſpiciebat.

Cor validum, quadrilaterum, angulis obtuſis, cui ſuperius et quodammodo ad latus inſidet auricula rugoſa, ventriculo multo debilior. Aorta ſat firma, magna. Squammae ſunt minutiſſimae, et valde tenaciter corpori adhaerent.

Gadorum hiſtoria manca et imperfecta, bonisque iconibus vt plurimum deſtituta, ſynonima Auctorum ad noſtrum gadum pertinentia ſicco pede tranſire iubet. Interim piſcem noſtrum ſequentibus definiamus verbis.

Gadus dorſo tripterygio, ore cirro minimo, cauda bifurca, radio ventralium ſecundo in longam ſetam producto, linea laterali recta.

Menſe octobri et Nouembri gadus Nauaga magna in copia littora maris albi ſalutat et hamo capitur. Eius tanta dictis menſibus vbique eſt frequentia, vt communem quotidianumque incolarum conſtituat cibum, et viliori pretio; prae reliquis piſcium generibus, venit. Inter aceruos *Navagae* et noſter apportatur gadus, qui alias ſedulo perquiritur et reiicitur. Caro ipſius flaccida, macilenta, et exſucca, minus palato arridet, et ob colorem tetrum luridumque *ſaida* ab omnibus ſpernitur.

Lon-

Dimenſio ſecundum pedum Pariſinum.

Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	$8''$	$10'''$
—— —— —— —— ad initium P. D. vltim.	5	8
—— —— —— —— —— —— P. D. ſec.	3	8
—— —— —— —— —— —— P. D. prim.	2	8
Longitudo ab apice mandibulae inferioris ad P. A. ſec.	5	6
—— —— —— —— —— ad P. A. Prim.	3	6
—— —— —— —— —— —— ad P. Pect.	2	-
—— —— —— —— —— —— ad. P. Abd.	1	8
Ab apice roſtri ad canthum oculi anteriorem	-	8
—— —— —— ad nares	-	5
Latitudo pinn. I. dorſalis ad baſin	1	-
Longitudo maxima	-	7
Latitudo P. D. ſecundae	1	-
Longitud.	-	5
Latitudo P. D. tertiae	-	10
Longitudo	-	9
Latitudo P. A. ſecund.	1	1
Longitudo	-	$5\frac{1}{2}$
Latitudo P. A. prim.	1	2
Longitudo	-	6
Latitudo pinn. abdom.	-	1
Longitudo ſumma	-	9
Circumferentia rictus	1	6
Craſſities capitis ad oculos	3	-
—— —— —— in medio	3	4
—— —— —— ad nucham	3	8

Craſſi-

Craſſities corporis ad P. An. primam	-	2'' — 10'''
—— —— —— ad P. An. ſecund.	-	1 — 8
—— —— —— ad P. Caud.	- -	- — 10
—— —— —— ad P. D. primam	-	3 — 6
—— —— —— pone P. Pect.	- -	3 — 8
Longitudo caudae maxima	- - -	1 — 4
—— —— ad bifurcationem caud.	- -	- — 4.

CYCLOPTERVS LINEATVS.

Cyclopterorum gens numeroſa quoque in mari albo obſeruatur, et praecipue *Cyclopteri Lumpi*, qui incolis *Pinogor* (пиногорь) audit. Vidi etiam et *Cyclopterum Liparem* circa inſulam ab vrſo denominata (мѣдвежій островъ); his addo nouam minusque cognitam ſpeciem, quae coloribus ſuis ad piſces exoticos accedit, quam que *Cyclopterum Lineatum* vocabo.

Deſcriptio. Tab. V. Fig. 2. 3.

Caput plagioplateum, decliue ad mandibulas rotundatum, obtuſum, corpore paulo latius. Nares foraminulo rotundo protuberante aperiuntur. Oculi mediam capitis partem occupant; irides pallide coeruleae, pupilla alba.

Mandibula ſuperior vltra inferiorem prominet, labra cuti craſſa tecta; rictus amplus, dentes duplici ordine per vtramque mandibulam diſpoſiti, minimi, conferti, acuti; lingua parua, ſoluta. Vtrumque labrum obſitum eſt verrucis cutaneis paruis, quae per opercula branchiarum continuantur et quidem a labro ſuperiore per mediam partem, ab inferiore vero per marginem inferiorem.

Opercula branchiarum ad angulum ſuperiorem terminantur in proceſſum vtcunque triangularem. Membrana branchioſtega vndique clauſa, vnico radio ſuffulta.

Cor-

Corpus a capite ad anum teres ferme cum ventre parum prominente ; ad pinnas pectorales craſſiſſimum , ab ano ad extremum caudae e lateribus compreſſum et attenuatum. Anus capiti propior quam caudae.

Dorſum a capite ad pinnam dorſalem eleuatum, gibbum et latum eſt.

Pinnae Pectorales maximae radiorum XXVI, horum ſex anteriores ad medium fere ſoluti , in ſequentes 7, 8, 9 atque 10 , multo ſunt breuiores , reliqui numero XIV ſenſim ſenſimque iterum longitudine creſcunt , vnde inciſura lunaris in pinnis conſpicitur.

Pinnae ventrales inter baſes pinnarum pectoralium ſitae ſunt , et , prouti huius generis piſcium conditio fert , concreſcunt in orbiculum ſat robuſtum et carnoſum , marginibus protuberantem , medio cauum. Cauitas exaratur V. rugis transuerſalibus cum interſecante vna ruga longitudinali. Margo vero obſidetur tuberculis , papillosis , rubicundis ; quorum auxilio piſcis ſaxis et aliis corporibus duris adhaerere ſolet.

Pinna dorſalis vnica 1'' et 11''' longa 1''' lata ſuſtentur radiis XXXVI. quorum vltimi breuiores , cum radiis pinnae caudalis confunduntur.

Pinna ani ab ipſo ano per corpus excurrens conſtat radiis XXVIII, quorum vltimi itidem breviores cum radiis caudae coniunguntur.

Cauda minima radiis V et VIII, mediis longioribus. Squammae nullae, ſed integrum corpus copioſo muco obducitur.

Color totius piſcis caſtaneus, excepto ventre cum vicina gula pallidioribus, tuberculisque labri inferioris dilute roſeis. Per caput atque latera corporis ducuntur lineae longitudinales, ſat latae, et partim rectae, partim vndulatae, ad caudam conuergentes, exalbidae. Harum tria paria numerantur: primum par per capitis verticem ducitur, et iuxta pinnam dorſi vtrinque decurrit; ſecundum par tranſit per oculos et medium corpus exornat; tertium atque vltimum per capitis latera et tractum pinnae analis ſequitur. Pinna analis et dorſalis corpori ſunt concolores, cum tranſparentibus hinc inde faſciolis transuerſalibus pallidioribus. Pinnarum pectoralium color ad colorem ventris accedit.

Ad oſtium maris albi circa tres Inſulas piſcandis ſertulariis aliisque corporibus marinis intentus deſcriptum piſciculum obtinui. Ruthenum nomen neque mihi, neque incolis conſtat. Non poſſum etiam praedicare vtrum perfectae aetatis vel junior piſciculus ſit captus. Ichthyotomiam itidem exhibere non valeo ob vnicum indiuiduum, quod poſſideo, ſed coronidis loco dimenſionem partium externarum addo.

Lon-

Longitudo totius piſciculi - - - -	$2'' - 1'''$	Dimenſio ad pedem pariſianum.
Ab apice medii roſtri ad oculos - - - -	- - 2	
—— —— —— ad angulum inciſurae branchiarum	- - 6	
Inter aperturam narium et oculos - -	- - 1	
—— —— —— ad pinnam dorſi - - -	- - 7	
—— —— —— ad pinnas pectoral. - -	- - $6\frac{1}{2}$	
A mandibula inferiore ad orbiculum pinn. ventr.	- - $3\frac{1}{2}$	
—— —— —— ad pinnam Ani - - -	- - 9	
Diameter orbiculi pinnar. ventral. - -	- - 2	
Latitudo pinnar. pectoral. ad baſin - -	- - $3\frac{1}{2}$	
Longitudo ſumma - - - - -	- - 6	
Circumferentia rictus oris - - - -	- - 5	
Oculi diſtant - - - - - -	- - 3	
Inter foramina narium - - - -	- - 2	
Craſſities capitis circulo per oculos ducto	1 - 2	
—— —— —— —— per nares - -	1 - $2\frac{1}{2}$	
—— —— —— —— ad nucham - -	1 - 6	
—— —— —— retro orbicul. pinar pectoral.	1 - 5	
—— —— —— —— —— ad anum - -	1 - -	
Longitudo capitis - - - - -	- - 5	

Piſciculus magnitudine naturali Fig. 2. ſiſtitur pronus, Fig. 3. vero ſupinus.

DESCRIPTIONVM PLANTARVM SIBIRICARVM CONTINVATIO.

Auctore

E. LAXMANN.

In deſcribendis plantis ſibiricis pergens, nonnullas illarum tantum nunc botanicis offerre volui, quas in ſummis altaicorum montium aeterna niue tectorum cacuminibus legi, quaeque mihi maxime ſingulares viſae ſunt.

I.

Tab. V. Fig. 1. GENTIANA *grandiflora* corolla quinquefida, maxima, foliis radicalibus, plurimis, lanceolatis, compactis, horizontalibus.

DESR. RADIX fibroſa, inter muſcos repens, perennis.

EOLIA radicalia, plurima, lanceolata, compacta, glabra, margine membranacea, horizontalia.

CAVLIS florente adhuc planta nullus, poſt floreſcentia n vero exſurgens pollicaris, ſuſtentans par foliorum vaginantium, erectorum, membranula albida cinctorum.

FLOS

FLOS e medio foliorum exſurgens, vnicus, erectus, inter congeneres maximus.

CALYCIS *perianthium* tubulatum, quinquangulare, corolla dimidio breuius, quinquefidum, laciniis lanceolatis, integerrimis membrana cinctis.

COROLLA infundibuliformis pulcherrimae coerulea; *tubo* calyce duplo longiore verſus faucem ampliore; *limbo* quinquefido plano; *laciniis* ouatis integerrimis; *fauce* plicata, plicarum laciniis lanceolatis adeo magnis, vt putes ipſum limbum decemfidum eſſe.

Habitat in ſummi cacuminis alpium Maloi Altai dictarum planitie muſcoſa prope niuem. Circa finem Iunii florentem inueni.

II.

SIBBALDIA *altaica* foliorum radicalium apicibus tripartitis, calycibus quinquefidis petalis retuſis. Tab V. Fig. 2.

DESCR. RADIX lignoſa, in rupium fiſſuris repens, fibroſa, plurimos cauliculos et amplum foliorum ceſpitem fundens.

CAVLES plures, pollicares, obliqui, teretes in ramos ſparſos ſe diuidentes.

FOLIA

FOLIA *radicalia* plurima, vsque ad apicem linearia; apicibus dilatatis tripartitis; laciniis tribus linearibus integerrimis; *caulina* plerumque integra, rarius paruula incisura notata.

FLORES ſolitarii, magni, terminantes ramos.

CALYCIS *perianthium* cylindricum, quinquefidum, laciniis lanceolatis, acutis, integerrimis, patentibus.

COROLLAE petala quinque, ouata, retuſa, patentiſſima, laetiſſime purpurea, calycis laciniis duplo longiora.

STAMINVM *filamenta* quinque, breuia, cylindro perianthii adnata; *antherae* ſimplices lineares in diuiſuris laciniarum.

PISTILLI *Germina* quinque ouata glabra in fundo calylis pappo piloſo repleto; *ſtyli* et *ſtigmata* vt in congeneribus.

Tota planta exceptis petalis pilis raris validis adſperſa eſt.

Habitat in fiſſuris orientalibus inque collibus glareoſis altiſſimorum rupium. Floret circa initium Iulii.

NB. Circa genus Sibbaldiae notare liceat: Differt a noſtra planta *Sibbaldia procumbens* in Florae daniae Faſc. I. Tab. XXXII. optime delineata, foliis petiolatis ternatis, foliolis truncatis tridentatis, caule ſimplici, floribus in capitulum

tulum congeſtis, calycibus decemfidis, petalis luteis. *Sibbaldia* autem *erecta*, quae iam ad Wolgam occurrit, quaeque a STELLERO Ircutiae lecta, toto coelo diuerſa ab illa eſt, cuius iconem Ammanni Tab. XV. continet. Haec Ammanniana planta in transbaicalenſibus tantum regionibus occurrit, caule gaudet ramoſiſſimo fere proſtrato, foliis parcius diuiſis axillaribus et floribus in varietate praeſertim alpina maioribus; illius autem caulis ſimplex eſt ſummitate tantum ramoſa, foliis ornatur per totum caulem confertiſſimis, multifidis, laciniis linearibus, floribus ſemper minoribus. Putarem itaque Botanicis non ingratum fore, ſi huius plantae exactam figuram quis traderet.

III.

ORNITHOGALVM *vniflorum* foliis caulinis alternis, vaginantibus, pedunculo vnifloro. Ornithogalum ſcapo diphyllo, pedunculo vnifloro. LINN. Mant. pag. 62. Tab. VI. Fig. 2.

DESCR. RADIX bulboſa, ouata, oui hirundinis magnitudine, plurimas fibras filiformes emittens.

CAVLIS e bulbo adulto vel trienni liliaceus, ſpithamaeus, teres, in medio craſſior verſus vtramque extremitatem attenuatus.

FOLIA bina rariſſime tria, validiori caulis parti affixa, alterna, vaginantia, lanceolata, obtuſa, patentia, dimidiam longitudinem caulis aequantia.

FLOS vnicus, terminans caulem, luteus, inter maiores in ſuo genere numerandus; vel vt Illuſtris LINNAEI verbis vtar: eſt Tulipae ſylueſtris flore dimidio minor, ſed Ornithogali lutei triplo maior.

COROLLAE *petala* ſex lanceolata, obtuſa, patentia, ſubtus ad baſin virideſcentia. Reliquae fructificationis partes congeneribus ſimiles.

Habitat in ſummis montium Maloi Altai et Sinie Sopka fiſſuris rupeſtribus verſus ſeptentrionem ſitis. Floret circa medium Iunii, illa autem ſpecimina, quae in horto Barnaulenſi colui, primo vere cum reliquis liliaceis floruere.

IV.

Tab. VII. Fig. 1. ORNITHOGALVM *altaicum* ſcapo tereti quadriphyllo, petalis ouatis trineruibus, ſtaminibus ſubulatis.

DESCR. RADIX bulboſa, bulbo oblongo paruo, fibras longiſſimas emittente.

CAVLIS liliaceus, ſimpliciſſimus, teres, ſpithamaeus, erectus, foliolis quatuor cinctus.

FOLIA

FOLIA *radicalia* bina, teretia, erecta, caule paulo breuiora; *caulina* in ſuperiori ſemiſſe caulis, alterna, amplexicaulia, lineari lanceolata, patentiſſima, verſus apicem ſenſim minora.

FLOS plerumque vnicus, terminans caulem, magnitudine floribus Ornithogali narbonenſis aequalis; rariſſime caulis biflorus occurrit.

COROLLA hexapetala, patens, *petalis* ouatis albidis, trineruibus, baſi neruisque fuſcis.

STAMINVM *filamenta* ſex ſubulata, corolla dimidio breuiora, *antherae* oblongae.

PISTILLI *germen* oblongum, trigonum; *ſtylus* ſubulatus, perſiſtens, germine paulo breuior; *ſtigma* capitatum triangulare.

Habitat in ſummis fiſſuris altiſſimarum rupium ipſorum montium altaienſium. Poſtremis diebus Iunii menſis florentem legi.

V.

POLYGONVM *ſibiricum* floribus octandris, foliis haſtatis, caule inermi. Tab. VII. Fig. 2.

DESCR. RADIX perennis, ramoſo fibroſa, articularis, ſtoloniferus, inter ſaxa muſcosque repens.

CAVLIS herbaceus, adſcendens, geniculatus, vaginatus, ramoſus, ſpithamaeus, ramis cauliformibus e geniculis.

FOLIA *caulina* e geniculis, alterna, patentia, petiolata, lanceolata, haſtata, glabra, plana; *petioli* breues alati, *ſtipulis* vaginantibus, membranaceis, ferrugineis affixi.

SPICAE plures, caules ramosque terminantes, interruptae, ſtipulis amplexicaulibus munitae, capitulum interdum conſtituentes, longitudine plerumque bipollicari.

CALYCIS *perianthium* turbinatum, flauum, profunde quinquepartitum, *laciniis* ouatis, obtuſis, concauis, perſiſtentibus.

STAMINVM *filamenta* octo, ſubulata, incurua, calyce paulo breuiora, lutea, *antherae* ouatae, magnae, flauae.

PISTILLI *germen* triquetrum, flauum, *ſtylus* vnicus, *ſtigmata* tria, ſimplicia, lutea.

SEMEN vnicum triquetrum, nitidum, nigrum, calyce inuolutum, ſemine Polygoni fagopyri duplo minus.

Habitat in muſcoſa planitie ſummarum alpium altaicarum cum Anemone faſciculata, Doronico pardalianthe, Sibbaldia procumbente et ſequenti Ranunculo

culo parcius; occurrit etiam in regionibus transbaicalenſibus ad Selengam ornans valles montoſas praeſertim Vbucunenſes. Floret initio Iulii.

VI.

RANVNCVLVS *altaicus* foliis lobatis, radicalibus petiolatis caulinis ſeſſilibus, calyce hirſuto, longitudine fere petalorum. Tab. VII.

DESCR. RADIX ex multis napulis fibrisque validis faſciculata, perennis.

CAVLIS erectus, teres, glaber, ſimpliciſſimus, palmaris, ſucculentus.

FOLIA lobata, lobis inaequalibus, plerumque tribus rarius pluribus, lanceolatis integris; *radicalia* ſaepiſſime tria, petiolata, *petiolis* dimidiam caulis longitudinem aequantibus; *caulina* bina vel tria, ſeſſilia, amplexicaulia, ſubfloralia.

FLOS terminalis, magnus aureo luteus, ſaepiſſime tantum vnicus, rariſſime bini.

CALYCIS *perianthium* pentaphyllum, fuſcum, lanuginoſum, foliolis lanceolatis, concauis, longitudine fere petalorum.

COROLLA pentapetala, *petalis* obtuſis, ad baſin fuſcis; *nectarii* foueola ſquamula fuſca tecta.

Reliquae fructificationis partes vt in congeneribus. Circa finem Iunii in alpium niuoſarum planitie muſcoſa florentem inueni.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

COMPARATIO INTER THEORIAM LVNAE ILLVSTR. *EVLERI* ET TABVLAS RECENTIORES CELEB. *MAYERI.*

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Opus incomparabile de Theoria Lunae ab Illuſtr. *Eulero* haud ita pridem editum, comparationem exhibet aequationum pro motu Lunae in iſta Theoria allatarum, cum Tabulis Lunaribus Celeb. *de Clairaut*, eo imprimis fine inſtitutam, vt inde valores ſaltem prope veri excentricitatis et inclinationis mediae Lunae deduci poſſent. Similem comparationem Theoriae ſuae, cum Tabulis antiquioribus Celeb. *Mayeri*, Illuſtr. *Eulerus* inſtituere quidem tunc temporis decreuiſſet, niſi eandem maxime operoſam, remque multi et taedioſi laboris plenam ratus fuiſſet; quia ſcilicet in Tabulis Celeb. *Mayeri* non elongatio media Lunae a Sole, ſed vera inducitur. Poſtmodum vero quum ad nos peruenerint nouae Tabulae Celeb. *Mayeri* ab Illuſtr. Societate Scientiarum Londinenſi euulgatae, quae ſi teſtimoniis plurimorum Aſtronomorum fidem habere fas ſit, a coelo vix vnquam vno minuto primo diſſen-

diſſentiunt; operam Aſtronomis haud ingratam me ſuſcepturum exiſtimaui, dum comparationem Theoriae *Eulerianae* cum laudatis his Tabulis iniuerim; ſic enim pro poſitionibus Lunae ſaltem principalibus, conſenſus vel diſſenſus Tabularum Lunae noſtro tempore celebratiſſimarum facile aeſtimari poterit.

2. Quoniam argumenta Tabularum Celeb. *Mayeri* diuerſa ſunt ab iis, quae in Tabulis Illuſtr. *Euleri* occurrunt, ante omnia neceſſum eſt, vt rationem iſtorum argumentorum dilucide explicemus. Quemadmodum igitur in Tabulis Illuſtr. *Euleri* elongatio media Lunae a Sole, ſeu diſtantia loci Lunae medii a loco medio Solis littera p expreſſa vbique occurrit; ita in Tabulis Celeb. *Mayeri* triplex argumentum ex elongatione Lunae a Sole oriundum reperitur. Primum enim occurrunt anguli, qui diſtantiam loci Lunae medii a loco Solis vero inuoluunt, quam Celeb. *Mayerus* littera ω expreſſit, hanc igitur vt ſimilitudo quaedam cum Tabulis *Eulerianis* obſeruetur littera p^{I} inſigniemus. Deinde argumenta quoque adhibentur, ex diſtantia loci Lunae aequati a loco Solis vero deſumta, haec autem diſtantia a Celeb. *Mayero* littera $\tilde{\omega}$ expreſſa, nobis p^{II} nuncupabitur. Quid autem per locum Lunae aequatum apud *Mayerum* intelligatur, infra perſpicue exponemus. Denique in aequationibus pro Latitudine Lunae *Mayerianis* occurrit angulus $\tilde{\tilde{\omega}}$ qui deſignat diſtantiam loci Lunae veri in orbita a loco Solis vero, quem nos p^{III} adpellabimus. Praeter anomaliam

maliam Lunae mediam a *Mayero* littera $\dot{p}$ expreſſam, argumenta in Tabulis ipſius occurrunt, quae anomaliam Lunae correctam inuoluunt, hanc igitur anomaliam littera $\tilde{p}$ deſignat, quae nobis erit q'. Qua ratione autem haec correctio anomaliae mediae Lunae ſit inſtituenda, mox quoque perſpicue explicabimus. Loco argumenti latitudinis medii in Tabulis *Eulerianis* adhibiti, Celeb. *Mayerus* in ſuas Tabulas introduxit diſtantiam medii loci Lunae a loco nodi correcto, tumque vero diſtantiam loci Lunae in orbita a loco nodi correcto, quas diſtantias litteris δ et $\tilde{\delta}$ deſignauit, hae igitur nobis erunt r' et r''. Anomalia denique media Solis ab Illuſtr. *Eulero* littera t deſignata, *Mayero* s dicitur.

3. Inaequalitates Lunae, quae loco eius medio adplicari debent, ſecundum Tabulas Celeb. *Mayeri*, commode in quatuor diſpeſci poſſunt ordines, quorum primus aequationem annuam Lunae, euectionem et nonnullas alias minores inaequalitates inuoluit, in hoc autem ordine omnia argumenta ex litteris, t, p', r' et q componuntur. Secundus ordo aequationem orbitae Lunae continet, et pro argumento habet angulum q'. Tertius ordo inaequalitatem continet, quae variatio Lunae dici conſueuit et pro argumento habet angulum p''. Quartus denique ordo abſoluitur reductione ad eclipticam, huncque ingreditur angulus r''. Locus Lunae medius per binos priores ordines inaequalitatum correctus, *Mayero* dicitur locus Lunae aequatus, cui ſi adplicetur

cetur variatio, habebitur locus Lunae in orbita. Quodſi nunc locus Lunae medius exprimatur littera ζ, inaequalitates vero ex ſingulis ordinibus oriundae litteris η, θ, κ et ϱ, reſpectiue deſignentur, habebitur longitudo Lunae vera

$$=\zeta+\eta+\theta+\kappa+\varrho, \text{ quare fiet angulus } \Phi=\eta+\theta+\kappa+\varrho.$$

4. Pro inaequalitatibus ad primum ordinem pertinentibus ſequens ex Tabulis Cel. *Mayeri* elicitur expreſſio:

$$\begin{aligned}
\eta = & +11'.\ 16''.\ \text{ſin.}\ t \\
& -\ 4.\ \text{ſin.}\ 2t \quad \Big\} \text{ I.} \\
& -\ 54.\ \text{ſin.}(2p'+t) \quad \text{II.} \\
& -1.\ 9.\ \text{ſin.}(2p'-t) \quad \text{III.} \\
& +\ 54.\ \text{ſin.}(2p'+q) \quad \text{IV.} \\
& -1^{\circ}.\ 20.\ 33.\ \text{ſin.}(2p'-q) \\
& +\ 36.\ \text{ſin.}(4p'-2q) \quad \Big\} \text{ V.} \\
& +2.\ 9.\ \text{ſin.}(2p'-q+t) \quad \text{VI.} \\
& +\ 49.\ \text{ſin.}(2p'-q-t) \quad \text{VII.} \\
& +\ 34.\ \text{ſin.}(q-t) \quad \text{VIII.} \\
& +\ 58.\ \text{ſin.}(2p'-2r') \quad \text{IX.} \\
& +\ 16.\ \text{ſin.}(p'-q) \\
& -1.\ 0.\ \text{ſin.}(2p'-2q) \quad \Big\} \text{ X.}
\end{aligned}$$

Notandum vero heic eſt, loco nodi medio adplicandam eſſe correctionem $+8'.\,50''.\ \text{ſin.}\ t-2''.\ \text{ſin.}\ 2t$; ita vt ſit $r'=r+8'.\ 50''.\ \text{ſin.}\ t-2''.\ \text{ſin.}\ 2t$. Iam ſi anomaliae mediae Lunae q adplicetur correctio η, itemque haec $+23'.\ 12''.\ \text{ſin.}\ t-6''\ \text{ſin.}\ t$, ita vt fiat

$$q'=q+\eta+23'.\ 12''\ \text{ſin.}\ t-6''.\ \text{ſin.}\ 2t$$

inae-

inaequalitas θ apud Mayerum ſic habetur expreſſa:

$$\left.\begin{array}{l}\theta = -6°.\ 18'.\ 15''.\ \text{ſin.}\ q' \\ \quad +13.\ \ 0.\ \text{ſin.}\ 2q' \\ \quad\quad -37''.\ \text{ſin.}\ 3q'\end{array}\right\}\ \text{XI.}$$

Porro ſi diſtantiae loci medii Lunae a loco vero Solis p' adplicentur inaequalitates η et θ, habebitur diſtantia loci aequati Lunae a loco vero Solis $= p''$ $= p' + \eta + \theta$, tum vero inaequalitas tertii ordinis hoc modo apud Mayerum exprimitur

$$\left.\begin{array}{l}\varkappa = -1'.\ 55''.\ \text{ſin.}\ p'' \\ \quad +35.\ 43.\ \text{ſin.}\ 2p'' \\ \quad\quad +2.\ \text{ſin.}\ 3p'' \\ \quad\quad +10.\ \text{ſin.}\ 4p''\end{array}\right\}\ \text{XII.}$$

hocque facto locus Lunae in orbita fiet $= \zeta + \eta + \theta + \varkappa$. Diſtantia inter locum nodi correctum et locum Lunae in orbita, quum exhibeat angulum r'', patet eſſe

$$r'' = r' + \eta + \theta + \varkappa = r + \eta + \theta + \varkappa + 8'.50''.\text{ſin.}\,t - 2''.\ \text{ſin.}\ 2t,$$

hincque habebitur quartus ordo inaequalitatum Lunae apud Mayerum

$$\begin{array}{ll}\varrho = +1'.\ 23''.\ \text{ſin.}\ (2r'' - q') & \text{XIII.} \\ \quad -6.\ 43.\ \text{ſin.}\ 2r'' & \text{XIV.}\end{array}$$

His vero inaequalitatibus vltimam ſuperaddit Celeb. *Mayerus*, aequationem punctorum aequinoctialium, quae habetur $= -18''$. ſin. Long. ☊. Aequationem demum ſecularem motui medio Lunae adplicandam adfert Cel. *Mayerus*, cuius quantitas interuallo pri-

 mi

mi ſeculi 9″, ideoque annis 1000 elapſis ad 15′ minuta prima aſſurgit.

5. Vt omnes inaequalitates Lunae ex Tabulis *Mayeri* deſumtae, vno obtutu repraeſentari poſſint, placet easdem heic denuo repetere, ſimulque adiungere valores harum inaequalitatum per ipſam Theoriam a Celeb. *Mayero* deductos, vt eo facilius ſit iudicium quantum Tabulae *Mayeri* a computo ipſius diſcrepent. Praeter inaequalitates vero heic allatas, Theoria alias atque alias ſubminiſtrauit, quas *Mayerus* in ſuas Tabulas introducendas non cenſuit, partim quod minimae eſſent, partim quod per Theoriam non ſatis exacte ipſi videbantur definitae, tum vero praecipue quod ex obſeruationibus certo concludere ſibi viſus eſt, has inaequalitates impune negligi poſſe.

Inaequalitates Longitudinis Lunae ſecundum Cel. *Mayerum*.

	ex Theoriae deductae	ex Tabulis
I.	+0°. 11′. 39″	+0°. 11′. 16″. ſin. t
	−10	− 4. ſin. $2t$
II.	−58	−54. ſin. $(2p'+t)$
III.	−1. 13	−1. 9. ſin. $(2p'-t)$
IV.	+55	+54. ſin. $(2p'+q)$
V.	−1. 20. 8	−1. 20. 33. ſin. $(2p'-q)$
	+38	+36. ſin. $(4p'-2q)$
VI.	+2. 11	+2. 9. ſin. $(2p'-q+t)$
VII.	+44	+49. ſin. $(2p'-q-t)$
VIII.	+40	+34. ſin. $(q-t)$
IX.	+1. 26	+58. ſin. $(2p'-2r')$
X.	+8	+16. ſin. $(p'-q)$
	−1. 2	−1. 0. ſin. $(2p'-2q)$

XI.

	ex Theoriae deductae	ex Tabulis
XI.	$-6^\circ.18'.11''$	$-6^\circ.18'.15''$. ſin. q'
	$+13.\ 2$	$+13.\ 0.$ ſin. $2q'$
	-36	$-37.$ ſin. $3q'$
XII.	$-1.\ 55$	$-1.\ 55.$ ſin. p''
	$+35.\ 42$	$35.\ 43.$ ſin. $2p''$
	$+\ 1$	$+\ 2.$ ſin. $3p''$
	$+\ 5$	$+10.$ ſin. $4p''$
XIII.	$+1.\ 15$	$+1.\ 23.$ ſin. $(2r''-q')$
XIV.	$-6.\ 51$	$-6.\ 43.$ ſin. $2r''$
XV.		$-18.$ ſin. Long. ☊.

6. Pro Latitudine vera Lunae, ſequens ex novis Celeb. *Mayeri* Tabulis elicitur expreſſio:

$\psi =$ I.	$+5^\circ.8'.46''$. ſin. r''	
	$-6.$ ſin. $3r''$	
II.	$+8.\ 49.$ ſin. $(2p'''-r'')$	
III.	$+2.$ ſin. $(r''-t)$	
IV.	$-17,4.$ ſin. $(r''-q)$	
V.	$-24,1.$ ſin. $(r''-2q)$	
VI.	$+\ 2,7.$ ſin. $(r''-3q)$	
VII.	$-\ 8,3.$ ſin. $(2p'''-r''+t)$	
VIII.	$-\ 3,7.$ ſin. $(2p'''-r''-t)$	
IX.	$-\ 2,2.$ ſin. $(2p'''-r''+q)$	
X.	$+15,0.$ ſin. $(2p'''-r''-q)$	
XI.	$-\ 6,0.$ ſin. $(2p'''-r''-2q)$.	

Quantitatem Parallaxeos ex Tabulis *Mayeri* deducendam, hoc loco adferre praeter rem erit; quum nullum

nullum ſit dubium, quin circa eandem perfectus habeatur conſenſus harum Tabularum cum Theoria Lunae *Euleriana.*

7. Superfluum omnino foret, ſi omnes iſtos calculos, qui in Theoria Lunae Illuſtr. *Euleri* Lib. II. Capit. III et IV. inſtituti habentur, heic repetere vellemus; ſufficiet vero nobis ad iſtas poſitiones Lunae potiſſimum animum aduertiſſe, pro quibus anguli ϕ et ψ maximos recipiunt valores; quippe quum nullum ſit dubium ope harum poſitionum valores excentricitatis et inclinationis mediae pro orbita Lunae certiſſime definiri poſſe, quae quantitates ab Illuſtr. *Eulero* litteris k et i deſignantur.

I. Caſus quo $p = 0$; $q = 0$; $r = 90$.

1. Caſus particularis $t = 0$.

Pro hoc caſu ex formulis Eulerianis deducitur

$$x = -0{,}0065128 + 1{,}176795.k + 0{,}00043k^2 - 0{,}6239.k^3 - 0{,}46726.ii + 0{,}2154.iik$$

$$y = 0$$

$$z = +0{,}965762.i + 1{,}12451.ik + 0{,}0317.ikk + 0{,}0159.i^3.$$

Ex Tabulis vero *Mayeri* inuenitur

$$\phi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 4^\circ.\ 59'.\ 31''.\ 4.$$

Quum igitur eſſe debeat

$$\text{Tang.}\ \psi = \frac{z\ \text{coſ.}\ \phi}{1 + x}, \quad \text{ſeu} \quad \frac{(1 + x)\ \text{Tang.}\ \psi}{\text{coſ.}\ \phi} = z,$$

multiplicando valorem ipſius $1 + x$ ex formula Euleriana deſumtum, per Tang. ψ ex Tabulis *Mayeri*

Mayeri elicitum, ſequentem conſequemur aequationem:

$$+0,0867801-0,965762.i-0,04081.ii-0,0159i^3=0$$
$$+0,102792.k-1,12451.ik+0,0188.iik$$
$$+0,00004.k^2-0,0317.ik^2$$
$$-0,0545k^3.$$

II. Caſ. particularis $t=180°$.

Formulae Eulerianae praebent:

$$x=-0,0072166+1,19228 1.k+0,03405.k^2-0,6239k^3$$
$$-0,4650.ii+0,2154.iik$$

$$y=0$$

$$z=+0,963736.i+1,12451.ik+0,0317\,ikk+0,0159.i^3$$

Ex Tabulis vero *Mayeri* deducitur:

$$\phi=0 \quad \text{et} \quad \psi=4°.\,59'.\,3'',4,$$

ex quo ſequens orietur aequatio:

$$+0,0865828-0,963736\,i-0,04060\,ii-0,0159.i^3=0$$
$$+0,103981.k-1,12451.ik+0,0187.iik$$
$$+0,00297.k^2-0,0317.ik^2$$
$$-0,0544.k^3.$$

Additis igitur inuicem his aequationibus, ſequentem obtinebimus.

$$+0,1733629-1,929498\,i-0,08141\,ii-0,0318.i^3=0 \quad (I)$$
$$+0,206773.k-2,24902.ik+0,0375.iik$$
$$+0,00301.k^2-0,0634.ikk$$
$$-0,1089.k^3.$$

8. II. Caſus quo $p = 0$; $q = 90$; $r = 0$.

I. Caſ. part. $t = 0$.

Ex formulis Eulerianis fit:

$$x = -0,0065128 - 0,65051.k^2 + 0,00458.ii$$

$$y = -1,619012.k + 1,0176.k^3 - 0,3402.iik$$

quum latitudo pro hoc caſu ſit valde parua, valorem ipſius a heic adferre nihil attinet. At Tabulae *Mayeri* praebent:

$$\Phi = -5^\circ.\ 5'.\ 35'',$$

quare ob

$$(1 + x)\ \text{Tang.}\ \Phi - y = 0,$$

ſequens elicitur aequatio:

$$+0,0885449 - 1,619012\ k - 0,057977.k^2 + 1,0176k^3 = 0$$
$$+0,00041.ii - 0,3402.iik.$$

II. Caſ. partic. $t = 180$.

Pro hoc caſu formulae Eulerianae dant:

$$x = -0,0072166 - 0,65589.k^2 + 0,00462.ii$$

$$y = -1,598110.k + 1,0176.k^3 - 0,3402.iik.$$

At ex Tabulis Mayerianis habetur

$$\psi = -5^\circ.\ 0'.\ 44'',$$

quare ſequens prodibit aequatio:

$$+0,0870707 - 1,598110.k - 0,057524.k^2 + 1,0176.k^3 = 0$$
$$+0,00041.ii - 0,3402.iik.$$

Addita igitur hac aequatione ad ſuperiorem, conſequemur:

+0,

$+0,1756156-3,217122.k-0,115501.k^2+2,0352.k^3=0$
$+0,00081.ii-0,6804.iik.$

9. III. Caſus quo $p=0$; $q=90°$; $r=90°$.

I. Caſus partic. $t=0$.

Formulae Eulerianae dant:

$$x=-0,0065128-0,65051\,k^2-0,46726.ii$$
$$y=-1,619012.k+1,0176.k^3-0,0224.iik$$
$$z=+0,965762.i+0,2135.ik^2+0,0159.i^3.$$

Ex Tabulis *Mayeri* autem obtinuimus

$\Phi=-5°.\ 5'.\ 14''$ et $\psi=4°.\ 59'.\ 26'',2$,

vnde ſequentes binae deducuntur aequationes

$+0,0884431-1,619012.k-0,057910.k^2+1,0176.k^3=0$
$-0,04160.ii-0,0214.iik$

$+0,0870978-0,965762.i-0,04096.ii-0,0159.i^3=0$
$-0,05703.k-0,2135\,ik^2.$

II. Caſus partic. $t=180$.

Per formulas Eulerianas fit:

$$x=-0,0072166-0,65589.k^2-0,46550.ii$$
$$y=-1,598110.k+1,0176.k^3-0,0214.iik$$
$$z=+0,963736.i+0,2135\,ik^2+0,0159.i^3.$$

Quum igitur Tabulae Mayerianae dent:

$\Phi=-5°.\ 0'.\ 22''$ et $\psi=4°.\ 59'.\ 1'',2$,

ſequentes prodibunt aequationes:

$+0,0869640-1,598110.k-0,057454.k^2+1,0176.k^3=0$
$-0,04078.ii-0,0214.iik$

 +0,

$+0,0869036-0,963736\,i-0,04074.ii-0,0159.i^3=0$
$-0,05740.k^2-0,2135.ik^2.$

Quodſi igitur binae hae aequationes binis ſuperioribus reſpectiue addantur, ſequentes prodibunt aequationes:

$+0,1754071-3,217122.k-0,115364.k^2+2,0352.k^3=0$ II.
$-0,08238.ii-0,0428.iik$

$+0,1740014-1,929498.i-0,08170.ii-0,0318.i^3=0$ (II)
$-0,11443.k^2-0,4270\,ik^2.$

10. IV. Caſus quo $p=90°$; $q=0$; $r=90°$.

I. Caſ. partic. $t=0$.

Formulae Eulerianae dant:

$x=+0,0066607+0,818942.k-0,01819.k^2-0,2933.k^3$
$-0,52760.ii+0,1594.iik$

$y=-0,0036821+0,004602.k$

$z=+1,034303.i+0,83815.ik+0,0431.ik^2-0,0131.i^3.$

Ex Tabulis autem *Mayeri* prodit

$\phi=-1'.\,43''$ et $\psi=5°.\,16'.\,59'',0$

quare ſequens elicitur aequatio:

$+0,0930848-1,034303.i-0,04879\,ii+0,0131.i^3=0$
$+0,075727.k-0,83815.ik+0,0147.iik$
$-0,00168.k^2-0,0431.ik^2$
$-0,0271.\,k^3.$

II. Caſ. partic. quo $t=180°$.

Ex formulis Eulerianis obtinetur:

$x = +0,0077595 + 0,810004.k - 0,03497.k^2 - 0,2933.k^3$
$\quad - 0,52944.ii + 0,1594.iik$

$y = -0,0005651 + 0,004602.k$

$z = +1,036553.i + 0,83815.ik + 0,0431.ik^2 - 0,0131.i^3.$

Tabulae igitur *Mayeri*, quum praebeant

$$\Phi = -1'.\ 43'' \quad \text{et} \quad \psi = 5^\circ.\ 17'.\ 19''$$

conſequemur:

$$\begin{aligned} &+0,0932849 - 1,036553.i - 0,04901.ii + 0,0131.i^3 = 0 \\ &+0,074982.k - 0,83815.ik + 0,0147.iik \\ &-0,00324.k^2 - 0,0431.ik^2 \\ &-0,0271.k^3. \end{aligned}$$

Addita igitur hac aequatione ad proxime praecedentem, iſtam conſequemur:

$$\begin{aligned} &+0,1863697 - 2,070856.i - 0,09780.ii + 0,0262.i^3 = 0 \\ &+0,150709.k - 1,67630.ik + 0,0294.iik \qquad \text{(III)} \\ &-0,00492.k^2 - 0,0862.ik^2 \\ &-0,0542.k^3. \end{aligned}$$

11. V. Caſus quo $p = 90^\circ$; $q = 90^\circ$; $r = 0$.

I. Caſ. partic. $t = 0$.

Pro hoc caſu formulae Illuſtr. *Euleri* ſuppeditant hos valores

$x = +0,0066607 - 0,000491.k - 1,47117.k^2 - 0,00976.ii$

$y = -0,0006821 - 2,401344.k + 2,3692.k^3 - 0,3998.iik.$

At ex Tabulis *Mayeri* habetur

$$\Phi = -7^\circ.\ 27'.\ 20'',$$

elicietur igitur hinc ſequens aequatio:

$+0,1310530-2,401408.k-0,192522k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,00128.ii-0,3998.iik.$

II. Caſ. partic. $t=180$.

Ex formulis *Euleri* obtinemus

$x=+0,0077595-0,000491.k-1,49983.k^2-0,01100.ii$
$y=-0,0005651-2,438594.k+2,3692.k^3-0,3998.iik.$

Quum igitur Tabulae *Mayeri* dent

$$\Phi=-7^\circ.34'.0'',$$

obtinebimus hanc aequationem:

$+0,1333022-2,438659.k-0,199232.k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,00146.ii-0,3998.iik.$

Addita vero iſthac aequatione ad priorem, prodit ſequens

$+0,2643552-4,840067.k-0,391754.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,00274.ii-0,7996.iik$ III.

12. VI. Caſus quo $p=90$; $q=90$; $r=90$.

I. Caſus partic. $t=0$.

Ex formulis *Eulerianis* deducitur:

$x=+0,0066607-0,000491.k-1,47117.k^2-0,52762.ii$
$y=-0,0006821-2,401344.k+2,3692.k^3+0,7670.iik$
$z=+1,034303.i-0,2883.ik^2-0,0131.i^3.$

Tabulae vero Mayerianae quum dent

$$\Phi=-7^\circ.28'.4'' \quad \text{et} \quad \psi=5^\circ.15'.18'',3,$$

binae ſequentes hinc prodibunt aequationes:

$+0,1312714-2,401408.k-0,192842.k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,06916.ii+0,7670.iik$

+0,

$+0,0933726-1,034303.i-0,04894\,ii+0,0131.i^3=0$
$-0,000045.k+0,2883.ik^2$
$-0,13645.k^2.$

II. Caſus partic. quo $t=180°$.

Theoria Lunae Euleriana hos ſuppeditat valores:

$x=+0,0077595-0,000491.k-1,49983.k^2-0,52944\,ii$
$y=-0,0005651-2,438594.k+2,3692.k^3+0,7670.iik$
$z=+1,036553.i-0,2883.ik^2-0,0131.i^3.$

At ex Tabulis *Mayeri* elicitur

$\phi=-7°.\,34'.\,48''$ et $\psi=5°.\,15'.\,33'',6,$

vnde ad ſequentes perducimur aequationes:

$+0,1335407-2,438659.k-0,199587.k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,07045.ii+0,7670.iik$

$+0,0935834-1,036553.i-0,04917.ii+0,0131.i^3=0$
$-0,000045.k+0,2883.ik^2$
$-0,13928.k^2.$

Quodſi nunc binae hae aequationes, binis aequationibus ſuperioribus addantur, prima primae et ſecunda ſecundae, ſequentes prodibunt:

$+0,2648121-4,840067.k-0,392429.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,13961.ii+1,5340\,iik$ IV.

$+0,1869560-2,070856\,i-0,09811.ii+0,0262.i^3=0$ (IV)
$-0,000090.k+0,5766.ik^2$
$-0,27573.k^3.$

13. Quatuor aequationes ſupra inuentae determinando valori quantitatis k inſeruientes, ſequentes erant:

I.

I. $+0,1756156-3,217122.k-0,11550.k^2+2,0352k^3=0$
$+0,00081.ii-0,6804.iik$

II. $+0,1754071-3,217122.k-0,11536.k^2+2,0352.k^3=0$
$-0,08238.ii-0,0428.iik$

III. $+0,2643552-4,840067.k-0,39175.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,00274.ii-0,7996.iik$

IV. $+0,2648121-4,840067.k-0,39243.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,13961.ii+1,5340.iik.$

Vt vero ex his aequationibus valores ipſius k eliciantur, ante omnia quantitatem i ex ipſis eliminare conuenit; quumque tentamine quodam facto iam nobis innotuerit i proxime accedere ad 0,08961, hunc valorem pro i in aequationibus ſuperioribus eo tutius ſubſtituere licebit, quod exigua variatio ipſius i multo minorem producat in quadrato eiusdem quantitatis. Facta igitur hac ſubſtitutione aequationes modo allatae in ſequentes tranſformantur:

I. $+0,1756221-3,222584.k-0,11550.k^2+2,0352.k^3=0$

II. $+0,1747458-3,217466.k-0,11536.k^2+2,0352.k^3=0$

III. $+0,2643332-4,846486.k-0,39175.k^2+4,7384\ k^3=0$

IV. $+0,2636913-4,827752.k-0,39243\ k^2+4,7384\ k^3=0.$

14. Ad has aequationes eo commodius reſolvendas, in ipſis ſubſtituere licebit loco k valorem aliquem eius proxime verum vti $k=0,0545$. Nam ſi verus valor quantitatis k ponatur $0,0545(1+\omega)$, vbi certo conſtat ω eſſe fractionem valde exiguam, conſequemur

$$k^2=\overline{0,0545}^2(1+2\omega) \text{ et } k^3=\overline{0,0545}^3(1+3\omega),$$

quibus

quibus igitur valoribus in aequationibus noſtris introductis, ſequentes obtinebimus aequalitates:

I°. $0 = -0{,}0000224 - 0{,}1753285 . \omega$, hinc
$\omega = -0{,}0001277$ et $k = 0{,}0545(1 + \omega) = 0{,}0544930$

II. $0 = -0{,}0006194 - 0{,}1750489 . \omega$; hinc
$\omega = -0{,}003581$ et $k = 0{,}0545(1 + \omega) = 0{,}0543072$

III. $0 = -0{,}0001968 - 0{,}2641594 . \omega$; hinc
$\omega = -0{,}0007450$ et $k = +0{,}0544594$

IV. $0 = +0{,}0001803 - 0{,}2631424 . \omega$; hinc
$\omega = +0{,}0006852$ et $k = 0{,}0545374$.

Si valorem ſecundum litterae k excipiamus, reliqui tres ſatis bene inter ſe conſentiunt, et medium quidem omnium quatuor valorum erit $k = 0{,}0544493$ ſiue numero rotundo $0{,}05445$, ſin vero ſecundus excludatur valor, medium reliquorum inuenietur $= 0{,}0544966$, ſeu numero rotundo $0{,}054497$, qui valor omnino congruit cum eo, cuius vſus in Tabulis *Eulerianis* conſtruendis adhibitus eſt. Interim tamen notare quam maxime conuenit, *Mayerum* in computo ſuo excentricitatem orbitae Lunaris primum ſuppoſuiſſe $= 0{,}05454$, deinde vero ex obſeruationibus concludiſſe hanc quantitatem parte $\frac{1}{300}$ eſſe augendam, ita vt verus valor quantitatis k a Cel. *Mayero* adhibitus ſit $0{,}05472$. Hinc autem quum conſtet variationem vnius partis decies milleſimae, in fractione quantitatem k exprimente, locum Lunae quadraginta ſecundis immutare; patet omnino ob differentiam valorum pro k a Celebb. Viris *Eulero* et *Mayero* ſuppoſitorum, inter ipſo-

rum Tabulas 1′. 30″ adeſſe poſſe diſcrepantiam, quae tamen inſignis diſcrepantia per alias rationes ceſtrui poterit, de quo prolixius infra agemus.

15. Aequationes determinandae quantitati i inſeruientes in ſuperioribus ita habebantur expreſſae:

I. $+0{,}1733629 - 1{,}929498.i - 0{,}08141\,ii - 0{,}0318.i^3 = 0$
$+0{,}206773\,k - 2{,}24902.ik + 0{,}0375.iik$
$+0{,}00301.k^2 - 0{,}0634.ikk$
$-0{,}1089.k^3$

II. $+0{,}1740014 - 1{,}929498.i - 0{,}08170.ii - 0{,}0318.i^3 = 0$
$-0{,}11443.k^2 - 0{,}4270.ikk$

III. $+0{,}1863697 - 2{,}070856.i - 0{,}09780.ii + 0{,}0262\,i^3 = 0$
$+0{,}150709\,k - 1{,}67630.ik + 0{,}0294.iik$
$-0{,}00492.k^2 - 0{,}0862.ikk$
$-0{,}0542.k^3$

IV. $+0{,}1869560 - 2{,}070856.i - 0{,}09811.ii + 0{,}0262.i^3 = 0$
$-0{,}000090.k + 0{,}5766.ik^2$
$-0{,}27573.k^2.$

Vt nunc ex his aequationibus quantitas i determinari queat, pro k valorem eius ſupra inuentum ſubſtituere licebit, quo facto, ſequentes aequationes adipiſcemur, quas praeter quantitates abſolutas incognita i tantum ingreditur:

I. $0 = +0{,}1846128 - 2{,}052143.i - 0{,}07936.ii - 0{,}0318.i^3$
II. $0 = +0{,}1736621 - 1{,}930764.i - 0{,}08170.ii - 0{,}0318.i^3$
III. $0 = +0{,}1945523 - 2{,}162385.i - 0{,}09620.ii + 0{,}0262.i^3$
IV. $0 = +0{,}1861337 - 2{,}069146.i - 0{,}09811.ii + 0{,}0262.i^3.$

16.

16. Vt has aequationes eo commodius reſolvere liceat, pro i valorem quendam proxime verum adoptare conueniet, vti $i = 0,0896$, poſito igitur vero valore ipſius

$i = 0,0896\,(1 + \omega)$, fiet

$i^2 = \overline{0,0896}^2\,(1 + 2\omega)$ et $i^3 = \overline{0,0896}^3\,(1 + 3\omega)$,

his autem valoribus pro i, i^2 et i^3 in aequationibus noſtris ſubſtitutis, obtinebimus aequationes valorem quantitatis ω exprimentes, ex quibus deinde verus valor ipſius i facile colligitur:

I. $0 = +0,0000808 - 0,1852149.\omega$; vnde
$\omega = +0,0004363$ et $i = +0,0896391$

II. $0 = -0,0000131 - 0,1743769.\omega$; hincque
$\omega = -0,0000751$ et $i = 0,0895933$

III. $0 = +0,0000492 - 0,1952376.\omega$; vnde
$\omega = +0,0002520$ et $i = +0,0896225$

IV. $0 = -0,0000305 - 0,1869140.\omega$; proinde
$\omega = -0,0001632$ et $i = 0,0895854$.

Si ex his quatuor valoribus ipſius i medium ſumatur, prodibit $i = 0,0896101$ ſeu numero rotundo $= 0,08961$; vbi quum diſcrepantia inter maximum et minimum valorem 0,00005 vix excedat, inde intelligitur in Latitudinem Lunae vix diſcrimen maius quam decem ſcrupulorum ſecundorum induci, quale diſcrimen hoc in negotio omnino nullam faceſſere debet moram. Interim tamen duo heic obſeruanda veniunt, quorum prius eſt, quod

 valor

valor hic inuentus 0,08961, ſatis egregie conſentiat cum valore ipſius i, qui in vſum vocatus fuit circa conſtructionem Tabularum Illuſtr. *Euleri*, in iſtis etenim Tabulis ſupponitur $i = 0,08964$. Alterum vero quod obſeruari meretur, eſt quod valor modo inuentus $i = 0,08961$ aliquantum diſcrepet a valore inclinationis mediae, quem Cel. *Mayerum* in vſum vocaſſe reperimus, ſcilicet quum tangens huius inclinationis ab ipſo ſuppoſitus fuerit $= 0,09$, ipſa inclinatio i inuenietur $= 0,08976$, et ex hoc capite quidem inter Tabulas Lunae *Eulerianas* et *Mayerianas* adeſſe deberet pro Latitudine Lunae definienda diſcrepantia 30″, niſi ex aliis cauſſis haec diſcrepantia vel diminui, vel prorſus adeo deſtrui poſſet.

17. Quae ſupra inſtituta fuit comparatio Theoriae Illuſtr. *Euleri* cum Tabulis *Mayeri*, eo imprimis valuit, vt valores ipſorum k et i elicerentur, quibus adhibitis aequationes ab *Eulero* allatae cum Tabulis *Mayeri* quam maxime redderentur conſentientes. Hi autem valores tam parum diſcrepant ab iis quos Illuſtr. *Eulerus* in his Tabulis conſtruendis adhibendos cenſuit, vt certiſſime cognoſcatur in his litteris inſigniores mutationes admitti vix poſſe, niſi diſſenſus Tabularum adhuc magis augeantur. Iam vero operae pretium erit diſpicere, quales differentiae ſe prodant inter Tabulas *Euleri*, de *Clairaut* et recens éditas *Mayeri*, pro iis ſaltem poſitionibus principalibus quas ſupra contemplati ſumus. Sequenti igitur Tabula valores anguli Φ pro his poſitionibus

nibus, ex Tabulis modo commemoratis deductos, vna cum differentiis horum valorum, repraeſentaturi erimus:

Pro poſitione		Valor anguli Φ *Euleri*	*de Clairaut*	*Mayeri*	different. a Tab. *Euleri* de *Clair.*	*Mayeri*
$p=0$; $q=90$;	$t=180$	$-5^\circ.\ 5'\ 32''$	$-5^\circ.\ 5'.20''$	$-5^\circ.\ 5'.35''$	$-12''$	$+3''$
$r=90$	$t=0$	$-5.\ 0.\ 55$	$-5.\ 1.\ 30$	$-5.\ 0\ 44$	$+35$	-11
$p=0$; $q=90$;	$t=0$	$-5.\ 6.\ 14$	$-5.\ 4.\ 51$	$-5.\ 5.\ 14$	$-1'.\ 23$	$-1'.\ 0''$
$r=90$	$t=180$	$-5.\ 1.\ 32$	$-5.\ 0.\ 59$	$-5.\ 0.\ 22$	$-33''$	$-1.\ 10$
$p=90$; $q=90$;	$t=0$	$-7.\ 28.\ 0$	$-7.\ 26.\ 51$	$-7.\ 27.\ 20$	$-1.\ 9$	-40
$r=0$	$t=180$	$-7.\ 34.\ 0$	$-7.\ 33.\ 3$	$-7.\ 34.\ 0$	-57	-0
$p=90$; $q=90$;	$t=0$	$-7.\ 28.\ 6$	$-7.\ 27.\ 29$	$-7.\ 28.\ 4$	-37	-2
$r=90$	$t=180$	$-7.\ 34.\ 9$	$-7.\ 33.\ 44$	$-7.\ 34.\ 48$	-25	$+39$

Hic autem obſeruare conuenit, ſi valores anguli Φ per expreſſiones ipſorum x et y ſupra allatas, exquirantur; eos aliquantum diuerſos prodire ab iis, quos hic adpoſuimus, quod imprimis euenit propter correctionem aequationum 𝔙 et V, de qua Theoria Lunae Illuſtr. *Euleri* §. 633. conſuli poteſt. Quamuis autem valores pro 𝔙 et V quorum ſupra vſum fecimus, non ſint prorſus exacti, id tamen nihil obſtat, quin valores quantitatum k et i ſaltem proxime ad veritatem accedant, quod hoc in negotio nobis omnino ſufficit.

18. Comparatio modo allata quum oſtendat inter Tabulas a Celeb. *Eulero* et *Mayero* conditas, pro prima et ſecunda poſitione perfectum eſſe conſenſum, pro tertia vero et quarta poſitione inter iſtas Tabulas haud contemnendum ſe exhibere diſſen-

 ſum;

ſum; diſpicere iuuabit quaenam huius diſcrepantiae eſſe poſſit ratio. Quamquam vero ſingulas inaequalitates Lunae ab Illuſtr. *Eulero* ſtabilitas, cum ſimilibus inaequalitatibus a Celeb. *Mayero* exhibitis non ſine operoſiſſimo labore conferre liceat, tum quod in *Mayeri* Tabulis argumenta adhibeantur diuerſa ab argumentis quae in Tabulis *Euleri* occurrunt, cum etiam quod priores Tabulae exhibeant valores anguli Φ, poſteriores vero valorem tangentis huius anguli per fractionem $\frac{y}{1+x}$ expreſſum; facile tamen diiudicari poterit, cur pro tertia poſitione inter Tabulas adſit diſcrepantia vnius minuti, cum pro prima perfectus adeſſet conſenſus. Scilicet nulla alia re hae duae poſitiones inter ſe differunt, quam quod in prima poneretur $r = 0$ in tertia vero $r = 90°$, ex quo patet iſtas inaequalitates, quae a longitudine nodi dependent, heic praecipue in cenſum venire; quod etiam ex formulis pro x et y ſupra allatis confirmatur, ſcilicet pro prima et tertia poſitione valores ipſorum x et y eatenus tantum differunt, quatenus ipſos ingrediuntur quantitates multiplicatoribus ii vel iik affectae. Quum igitur ab Illuſtr. *Eulero* aſſumta fuerit:

$$x = \mathfrak{O} + k\,\mathfrak{P} + k^2\,\mathfrak{Q} \ldots\ldots + ii\,\mathfrak{X} + iik\,\mathfrak{Y}$$
$$y = \mathrm{O} + k\,\mathrm{P} + k^2\,\mathrm{Q} \ldots\ldots + ii\,\mathrm{X} + iik\,\mathrm{Y}$$

et pro noſtro caſu eas inaequalitates imprimis conſiderare oporteat, quae multiplicatore iik efficiuntur, habebimus ſaltem ſatis exacte

$$\text{Tang.}\,\Phi = \frac{y}{1+x} = iik(\mathrm{Y} - \mathfrak{O}\mathrm{Y} - \mathrm{O}\mathfrak{Y} - \mathfrak{P}\mathrm{X} - \mathrm{P}\mathfrak{X}),$$

vel

vel etiam quia non niſi anguli valde parui heic occurrunt

$$\Phi = iik(Y - \mathfrak{O}Y - O\mathfrak{Y} - \mathfrak{P}X - P\mathfrak{X}).$$

Euolutione autem huius formulae facta, ſequentem inuenimus inaequalitatem formulis *Eulerianis* conformem:

$$-45'',5\,\text{ſin.}\,q + 7'',2\,\text{ſin.}(2p-q) + 3'',6\,\text{ſin.}(2p+q)$$
$$-33,5\,\text{ſin.}(q-2r) + 9,3\,\text{ſin.}(2p-q+2r) + 13,6\,\text{ſin.}(2p+q-2r)$$
$$+44,9\,\text{ſin.}(q+2r) - 3,5\,\text{ſin.}(2p-q-2r).$$

In hac autem formula ſufficiet ad eas tantum attendere expreſſiones, quae $2r$ inuoluunt, quoniam reliquae coniunctim ſumendae ſunt, cum aliis conſimilis argumenti. In Theoria Lunae Celeb. *Mayeri* formula habetur valorem anguli Φ exprimens, per ſola argumenta media et ex iſta quidem formula, hae pro noſtro caſu eliciuntur inaequalitates

$$-29'',5\,\text{ſin.}(q-2r) - 1'',6\,\text{ſin.}(2p+q-2r)$$
$$+45,\ 4\,\text{ſin.}(q+2r) + 2,\ 8\,\text{ſin.}(2p-q-2r)$$

vbi illae ſaltem quae maximi ſunt momenti, ſat bene cum *Eulerianis* conſentiunt. Pro prima ergo poſitione habebitur ex formulis *Euleri* inaequalitas $+19''$ ex iſtis vero *Mayeri* $+11'',5$, ita vt diſſenſus non ſit niſi $7''$ circiter. At poſtquam Celeb. *Mayerus* Longitudinem nodi correctam in ſuas formulas introduxiſſet, ſequentes pro noſtro caſu inuenit inaequalitates

$$-1'.14'',8\,\text{ſin.}(q'-2r'') + 2'',5\,\text{ſin}\,(2p''+q'-2r'')$$
$$-1,\ 5\,\text{ſin.}(2p''-q'-2r'')$$

quae

quae non ſolum prioribus diſſimiles ſunt, ſed etiam ab iis haud parum diuerſae, ex his enim inaequalitatibus coniunctim ſumtis, cum iſta $-6,51'', 2$ ſin. $2r''$, prodit aequatio $+3''$, quae iam haud parum ab iſta ſupra allata $+11'', 5$ differt. Denique vero Celeb. *Mayerus* dum Tabulas ſuas adornauit, minores iſtas inaequalitates plane omiſit, in locum vero $-1'. 14'', 8$ ſin. $(q' - 2r'')$ ex obſeruationibus ſubſtituendum eſſe concluſit $-1'. 23''$ ſin. $(q' - 2r'')$, ſimilique modo inaequalitatem $-6'. 51''$ ſin. $2r''$, in hanc immutari debere $-6'. 43''$. ſin. $2r''$. His igitur vltimis inaequalitatum valoribus pro noſtra poſitione prima adhibitis, eruitur aequatio $-10''$ adeo vt hoc reſpectu inter Tabulas *Eulerianas* et *Mayerianas* ſit diſcrepantia $30''$ circiter.

19. Verum enimvero quum non obſtante hac diſcrepantia $30''$, ex inaequalitatibus quae Longitudinem nodi pro argumento habent, redundante, pro prima noſtra poſitione, valores anguli Φ tantum non exacte conueniant; ex eo omnino intelligitur diſcrimen ex reliquis inaequalitatibus oriundum $30''$ quoque circiter aeſtimari poſſe, hocque diſcrimen prius illud proxime deſtruere. Quum igitur pro tertia poſitione haec diſcrepantia, quae ex inaequalitatibus apud Illuſtr. *Eulerum* litteris P, R, T. V deſignatis, reſultat, prorſus inuariata maneat, diuerſitas autem ex inaequalitate Y oriunda iam ſignum ſortiatur negatiuum, dubitari omnino non poteſt, quin diſſenſus qui pro priori poſitione erat valde

de exiguus, iam valore vnius minuti primi abſolui debeat. Quum ſcilicet habeatur ex Tabulis *Euleri* pro prima poſitione $\Phi = - 5^\circ. 5'. 32''$ et pro tertia $\Phi = - 5^\circ. 6'. 14''$, differentia horum valorum eſt $42''$, quae non multum differt a $2. 19 = 38''$, prouti eſſe deberet, ſi valores inaequalitatum ex Y oriundi et in ſuperiori §. allati, omnino ſummam prae ſe ferrent exactitudinem. Apud *Mayerum* autem habetur pro prima poſitione $\Phi = - 5^\circ. 5'. 35''$ et pro tertia poſitione $\Phi = - 5^\circ. 5'. 14''$, quorum valorum diſcrepantia eſt $- 21$, perinde vt eſſe debet, vi §. praecedentis. Quomodo vero reliquae inaequalitates P, R, T, V concurrant ad diſcrimen iſtud $30''$ circiter producendum, inter Tabulas ſaepius commemoratas, heic fuſius examinare non licet, talis enim diſquiſitio non ſine operoſo admodum labore ſuſcipi poterit. Interim tamen comparatione inaequalitatum ab Illuſtr. *Eulero* allatarum, cum iis quas *Mayerus* propoſuit obiter facta, diſcrepantias inueni, quae ad ſemiminutum primum et vltra aſſurgunt. Maxime autem inſignis ſe prodit diuerſitas pro angulo $(p - q)$, quippe ex quo ſecundum *Eulerum* oritur inaequalitas $+ 52''$, cum apud *Mayerum* inaequalitas hinc oriunda ne duo quidem ſcrupula ſecunda excedat. Quum igitur inter ſingulas quasdam inaequalitates tantus harum Tabularum eſſe poſſit diſſenſus, minime mirum erit, ſi coniunctis pluribus inaequalitatibus, licet diſcrepantiae hae ſe aliquatenus deſtruant, tamen vltimo remanere queat diuerſitas 30 ſcrupulorum ſecundorum. Quod vero

 inae-

inaequalitatem V praecipue attinet, pro ea egregius ſatis habetur conſenſus Tabularum, et hac quidem de cauſſa fit, vt pro prima et ſecunda poſitione, diſſenſus Tabularum tantum in diuerſitate verſentur 14″, quum hae duae poſitiones ſolum in eo diſcrepent, quod pro prima ſit $t = 0$ et pro ſecunda $t = 180°$.

20. Quae ſupra de differentia Tabularum circa inaequalitates quae longitudinem nodi inuoluunt, attuli; etiam valent ad rationem reddendam, cur inter valores angulorum Φ pro quinta poſitione ſit diſcrimen 40″, pro ſexta autem poſitione anguli Φ prorſus egregie conueniant, nec non qui fiat, vt valores ipſius Φ, pro poſitione ſexta pulcerrime conſentiant, dum pro poſitione octaua diſſenſus quadraginta fere ſecundorum ſe prodit. Scilicet pro his poſitionibus expreſſiones inaequalitatum *Eulerianae*, quae angulum r inuoluunt, vix quicquam momenti habent, cum contra ex Tabulis *Mayerianis* deducatur aequatio 22″. Reliquus diſſenſus 20″ pro poſitionibus V^{ta} et VIII^{va} ex reliquis aequalitatum ſpeciebus, P, Q, R, S etc. ſine dubio originem ducit et vario modo ex iis conflatus eſſe poterit, quare huic diſſenſui explicando vlterius immorari nihil refert.

21. Vt vero et nunc pateat, quid iudicandum ſit de Tabularum Lunarium Illuſtr. *Euleri* et Celeb. *Mayeri* conſenſu vel diſſenſu, pro definienda Latitudine Lunae, ſequenti Tabula valores angulorum

rum ψ ex his Tabulis vt et illis Cel. *de Clairaut* elicitos ob oculos ponamus:

Pro Poſitione	Valor anguli ψ			Differ. a Tab. *Euleri*	
	Euleri	*de Clairaut*	*Mayeri*	*Clair.*	*Mayeri*
$p=0; q=0;$ $t=0$	4°. 59'. 37"	4°. 59'. 35"	4°. 59'. 31"	+ 2"	+ 6"
$r=90$ $t=180$	4. 58. 58	4. 59. 9	4. 59. 3	− 11	− 5
$p=0; q=90;$ $t=0$	4. 59. 35	4. 59. 46	4. 59. 26	− 11	+ 9
$r=90$ $t=180$	4. 59. 11	4. 59. 20	4. 59. 2	− 9	+ 10
$p=90; q=0;$ $t=0$	5. 16. 58	5. 17. 23	5. 16. 59	− 25	− 1
$r=90$ $t=180$	5. 17. 28	5. 17. 49	5. 17. 19	− 21	+ 9
$p=90; q=90;$ $t=0$	5. 15. 28	5. 15. 29	5. 15. 18	− 1	+ 10
$r=90$ $t=180$	5. 15. 46	5. 15. 49	5. 15. 34	− 3	+ 10

Haec igitur Tabula declarat Tabulas *Euleri* hac in re tam bene cum *Mayeri* Tabulis conſentire, vt maior harmonia vix voto praecipi potuerit; interim tamen quum pleraeque differentiae ſint poſitiuae, nullum eſt dubium, quin hae aliquantum diminui queant, ſi valor ipſius i in Tabulis *Euleri* adhibitus aliquantulum diminuatur, vti ſi loco $i = 0,08964$ adhibeatur $i = 0,08962$.

22. Valor ipſius k ab Illuſtr. *Eulero* in vſum vocatus, ponitur $= 0,0545$, cum Celeb. *Mayerus* iſtum 0,05468 adhibuiſſe inuenitur, ex hac diſcrepantia igitur valoris pro k, ſane inſignis diſſenſus in loco Lunae prodiret, niſi eueniret vt coëfficientes numerici earum inaequalitatum, quae maxime a k dependent, imprimisque principalis illius, quae Sinum anguli q pro argumento habet, tali adfician-

ciantur diuerſitate, quae iſtam ex k orituram diminuant, ſi non prorſus deſtruant. Euidens igitur eſt inaequalitates iſtas principales a q dependentes pro diuerſis Tabulis ad conſenſum omnimodum reduci, ſi pro ſingulis valores ipſius k adhibeantur, qui in coefficientes numericos harum inaequalitatum ducti, eadem praebeant producta. Vtrum vero conſultum fuerit pro praeſenti caſu, huiusmodi conciliandi rationem adhibere, vix dicere poſſum, quia et alii termini quantitate k adficiuntur, et quidem praeprimis $2p - q$, quorum diſcrepantia ſi in alium ſenſum vergat, fieri poteſt vt inde magis reddantur diſſoni. Deinde inuenimus quoque apud Illuſtr. *Eulerum* inclinationem i ſuppoſitam fuiſſe $= 0{,}08964$, quae *Mayero* eſt $0{,}08976$, heic autem eadem de principali inaequalitate ex angulo r oriunda valent, quae ſupra de inaequalitate pro longitudine Lunae ex q deriuata, monuimus. Eo autem tutius heic iſta conciliandi ratio adhibebitur, quod reliquae inaequalitates pro Latitudine, reſpectu principalis pro exiguis merito haberi queant.

23. In Tabulis Illuſtris *Euleri* inaequalitates ordinis $\varkappa k k$ plane praetermiſſae fuerunt, quum eaedem maxime ſuſpectae ipſi viderentur, et quod angulum $2p - 2q + t$ quidem attinet, ipſius coefficiens Cap. IX. §. 355. Theoriae Lunae praegrandis inuentus eſt, adeo vt merito dubitare licet, an iſta inaequalitas ad duo fere minuta aſſurgens per obſeruationes confirmari poſſit; ſecus autem res ſe habe-

habere videtur cum inaequalitate ex angulo t reſultante, ſi enim haec inaequalitas $+ 2,6319 . \varkappa k^2$ ſin. t ad reliquas cognomines adiiciatur, obtinebitur pro Longitudine Lunae aequatio $+ 11'. 22''$ ſin. t. Hanc inaequalitatem *Mayerus* ope Theoriae elicuit $+ 11'. 39''$, poſtmodum vero obſeruationes in conſilium adhibendo inuenit eam ad $11'. 16''$ eſſe deprimendam; valde igitur probabile hinc fit iſtam ab Illuſt. *Eulero* inuentam inaequalitatem $+ 11'. 22''$ ſin. t ſaltem proxime ad veritatem accedere, quum ab obſeruationibus non niſi $6''$ differat, praetereaque calculus pro hoc angulo inſtitutus non tantis videatur obnoxius difficultatibus, ac qui pro angulo $2p - 2q + t$ locum obtinet. De caetero ex hoc ordine quoque angulum $2p - 2q - t$ adſciſcere liceret, qui ſcilicet in loco Lunae effectum $17''$ fere producit. Haec autem correctio in Tabulas Lunares *Euleri* facile introduci poterit, ſi pro Tab. IX. et coordinata y, loco 31643 legatur 32954, et licet propter hanc correctionem Tabulae ab aliis atque aliis obſeruationibus magis redderentur diſſentientes, quam antea erant, non inde ſtatim concludere licebit hanc correctionem praeter rem eſſe adhibitam.

24. Ex ſuperiori §. 5 iam patet, quomodo Celeb. *Mayerus* ſuos numeros pro Longitudine Lunae ex obſeruationibus corrigendos et emendandos eſſe cenſuit, principales autem correctiones ab ipſo adhibitae ſunt hae ſequentes: pro angulo $t, - 23''$; pro angulo $2p' - q, - 25''$; pro angulo $2p' - 2t', - 28''$;

reliquae exiguae ſunt et plerumque infra 10'' ſubſiſtunt. Quod reliquas inaequalitates attinet quas in cenſum non duxit, dantur inter easdem omnino plurimae quas vix negligere licet, niſi certiſſime per obſeruationes conſtet has inaequalitates ex Theoria deductas minime cum coelo conciliari poſſe. Heic autem contenti erimus eas tantum adponere, quae 10 ſcrupula ſecunda excedunt:

$$- 25,6 \text{ ſin.} (2p' + 2q)$$
$$+ 11,7 \text{ ſin.} (q + t)$$
$$+ 22,5 \text{ ſin.} (2p' - 3q)$$
$$+ 12,1 \text{ ſin.} (4p' - 3q)$$
$$- 21,1 \text{ ſin.} (p' + t)$$
$$+ 12,8 \text{ ſin.} (2p' - 2r' + t)$$
$$+ 37,0 \text{ ſin.} (2q - 2r').$$

Quod vero has inaequalitates attinet ex Theoria Lunae Illuſtr. *Euleri* vix diiudicari poterit, an eaedem quicquam in loco Lunae immutare valeant, quia introducta elongatione Lunae a loco vero Solis, formulae Mayerianae maxime inſignes ſubierunt mutationes. De duabus tamen vltimis certiſſime conſtat, eas merito inter dubias referri, quum calculus vix ad eam exactitudinem redigi queat, vt aliquam de iis certitudinem ſuppeditare valeret.

25. His itaque bene perpenſis, vix quisquam erit qui in eam inducatur opinionem vt credat Theoriam Lunae a Celeb. *Mayero* conditam, praeferendam eſſe Theoriae ab Illuſtr. *Eulero* recens euulgatae, licet Tabulae *Mayeri* cum coelo identidem magis reperiren-

tur

tur conſentientes, quam *Eulerianae*. Hoc enim probe conſiderandum eſt, Celeb. M*ayerum* ſuas Tabulas non ex Theoria tantum elicuiſſe, ſed iisdem varias et inſignes correctiones ex obſeruationibus deriuatas adplicaſſe; quare inſignem ſine dubio obſeruationum numerum conſulendo, pro quibus argumenta inaequalitatum plurimis diuerſiſſimis modis habebantur combinata, dum pro caſibus his a ſe conſideratis, ita Tabulas ſuas corrigere valuit, vt cum coelo probe conſentirent; mirum omnino non erit ſi pro aliis obſeruationibus non multum abludentes a veritate reperiantur. Tabulas vero Illuſtris *Euleri* quod attinet, eae fere tales ſunt, quales per computum Theoriae ſuperſtructum deductae, quare ſi ſimili modo ac M*ayerianae* per obſeruationes corrigantur et emendentur, non dubitamus quin aliquando praeſtiturae ſint exactitudinem quae hoc in negotio deſideratur, maximam.

ECLIPSIS

ECLIPSIS SOLARIS

DIE $\frac{12}{23}$. MARTII 1773 VISAE OBSERVATIO PETROPOLI FACTA.

Auctore

W. L. KRAFFT.

Penduli, quo vſus ſum, aſtronomici motum ope altitudinum Solis correſpondentium exploraui, quas hic ob oculos ponere conuenit:

Die $\frac{11}{22}$. Martii Limb. ☉ ſuper.

Diſt. a Zenith	Ante merid.	Poſt merid.	Merid. $0^h. 2'$
63°. 40′	9^h. 55′. 48″	2^h. 9′. 7″	27″. 5
– 30	– 58. 5	– 6. 51	28. 0
– 20	10. 0. 30	2. 4. 25	27. 5
63. 0	– 5. 20	1. 59. 34	27. 0
62. 40	– 10. 13	– 54. 42	27. 5
– 20	– 15. 21	– 49. 31	26. 0
62. 0	– 20. 42	– 44. 13	27. 5
61. 40	– 26. 18	– 38. 35	26. 5
		Medium	27″. 2

Die $\frac{14}{25}$. Martii Limb. ☉ ſuper.

Diſt. a Zenith	Ante merid	Poſt merid.	Merid. $0^h. 0'$
59°. 20′	10. 47′. 38″	1^h. 14′. 12″	55″. 0
– 10	– 51. 28	– 10. 21	54. 5
59. 0	– 55. 21	– 6. 28	54. 5
		Medium	54″. 7.

vnde

vnde habita ratione correctionum meridiei 27″. 8 et 26″. 3, quarum vtraque eſt ſubtractiua, concluditur meridies verus

d. $\frac{11}{22}$. 0^h. 1′. 59″. 4
d. $\frac{14}{25}$. 0^h. 0′. 28″. 4.

Eſt vero ad hos ipſos dies tempus medium inſtante meridie vero 0^h. 6′. 54″. 0 et 0^h. 5′. 58″. 4; vnde concluditur retardatio penduli diurna ſuper tempus medium = 11″. 8 et die $\frac{12}{23}$. Martii merid. verus 0^h. 1′. 29″. 1.

In ipſa obſeruatione vſus ſum praeſtanti tubo *Dollondiano* decem pedum. Eclipſis initium obſeruaui monſtante horologio 6^h. 5′. 21″; attamen, cum ſol vix ſuper horizontem fuerit eleuatus, hoc momentum circiter 30 ſecundis citius accidiſſe ſuſpicabar. Obſeruationem in aedibus priuatis inſtitui, vbi machinae parallacticae collocandae locus non erat; hinc nec diſtantias cornuum Lunae nec partes diſci ſolaris lucidas micrometro dimetiri licuit. Finem eclipſis diſtincte vidi contigiſſe monſtrante horologio 8^h. 21′. 2″, de cuius momenti praeciſione non habeo, quod dubitem. Haec itaque obſeruatio ad tempus verum reducta ita ſe habet:

Eclipſis ☉ d. $\frac{11}{22}$. Martii 1773.

Temp. ver. merid. Petrop.

Initium . . . 18^h. 3′. 14″

Finis . . . . 20^h. 19′. 28″.

Pro obſeruatione hac ad vſum reuocanda notaſſe iuvabit, poſita parallaxi ☾ horizontali aequatorea $= 54'. 39''$ ex Tabulis Cel. *Mayeri*, prodire in hypotheſi telluris ſphaeroidicae parallaxin

	Longit.	Latit.
Pro initio	6'. 31''. 0	53'. 53''
Pro fine	2'. 16''. 7	51'. 41''. 8
	add. ad long. ver. vt fiat adpar.	ſubtr. a lat. vera vt fiat adpar.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS FACTA PETROPOLI DIE $\frac{12}{23}$ Martii 1773.

Auctore

A. I. LEXELL.

Obſeruationes Eclipſium Solis eo maiorem merentur attentionem, quod ex iis non ſolum loca Lunae cum ſumma exactitudine definiri queant, ſed etiam quia medium praebent certiſſimum definiendi differentias meridianorum inter loca, vbi iſtiusmodi obſeruationes inſtitutae ſunt. Licet enim nonnullis perſuaſum ſit, ex obſeruationibus Eclipſium Solis nihil certi ſtatui poſſe de Longitudinibus locorum; multiplici tamen experientia edoctus ſum, omnia quae contra vſum harum obſeruationum mouentur dubia, leuiſſima eſſe, exceptisque occultationibus fixarum a Luna, alias non dari obſeruationes certiores, quarum ope Longitudines locorum definiri poſſent. Ex obſeruatione igitur Eclipſis Solis die 23 Martii Petropoli facta, quum non ſolum veram Lunae cum Sole coniunctionem ſatis exacte determinare mihi licuit; ſed etiam ex eius comparatione cum nonnullis obſeruationibus alibi factis, pro differentiis meridianorum concluſiones admodum probabiles elicuerim; haud praeter rem eſſe, iudicaui, breuem huius obſeruationis expoſitionem heic communi-

municare. Hanc autem ita adornabo, vt primum recenſionem ipſius obſeruationis adſcram, deinde Methodum exponam admodum facilem et ſuccinctam, qua in hac obſeruatione computanda vſus ſum, et demum concluſiones ex obſeruationibus deductas breviter recenſeam.

Expoſitio obſeruationum circa Eclipſin Solis factarum.

1. Antequam de ipſa obſeruatione quicquam monere liceat, quaedam dicenda erunt de motu Penduli, ad quod haec obſeruatio inſtituta eſt, nec tamen neceſſum duxerim, ſingulas obſeruationes altitudinum correſpondentium, quas diebus proxime ante et poſt 23 Martii cepi, ad motum Penduli inueſtigandum, heic fuſe exponere, ſufficiet momenta meridierum ex his obſeruationibus concluſa, adduxiſſe:

		Temp. Pend.
Die 21.	Martii Mer. ex altit. ☉ correſp.	$0^h. 21'. 46''$, 3
	correct. Merid.	− 29, 2
	Merid. verus	0. 21. 17, 1
22.	Merid. ex altit. correſp.	0. 21. 21, 0
	corr. Merid.	− 28, 0
	Merid. verus	0. 20. 53, 0
22.	Media nox ex altit. correſp.	0. 20. 35, 3
25.	Meridies ex altit. correſpond.	0. 19. 53, 3
	corr. Merid:	− 27, 1
	Merid. verus	0. 19. 26, 2.

2. Facta

2. Facta iam comparatione horum momentorum inter ſe, pro retardatione Penduli diurna reſpectu motus medii Solis, ſequentes obtinebimus concluſiones:

			Retard. Pend.
ex merid. 21	cum Merid.	22	5″, 6
	media nocte	22	9, 5
	merid.	25	9, 2
22	media nocte	22	16, 8
	merid.	25	10, 3
media nocte 22	merid.	25	9, 1.

Ex his quidem probabile redditur motum Penduli inter 21 et 23 Martii non admodum fuiſſe vniformem, tamen diſſenſus concluſionum ex meridiebus dierum 21, 22 et media nocte 22, maior non eſt, quam vt ex leuiuſculis erroribus in aſſignando tempore meridiei die 22 et mediae noctis item pro 22 Martii, qua potiorem ſaltem partem explicari poſſit; ſi enim ſtatuamus tempus meridiei die 22 incidiſſe in $0^h. 20'. 52''$ et mediae noctis in $0^h. 20'. 37''$, retardatio Penduli interuallo duodecim horarum habebitur 6 ſecundorum. Hac de cauſſa tutiſſimum iudicaui ex valoribus retardationum ſupra inuentis medium ſumere, quo ipſo obtinetur retardatio inter meridies 22 et 23 Martii $10'', 4$, quae ex concluſionibus optime conſentientibus tantum habetur $9'', 6$. Poſito igitur quod meridies die 22 inciderit in $0^h. 20'. 52''$ et adoptata retardatione Penduli diurna $10''$, erit Meridies pro die 23 Martii,

 temp.

temp. Pend. $0^h. 20'. 23'', 5$. Quicquid autem ſit de incertitudine circa determinationem temporis veri pro noſtris obſeruationibus, ex motu Penduli oriunda, facile patet eam duo ſcrupula ſecunda non excedere, ideoque vix vllius eſſe momenti.

3. Quia tempore initii Eclipſeos, Sol horizonti admodum erat vicinus, et obſeruatio mea inſtituta eſt in inferiori conclaui noſtrae ſpeculae Aſtronomicae, vnde in Horizontem non prorſus liber eſt proſpectus, id incommodum expertus ſum, vt denſiſſimus fumus ex caminis aſſurgens, ante diſcum Solis propelleretur, praeciſe circa eam diſci regionem, vbi contactus Lunae cum Sole contingere debebat. Sole autem ex fumo emergente Tempore Penduli $6^h. 24'. 40''$ ſeu Tempore vero $6^h. 4'. 9''$ vici Eclipſin iam incoepiſſe et admodum ſenſibilem eſſe, quantum vero ex magnitudine partis obſcuratae coniectura aſſequi potui, aeſtimaui quidem verum initium 30 ſecundis citius contigiſſe, at poſtquam reliquas meas obſeruationes calculo ſubieci, perſuaſus mihi eſſe videor, initium Eclipſis integro fere minuto primo citius, factum eſſe. Finem Eclipſis ſatis exacte obſeruaui Tempore Penduli $8^h. 39'. 51''$, ideoque Tempore vero $8^h. 19'. 23''$. Obſeruatio autem facta eſt Teleſcopio Gregoriano Shortii, micrometro obiectiuo munito.

4. Ex obſeruationibus, quas inſigni numero circa diſtantias cornuum Lunae et partes lucidas diſci Solis, micrometro obiectiuo inſtituere licuit,

eas

eas tantum heic adponam, quae ſua exactitudine praeprimis ſe commendare videntur:

Die 22 Martii temp. Aſtr.	Temp. pend	Temp. vero	Diſtant. cornuum
I.	18^h. $29'$. 17	18^h. $8'$. $47''$	$10'$. $57''$, 1
II.	30. 36	10. 6	12. 23. 3
III.	31. 48	11. 8	13. 10, 3
IV.	32. 56	12. 26	14. 10, 8
	a {44. 0	23. 30	20. 42, 4
	a {45. 14	24. 44	21. 6, 1
	b {46. 16	25. 46	21. 30, 6
	c {47. 17	26. 47	21. 41, 1
	d {50. 52	30. 22	23. 4, 4
	d {53. 21	32. 51	24. 15, 3
			Part. lucid.
	19. 28. 53	19. 8. 23	11. 9, 3
	30. 38	10. 8	11. 4, 9
	32. 30	12. 1	11. 9, 4
	33. 42	13. 13	11. 15, 5
			Diſtant. corn.
6.	20. 17. 35	57. 7	21. 6, 6
5.	19. 2	58. 34	20. 34, 5
4.	20. 8	59. 40	20. 8, 2
3.	21. 22	20. 0. 54	19. 26, 5
2.	22. 41	2. 13	18. 58, 4
1.	24. 4	3. 36	18. 17, 9
Finis Eclipſ.	39. 51	19. 23	

De menſuris autem his Micrometricis notaſſe ſufficiat, eas hic tales exhiberi, quales per ipſas obſer-

vationes

vationes inuentae ſunt, debitae enim correctiones ex refractione oriundae ipſis adhucdum adplicatae non ſunt.

5. Menſurae circa diſtantias cornuum modo allatae, variis ob rationes dubiis obnoxiae eſſe poſſunt. 1°. Ob inſignem refractionem ex nimia Solis ad horizontem vicinia, oriundam; hinc enim factum eſt, vt diſtantiae cornuum multo minores ſe viſui offerrent, quam ſepoſita refractione inueniri debuiſſent. Vt tamen incertitudo circa refractionem has menſuras quam minime dubias redderet, certis temporum interuallis, Diametrum Solis menſuraui in eadem directione, ac diſtantias cornuum metitus ſum, et hoc quidem remedio id obtinuiſſe mihi perſuaſus ſum, vt propter incertitudinem refractionis, vix maius quam trium aut quatuor ſecundorum dubium his menſuris ineſſe poſſit. 2°. Plurimae harum menſurarum Sole nubeculis obtecto inſtitutae ſunt, quae igitur aliquanta incertitudine laborant, et hanc quidem ob cauſſam obſeruationes ſupra allatae ab $18^h. 23'$ vsque ad $18^h. 33'$, minus apte inter ſe conſentire deprehenduntur. 3^{io}. Denique ex minus commoda inſtrumenti conſtructione, circa has obſeruationes aliquod dubium irrepere potuit. Nam vt in Teleſcopiis recentius a Cel. *Skortio* conſtructis, Micrometrum obiectiuum circumagi poteſt, Teleſcopio immobili manente, ita hoc Teleſcopium quo vſus ſum vna cum ipſo Micrometro, manubrio circumagendum eſt, quo ipſo fieri neceſſum eſt, vt non ſine aliqua difficultate, is praeciſe ſitus

ſitus inſtrumento conciliari poſſit, in quo cornua Lunae exacte ſe decuſſant. Quicquid autem de incertitudine harum obſeruationum fuerit, ex infra dicendis conſtabit, concluſiones ex ipſis deductas melius conſentire, quam quidem primum ſuſpicari auſus fuiſſem.

6. Circa inſtituendas menſuras diſtantiae cornuum, tam ex his meis obſeruationibus, quam ex iis, quas ab aliis Aſtronomis inſtitutas offendi, hanc regulam vt puto non ſine vtilitate obſeruandam deduxi: vt huiusmodi menſurae potiſſimum ſtatim poſt initium et ante finem Eclipſis inſtituantur, idque duplicem ob rationem; tum quod hae diſtantiae tunc citiſſime creſcant vel decreſcant, quod ſecus eſt circa medium Eclipſis; cum etiam quod errores in his diſtantiis commiſſi, non eundem habeant influxum ad immutandos valores pro diſtantiis centrorum, ex ipſis deducendos, ac pro medio Eclipſis, vbi ſaepenumero accidit, vt error vnius ſecundi in diſtantia cornuum dimetienda commiſſus, pro diſtantia centrorum errorem duorum, trium vel plurium ſecundorum producere valeat. Circa medium Eclipſis vero praeſtabit menſuras partium lucidarum inſtituere, ex quibus deinde diſtantiae centrorum facile concludentur.

Methodus facilis et expedita computandi obſeruationes circa Eclipſes Solis factas.

7. In nouorum Commentariorum Tomo XV. Methodum quidem iam propoſui computandi obſer-

 vatio-

vationes Eclipſium Solis, quae prae vulgari Methodo - Nonageſimi multis nominibus commendari meretur; poſtmodum tamen inueni, hanc Methodum ad multo maiorem facilitatem et breuitatem redigi poſſe, praeſertim vbi plurimarum obſeruationum computus ineundus eſt. Quemadmodum enim pro vna vel altera obſeruatione computanda, arbitrarium fere haberi poterit, quam quis eligere voluerit Methodum; ita dum obſeruationes numero plures in computum ducendae, in eo praecipue elaborandum eſſe videtur, vt ii calculi, qui pro omnibus obſeruationibus vſui eſſe poſſunt, ſeorſim inſtruantur; ne ſcilicet neceſſum ſit pro ſingulis obſeruationibus, inutiles et taedioſas calculorum repetitiones inſtituere. In eo igitur praecipuum meritum Methodi iam adumbrandae conſiſtit, vt certis praeſuppoſitis calculis Elementaribus, qui pro omnibus obſeruationibus valent, totus computus parallaxeos ad reſolutionem vnius trianguli Sphaerici reducatur, vtque formulae pro Parallaxibus Longitudinis et Latitudinis ſingulari ſimplicitate ſe commendent.

Tab. IX. Fig. 1. 8. Sit P Z *z* Meridianus loci, in quo obſeruatio aliqua Eclipſeos Solis facta habetur, P polus aequatoris, Z zenith huius loci et *z* punctum vbi recta per centrum telluris et locum obſeruatoris ducta meridiano coeleſti occurrit. Sit praeterea Π polus Eclipticae, L locus Lunae verus, ☽ locus eius apparens propter effectum Parallaxeos, B M N Ecliptica et ducti concipiantur arcus circulorum maxi-

maximorum P L, Π L M, Π ☽ N, tumque ex ☽ in Π L demiſſus intelligatur arcus normalis ☽ λ. In Tomo Nouor. Comment. XV. formulas iam attuli, quarum ope, certa aſſumta proportione inter axem Telluris et diametrum aequatoris, pro dato quouis Telluris loco, cognita eius Latitudine, definiri poſſunt arcus P *z*, nec non valor radii ex centro Telluris ad locum ſpectatoris ducti. Si ſcilicet ratio inter axem Telluris et diametrum aequatoris exprimatur littera *n*, ε vero deſignet rationem radii Telluris ad ſemidiametrum aequatoris, ibidem oſtendi fore:

$$\text{Cot. P } z = n^2 \text{ Cot. P Z} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\text{ſin. P Z}}{\text{ſin. P } z.\ \text{coſ. Z } z}}$$

de quibus formulis tenendum, quod poſita figura Telluris Sphaeroidica rigore Geometrico prorſus ſint verae, nec vllam omnino inuoluant approximationem. Caeterum breuitatis gratia, cum Illuſtr. *Eulero* punctum Z zenith apparens et punctum *z* zenith verum adpellare liceret, niſi aliter viſum fuiſſet alii cuidam Mathematico, qui hanc adpellationem incongruam iudicare videtur.

9. Pro ſingulis horis intra quas duratio Eclipſis per totum orbem terrarum cadit, computentur Latitudo, Aſcenſio recta, Declinatio Lunae cum angulo poſitionis huius Aſtri Π L P, nec non Aſcenſio recta Solis; hinc enim per variationes horum Elementorum ſingulis horis correſpondentes, facile eruentur eorum valores pro qualibet obſeruatione propoſita. Eadem vero Elementa quoque pro ſin-

gulis ſemihoris vel quadrantibus horarum computare liceret, ſed abunde ſufficiet ea pro ſingulis horis noſſe. Poſtquam igitur ope horum Elementorum, pro dato obſeruationis tempore inuenta fuerint, Aſcenſio recta Solis et pro Luna, eius Aſcenſio recta, Declinatio, Latitudo et angulus poſitionis, reſoluendum eſt triangulum Sphaericum z P L, in quo latera P z, P L cum angulo interiacente z P L ſunt cognita. Inuenitur autem angulus z P L ſumendo differentiam inter aſcenſiones rectas Solis et Lunae, hancque differentiam vel addendo ad angulum horarium Solis, vel ab eo ſubtrahendo, prout circumſtantiae requirunt. Scilicet pro obſeruationibus ante meridiem factis, ſi Luna maiorem habuerit aſcenſionem rectam, quam Sol, addi debet differentia aſcenſionum, ſin vero minorem ſubtrahi. Pro obſeruationibus autem poſt meridiem inſtitutis, contrarium vſu valebit. Datis igitur in triangulo z P L, lateribus z P, L P et angulo z P L, quaeratur latus z L cum angulo P L z. Quum itaque detur etiam angulus Π L P, dabitur neceſſum eſt $\Pi L z = \pm P L z \mp \Pi L P$ et facile quidem erit diiudicatu, quaenam ſigna pro quouis caſu oblato, locum obtinere debeant. Caeterum hac de re conſuli poterit Aſtronomia Cel. *de la Lande* Tom. II. nov. Edit. pag. 500. §. 1884.

10. Computetur parallaxis diſtantiae a puncto z, per ſequentem formulam:

$$L☽ = \frac{\varepsilon \Pi \; ſin. \, z L}{1 - \varepsilon \Pi \; coſ. \, z L},$$

vel

vel etiam ſi placet exactius per hanc

$$\text{Tang. L ☽} = \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\Pi\,\text{ſin.}\,z\,\text{L}}{1 - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\Pi.\,\text{coſ.}\,z\,\text{L}},$$

in quibus formulis Π indigitat differentiam parallaxium horizontalium aequatorearum Lunae et Solis. Demonſtrationem harum formularum heic adducere, eo minus erit neceſſe, quod in Tomo XV. Comment. iam allata ſit, caeterumque ſine vllo negotio inueniri poſſit. Notare autem conuenit, inueſtigandae Parallaxi ☽ L etiam formulam ſequentem inſeruire:

$$\text{Tang.}(\text{L ☽} + \tfrac{1}{2} z\,\text{L}) = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2} z\,\text{L}.\,\text{Tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)^2,$$

poſito ε ſin. Π = ſin. Φ, vel etiam:

$$\text{Tang.}(\text{L ☽} + \tfrac{1}{2} z\,\text{L}) = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2} z\,\text{L}\,\text{Tang.}(45^\circ + \psi),$$

poſito ε ſin. Π = Tang. ψ. Conf. Tom XV. Nouor. Comment. et Cel. *Bernoulli* Recueil pour les Aſtronomes P. II. p. 311. 314. Sin autem cui placuerit approximationibus vti, ſequentes adhiberi poterunt:

$$\text{L ☽} = \varepsilon\,\Pi\,(\text{ſin.}\,z\,\text{L} + \tfrac{\varepsilon\,\Pi}{2}.\,\text{ſin.}\,2\,z\,\text{L}) \text{ vel}$$

$$\text{Tan. L ☽} = \varepsilon\,\text{ſin.}\,\Pi\,(\text{ſin.}\,z\,\text{L} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{ſin.}\,\Pi\,\text{ſin.}\,2\,z\,\text{L}),$$

quae poſterior formula, ſi ſtatuatur

$$\varepsilon\,\text{ſin.}\,\Pi\,\text{coſ.}\,z\,\text{L} = \text{Tang.}\,\theta,$$

in hanc abit:

$$\text{Tang. L ☽} = \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\Pi\,\text{ſin.}\,(z\,\text{L} + \theta)}{\text{coſ.}\,\theta}.$$

Facile autem patet formulas ſupra allatas, aeque commodas et elegantes eſſe, ac has quas modo propoſuimus.

11. Pro computandis Parallaxibus Longitudinis et Latitudinis ſequentes adhibeantur formulae:

$$\text{Paral. Latit.} = L\lambda = L\text{☽}.\ \text{coſ.}\ \Pi L z$$

$$\text{Paral. Longit.} = MN = \frac{\text{☽}\lambda}{\text{ſin.}\ \Pi\text{☽}} = L\text{☽}\frac{\text{ſin.}\ \Pi L z}{\text{ſin.}\ \Pi\text{☽}}.$$

De his autem formulis notandum, quod rigori Geometrico non prorſus ſint accommodatae, ſuppoſuimus enim ☽λ ex ☽ in ΠL normaliter eſſe demiſſum, cum pro Parallaxi Latitudinis definienda, polo Π interuallo Π☽ deſcribi deberet circulus Eclipticae parallelus arcui ΠL in puncto *l* occurrens, ſic enim habebitur Parallaxis Latit. = Π☽ − ΠL = L*l*. Conſtat autem puncta λ et *l* non coincidere, ideoque non eſſe Lλ = L*l*, nec arcus circuli paralleli ☽*l*, arcui perpendiculari ☽λ perfecte aequalis cenſeri poteſt. Interim tamen formulae iam propoſitae, pro vſu Aſtronomico praecipue in calculo eclipſium Solis abunde ſufficiunt, quia tam prope ad veritatem accedunt, vt pro parallaxi latitudinis Lunae, aberratio vix vnquam tres decimas partes ſcrupuli ſecundi excedat. Caeterum ſi inueſtigatio Parallaxium Longitudinis et Latitudinis omni rigore eſſet perficienda, eam variis quidem modis inſtituere licebit. Sic pro parallaxi Latitudinis determinanda, quaeri poterit Π☽ ope huius formulae:

$$\text{coſ.}\ \Pi\text{☽} = \text{coſ.}\ \Pi L\ \text{coſ.}\ L\text{☽} - \text{ſin.}\ \Pi L.\ \text{ſin.}\ L\text{☽}\ \text{coſ.}\ \Pi L z,$$

tum enim fiet Parallaxis Latitudinis = Π☽ − ΠL. Vel adhiberi poterit haec formula:

$$\text{coſ}\ \Pi\text{☽} - \text{coſ.}(\Pi L + L\text{☽}) = 2.\text{ſin.}\ \Pi L\ \text{ſin.}\ L\text{☽}\ \text{ſin}\ \tfrac{1}{2}\Pi L z^2,$$

ex

ex qua porro deducitur

$$\text{ſin.}\left(\tfrac{\Pi L+L☽-\Pi☽}{2}\right)\text{ſin.}\left(\tfrac{\Pi L+L☽+\Pi☽}{2}\right)=\text{ſin.}\Pi L\,\text{ſin.}L☽\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Pi Lz^2,$$

$$\text{ſin.}\left(\frac{\Pi L+L☽-\Pi☽}{2}\right)=\frac{\text{ſin.}\,\Pi L.\,\text{ſin.}\,L☽.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Pi Lz^2}{\text{ſin.}\left(\tfrac{\Pi L+L☽+\Pi☽}{2}\right)}$$

vbi in expreſſione $\text{ſin.}\left(\tfrac{\Pi L+L☽+\Pi☽}{2}\right)$ pro $\Pi☽$ eius valor proxime verus ſupra inuentus

$$\Pi L+L☽\,\text{coſ.}\,\Pi Lz,$$

adhiberi poterit, ita vt ſit

$$\frac{\Pi L+L☽+\Pi☽}{2}=\Pi L+L☽\frac{(1+\text{coſ.}\Pi Lz)}{2}=\Pi L+L☽\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Pi Lz^2.$$

Vltima haec formula pro parallaxi Latitudinis, valorem tanto magis approximatum ſuppeditat, quo certius liquet $\Pi L+L☽-\Pi☽$ eſſe arcum quam minimum, cuius igitur ſinum exactiſſime definire licet. Caeterum quoque immediate parallaxis Latitudinis per ſequentem formulam proxime veram erui poterit:

$$\text{ſin.}\frac{\Pi☽-\Pi L}{2}=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}☽L}{\text{ſin.}\tfrac{\Pi☽+\Pi L}{2}}(\text{coſ.}\Pi L.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}☽L+\text{ſin.}\Pi L\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}☽L\,\text{coſ.}\Pi Lz).$$

Pro Parallaxi Longitudinis quoque inueſtiganda, aliae atque aliae formulae adduci poterunt, cuiusmodi ſunt:

$$\text{Tang.}\,p=\frac{\text{ſin.}\,\Pi Lz}{\text{ſin.}\Pi L\,\text{cot.}\,L☽+\text{coſ.}\,\Pi Lz\,\text{coſ.}\,\Pi L};$$

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}p^2=\frac{\text{ſin.}\,\tfrac{\Pi☽+☽L-\Pi L}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{\Pi L+☽L-\Pi☽}{2}}{\text{ſin.}\Pi L.\,\text{ſin.}\,\Pi☽}.$$

12.

12. Diameter Lunae apparens computetur per formulam $\frac{D}{1 - \varepsilon\,\Pi\,coſ.\,z\,L}$ ſignificante D quantitatem diametri Lunae e centro Telluris ſpectandam. Exactius vero habebitur diameter Lunae apparens, per iſtam formulam $\frac{D}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2\,ſin.\,\Pi^2 - 2\,\varepsilon\,ſin.\,\Pi\,coſ.\,z\,L)}}$. Caeterum tamen prior formula valorem adeo adproximatum praebere cenſenda eſt, vt aberratio tres decimas partes ſecundi nunquam excedat. Maxime ſcilicet aberratio locum habebit, quando $z\,L = 90°$, pro eo autem caſu prior formula praebet Diametrum apparentem $= D$, et poſterior $= \frac{D}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2\,ſin.\,\Pi^2)}} = D\,coſ.\,\psi$ conf. §. 10. Si igitur ſtatuatur $\varepsilon = 1$, $\Pi = 61'$; $D = 33'.\,18''$, habebitur per poſteriorem formulam diameter apparens $33'.\,17'',7$, quae a priori tantum $\frac{3}{10}$ ſecundi differt.

Tab. IX. Fig. 2. 13. Reſoluatur iam triangulum ☽ ☉ N, vbi ☉ ☽ diſtantia apparens centrorum Solis et Lunae, ☽ N Latitudo apparens Lunae ſeu differentia inter Latitudinem Lunae, eiusque parallaxin Latitudinis, eritque

$$☉N = \sqrt{(☉☽ + ☽N)(☉☽ - ☽N)},$$

ſi ſcilicet triangulum ☉ ☽ N vt rectilineum conſideretur, quod quidem ſine errore ſenſibili fieri poteſt. Sin autem quis hoc triangulum vt Sphaericum tractare velit, inueſtigare poterit ☉ N per hanc formulam:

$$Tang\,☉N = \sqrt{Tang\,\tfrac{1}{2}(☉☽ + ☽N)\,Tang.\,\tfrac{1}{2}(☉☽ - ☽N)}.$$

Notari autem conuenit, dari ☉ ☽ ſeu diſtantiam appa-

apparentem centrorum Solis et Lunae pro vnaquaque obſeruatione ex quantitate Phaſeos. Pro initio ſcilicet et fine Eclipſis, habetur ⊙ ☽ aequalis ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae. Pro alia vero obſeruatione ex data quantitate partis illuminatae diſci Solis, diſtantia centrorum facile colligetur, quippe quae inuenietur, ſi ad partem lucidam diſci Solis addatur differentia ſemidiametrorum Lunae et Solis. Poſtquam autem inuentum fuerit latus ⊙ N, quum quoque detur parallaxis Longitudinis, facile inueniri poterit tempus, quod ad datum tempus obſeruationis vel addendum vel ab eo ſubtrahendum eſt, vt habeatur tempus coniunctionis Solis et Lunae.

14. Tempus hoc coniunctionis ſic inuentum, veritati exacte conueniens eſſe non poteſt, niſi omnia Elementa quibus eius inueſtigatio ſuperſtruitur, rite ſe habeant; haec autem Elementa vti facile conſtat, praeprimis ſunt, valores diametrorum Solis et Lunae, Latitudo Lunae et eius Parallaxis aequatorea. Quod ſi proinde his Elementis aliquis inſit error, neceſſum omnino eſt, vt is ſaepe numero ad tempus coniunctionis haud parum immutandum, valeat; quare operae pretium eſt, vt inueſtigetur quantam mutationem ſubire debeat expreſſio pro tempore coniunctionis, ob correctiones Elementorum modo dictorum. Exprimatur igitur correctio diſtantiae centrorum Solis et Lunae per δ, correctio Latitudinis Lunae per y et correctio parallaxeos per π, parallaxis vero Latitudinis Lunae deſignetur per p et paral-

laxis Longitudinis per p', nec non angulus ☽ ☉ N per Φ, fietque correctio pro tempore coniunctionis

$$= \pm m\delta \,\text{ſec.}\,\Phi \mp my \,\text{Tang.}\,\Phi \pm m\pi \left(\tfrac{p}{\Pi}\,\text{Tang.}\,\Phi \pm \tfrac{p'}{\Pi}\right),$$

vbi m deſignat numerum, in quem datum ſpatium duci debet, vt habeatur tempus, quod Luna motu ſuo relatiuo huic ſpatio percurrendo impendit. Demonſtrationibus huius formulae heic adornandis, eo potius ſuperſedimus, quod in Tomo XV. Commentar. iam allatae ſunt, nec de variationibus ſignorum in hac formula occurrentibus prolixiora adducere neceſſum eſt praecepta, quum pro quouis caſu propoſito facile dignoſci queat, quaenam obtinere debeant ſigna.

15. Praeter methodum iam expoſitam, pro computandis obſeruationibus Eclipſium Solis, alia quoque in vſum vocari poterit, de qua ob magnam eius affinitatem cum priori, breuiter quaedam indigitaſſe, haud inutile cenſebitur. Conſiſtit autem haec Methodus in eo, vt tempus coniunctionis Solis et Lunae ſecundum aſcenſionem rectam, hoc eſt momentum quo Sol et Luna eandem habuerint aſcenſionem rectam, inueſtigetur. Ad hoc vero tempus inueniendum, imprimis opus eſt noſſe Parallaxes Lunae ſecundum aſcenſionem rectam et declinationem, quae ex data Parallaxi diſtantiae zL, hoc eſt arcu L☽ et angulo zLP facile deducuntur, erit enim Parallaxis declinationis $=$ L☽ coſ. zLP et Parallaxis aſcenſionis rectae $= \text{L☽}\,\frac{\text{ſin.}\,zLP}{\text{ſin.}\,P☽}$. Ex datis vero diſtantia centrorum apparenti et declinatione

tione Lunae apparenti, quae aequalis habetur differentiae inter declinationem veram et Parallaxin declinationis, cognoſcetur differentia aſcenſionum rectarum apparens, cum qua ſi Parallaxis aſcenſionis rectae vel addendo vel ſubtrahendo, prout circumſtantiae poſtulant, combinetur; inuenietur differentia aſcenſionum rectarum vera. Hac autem cognita, ope motus relatiui Lunae in aſcenſionem rectam, dabitur tempus, quod ad ipſum tempus obſeruationis addi, vel ab eo ſubtrahi debet, vt habeatur tempus coniunctionis Solis et Lunae ſecundum aſcenſionem rectam. Si igitur hoc modo locum Lunae verum ſecundum aſcenſionem rectam et declinationem definire liceat, inde facile eruetur idem locus ſecundum Longitudinem et Latitudinem definitus. Porro ſi expreſſiones pro tempore coniunctionis ex obſeruationibus in duobus diuerſis locis inſtitutis, erutae, inter ſe combinentur, habebitur differentia meridianorum pro his locis. Caeterum quia locus Lunae ex Tabulis ſecundum Longitudinem et Latitudinem definiatur, ipſaque Latitudo Lunae temporibus Eclipſium ſemper ſit exigua, cum declinatio ſatis magna eſſe poſſit, commodius omnino videtur priorem adhibere Methodum, quippe quae huic iam adumbratae concinnitate et breuitate vix quicquam cedit. Tenendum autem eſt, praeter Methodos iam commemoratas infinitas alias excogitari poſſe, pro computandis obſeruationibus Eclipſium Solis, in genere enim omnis Methodus huic inſtituto adcommoda eſt, per quam inueſtigari poteſt

coniunctio Solis et Lunae reſpectu circuli cuiusdam fixi, modo is circulus talem habuerit ſitum, vt haec coniunctio prope ad ipſum tempus Eclipſeos obſeruatae contigerit. Sic loco Eclipticae et aequatoris, eligi poterit ipſa orbita Lunae, tunc ſcilicet quaeſtio eo redit, vt quaeratur tempus, quo recta per centra Solis et Lunae ducta, orbitae Lunae erat perpendicularis. Ad hoc autem problema ſoluendum, ſupponamus eſſe L locum Lunae verum, ☽ locum apparentem ob effectum Parallaxeos, ☉ locum Solis et quaeramus angulum, quem circulus de-
Tab. IX. Fig. 3. clinationis Lunae P L facit cum orbita eius M L, ſic enim ex datis duobus angulis z L P, P L M inuenietur M L ☽. Deinde ob datum angulum M F ☉, quaeſtio eo reducitur, vt in quadrilatero F ☉ ☽ L, ex datis duobus angulis ☉ F M, ☽ L M et tribus lateribus, L ☽, ☽ ☉ et F ☉, quaeratur quartum latus L F, quo cognito per motum horarium Lunae relatiuum in orbita, facile determinari poterit tempus, quod Luna percurrendo arcui L M impendit, ideoque et ipſum momentum quo Luna in M erat. Sed de hac Methodo plura heic adferre, minus e re eſt.

16. Vt de vſu et adplicatione noſtrae Methodi eo facilius ſit iudicium, exemplum adferre placet computi ad praeſcriptum huius Methodi adornati; ex hoc enim exemplo quiuis facile perſpicere poterit, quanta elegantia ſe commendet Methodus noſtra prae iis, quas hucusque ab Aſtronomis adhibitas eſſe conſtat:

Calcu-

Calculus pro fine Eclipſis die 22. Martii 1773. Temp. Aſtr. Petropol. obſeruato.

Finis obſeruatus T. vero $20^h. 19'. 23''$, hinc ang. hor. ☉lis $= 55°. 9'. 15''$, erat vero Aſc. ☉ recta $= 2°. 42'. 20''$, Aſc. ☽ $= 2°. 50'. 28''$ Differ. Aſcenſ. $= 8'. 18''$, proinde $zPL = 55°. 17'. 33''$. Eſt vero quoque $PL = 88°. 2'. 29''$; $\Pi LP = 23°. 26'. 15''$ et Lat. ☽ $= 39'. 53'', 9$.

Reſolutio trianguli zPL

L. ſin. $Pz = 9,7029966$	L. Tang. $Pz = 9,7668249$
L. ſin. $zPL = 9,9149086$	L. coſ. $zPL = 9,7554077$
L. ſin. $zQ = 9,6179052$	L. Tang. $PQ = 9,5222326$
	$PL = 88°. 2'. 29''$
	$PQ = 18. 24. 34$
	$QL = 69. 37. 55$
L. coſ. $zQ = 9,9589855$	L. Tang. $zQ = 9,6589216$
L. coſ. $LQ = 9,5416410$	L. ſin. $LQ = 9,9719603$
L. coſ. $zL = 9,5006265$	L. Tang. $zLP = 9,6869613$
	$zLP = 25°. 56'. 12''$
	$\Pi LP = 23. 26. 15$
	$zL\Pi = 2. 29. 57.$

Calculus pro Parallaxi Longitudinis et Latitudinis, nec non Diametro Lunae adparenti:

L. coſ. z L = 9,5006265
L. ε Π = 3,5130928
L. Conſt. = 4,6855749

L. ε Π coſ. z L = 7,6992942

ε Π coſ. z L = 0,0050037
1 − ε Π coſ. z L = 0,9949963

L Δ = 2,9511858
L. Compl. = 0,0021785

L. Diam. ☽ = 2,9533643
Semidiam. ☽ = 898, 2
⊙ = 961, 8

⊙ ☽ = 1860, 0

L. (1 − ε Π coſ. z L) = 9,9978215

L. Compl. = 0,0021785
L. ε Π = 3,5130928
L. ſin. z L = 9,9770516

L. L ☽ = 3,4923229
L coſ. z L Π = 9,9995868
L. ſin. z L Π = 8,6395349

L. Paral. Lat. = 3,4919097
L. L ☽ ſin. z L Π = 2,1318578
L. coſec. Π ☽ = 0,0000026

L. Par. Long. = 2,1318604
Par. Lat. = 3103, 9
Long. = 135, 5.

Calculus pro inueſtigando tempore coniunctionis.

Parall. Lat. = 3103,9
Lat. ☽ = 2393,9

☽ N = 710,0
⊙ ☽ = 1860,0
⊙☽ + ☽ N = 2570,0
⊙☽ − ☽ N = 1150,0

L. (⊙☽ + ☽N) = 3,4099331
L. (⊙☽ − ☽N) = 3,0606978

L. ⊙ N² = 6,4706309
L. ⊙ N = 3,2353154
⊙ N = 1719, 1
Par. Long = 135, 5

Differ. = 1583,6

L. 1583,

L. 1583,6 = 3,1996455	T. obſeru. = 20°. 19′. 23″
L. m = 0,3362991	ſubt. 3435″ = 57. 15
L. 3435″ = 3,5359446	Temp. coni. = 19. 22. 8.

Calculus pro correctionibus temporis coniunctionis.

L. ☽ N = 2,85126	L. $\frac{p'}{\Pi}$ = 8,6188
L. ⊙ N = 3,23531	L. Sec. Φ = 0,0342
L. Tan. Φ = 9,61595	L. m = 0,3363
L. m = 0,33630	L. $m\frac{p'}{\Pi}$ = 8,9551
L. m Tan. Φ = 9,95225	L. m Sec. Φ = 0,3705
L. $\frac{p}{\Pi}$ = 9,97882	
L. $\frac{m\,p}{\Pi}$ Ta. Φ = 9,93107	

hinc ergo elicitur tempus coniunctionis verum:

$$19^h.\ 22'.\ 8'' - 2,35\,\delta - 0,90.\,y + 0,94.\,\pi.$$

17. Ex ſola inſpectione huius calculi iam ſatis euidens eſſe confido, eum multo breuiorem eſſe illis, qui hucusque apud Aſtronomos vſu inualuerunt. Sic ex. gr. calculus noſter vix plures requirit operationes, quam quae in Methodo vulgari Nonageſimi, tantum ad inueniendas Parallaxes Longitudinis et Latitudinis inſtitui debent. Conf. *Cel. de la Lande Aſtronomia* Tom. II. pp. 374. 375. Quemadmodum autem ad Methodum Nonageſimi faciliorem reddendam, Tabulae altitudinum et Longitudinum Nonageſimi conſtrui ſolent, ita computus iuxta noſtram

noſtram Methodum inſtituendus ad ſummam redigetur breuitatem, ſi pro loco vbi obſeruatio facta, conſtructae fuerint Tabulae, quae pro dato angulo horario Solis, dataque eius declinatione, exhibeant diſtantiam aſtri a puncto z, nec non angulum zLP. Praeterea vbi correctiones δ, y et π ſemel definitae fuerint, eorum valoribus introductis, calculus pro correctione temporis coniunctionis plane omitti poteſt; praeſtat tamen calculum ita inſtruere, vt huius correctionis ſemper habeatur reſpectus, ſaltem dum obſeruationum in diuerſis locis factarum inſtituitur comparatio pro inueſtiganda differentia meridianorum, ſic enim facile erit iudicium, vtrum haec correctio aliquid efficere valeat, ad concluſiones immutandas, vel non. Denique haud obſcurum eſt, Methodum noſtram cum vſu adhiberi poſſe, ad computandas occultationes fixarum a Luna, vel alias quaſcunque obſeruationes circa coniunctiones fixarum cum Luna.

Concluſiones ex obſeruationibus ſupra allatis deductae.

18. Dum concluſiones ex meis obſeruationibus elicitas, iam propoſiturus ſum, haud inutile erit, delineationem Elementorum Aſtronomicorum ex Tab. *Mayeri* deſumtorum, praemittere.

Elemen-

Elementa Aſtronomica ex nouis Cel. *Mayeri* Tabulis Lunaribus deducta, pro Eclipſi Solis d. 22 Martii 1773.

	Temp. Pariſ. vero 16ʰ. 0	17ʰ.	18ʰ.	19ʰ.
Longit. ☉	0ˢ.2°.50′.51″,9	0ˢ. 2°.53′.20″,4	0ˢ. 2°. 55′. 48″,9	0ˢ. 2°.58′.17″,4
Aſc. rect. ☉	2. 36. 41	2. 39. 0	2. 41. 18	2. 43. 34
Log. mot. hor. ☉ in aſcenſ.	8, 5898	8, 5836	8, 5772	
Semid. ☉	16. 1, 8			
Longit. ☽	0. 2. 9. 15, 5	0. 2. 39. 23, 6	0. 3. 9. 31, 7	0. 3. 39. 39, 8
Latit. ☽	Bor. 46. 22, 5	43. 44, 3	41. 6, 1	38. 27, 9
Aſc. rect. ☽	1. 40. 8	2. 8. 50	2. 37. 32	3. 6. 14
Compl. Decl. ☽	88. 25. 59	88. 16. 25	88. 6. 51	87. 57. 17
ang. poſit. Π☽P	23. 27 30	23. 27. 4	23. 26. 32	23. 25. 54

Log. variat. hor.			
pro Lat. ☽	8, 6429040	Paral. ☽ − Par. ☉	54. 31, 2
Aſc. ☽	9, 6797306	Log. Π	3, 5147071
Dec. ☽	9, 2026094	Semid. ☽	14. 53, 7
		L Δ =	2, 9511858
		L *m* =	0, 3362991

Caeterum obſeruare iuuat, iuxta nouas has *Mayeri* Tabulas, tempus coniunctionis Solis et Lunae ſecundum Eclipticam contingere debuiſſe die 22 Martii 17ʰ. 29′. 56″ Temp. vero Pariſino, ſeu 17ʰ. 36′. 38″ Temp. medio, Longitudine Solis et Lunae exiſtente 0ˢ. 2°. 54′. 33″ et Latitudine Lunae Boreali 42′. 25″, 5. Quod diametrum Solis attinet, talem eius quantitatem heic adhibendam iudicaui, quae menſuris Cel. *Shortii* congruit, quibus nimirum

diameter Solis in Apogeo inuenta eſt 31′. 28″, 0. Reliqua vero omnia Elementa ſupra allata ex Tabulis *Mayerianis* deſumta ſunt.

19. Quoniam obſeruationes litteris *a*, *b*, *c*, *d* inſignitae non admodum bene inter ſe conſentiunt, ad earum diſſenſum imminuendum, momenta ex obſeruatis media eligere placuit, quibus diſtantiae quoque cornuum inter obſeruatas mediae reſponderent. Hoc igitur tantum notato, ſummarium calculi pro his obſeruationibus, ſequenti Tabula commode repraeſentari poteſt:

Temp. obſ. ver.			Diſt. corn. obſ.	Diſt. corn. vera	☉ ☽	☽ N	☉ N	Parall. Longit.
I.	18^h.	8′. 47″	10′. 57″, 1	11′. 53″, 4	1713″, 3	495″, 9	1640″, 0	388, 4
II.		10. 6	12. 23, 3	13. 21, 6	1673, 9	499, 1	1597, 8	388, 2
III.		11. 8	13. 10, 3	14. 8, 8	1650, 4	501, 6	1572, 3	387, 8
IV.		12. 26	14. 10, 8	15. 8, 5	1618, 4	504, 8	1537, 7	387, 4
a		24. 7	20. 55, 2	21. 39, 7	1323, 7	531, 5	1212, 3	381, 8
b		25. 15	21. 18, 3	22. 0	1304, 0	534, 0	1189, 6	380, 9
c		26. 16	21. 36, 1	22. 20	1283, 4	536, 2	1166, 0	380, 2
d		31. 36	21. 39, 9	24. 16	1149, 5	547, 5	1010, 7	376, 1
6	19.	57. 7	21. 6. 6	21 11	1356, 3	688, 0	1168, 8	209, 1
5		58. 34	20. 34. 5	20. 39	1385, 7	689, 7	1201, 8	204, 3
4		59. 40	20. 8. 2	20. 12	1409, 4	690, 8	1228, 5	200, 8
3	20.	0. 54	19. 26. 5	19. 30, 5	1444, 3	691, 7	1267, 9	197, 0
2		2. 13	18. 58. 4	19. 4, 4	1465, 2	693, 6	1290, 7	193, 1
1		3. 36	18. 17. 9	18. 21, 0	1498, 1	695, 1	1327, 1	188, 6
Finis Eclipſ. 20^h. 19′. 23″					1860, 0	710, 0	1719, 1	135, 5

20.

20. Hinc vero ſequentes eliciuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis Solis et Lunae:

I.	$19^h. 22'. 7''$	$+2,27\,\delta$	$+0,65.y$	$-0,39.\pi$	
II.	21. 54	+2,28	+0,68	−0,41	
III.	22. 0	+2,28	+0,69	−0,42	
IV.	22. 2	+2,29	+0,71	−0,44	
Med. A	19. 22. 1	$+2,28\,\delta$	$+0,68.y$	$-0,41.\pi$	
a	19. 21. 45	$+2,37\,\delta$	$+0,95.y$	$-0,67.\pi$	
b	22. 1	+2,38	+0,97	−0,70	
c	22. 10	+2,39	+0,99	−0,73	
d	21. 44	+2,47	+1,18	−0,91	
med. B	19. 21. 55	$+2,40\,\delta$	$+1,02.y$	$-0,75.\pi$	
1.	19 22. 26	$-2,45\,\delta$	$-1,14\,y$	$+0,96.\pi$	
2.	22. 32	−2,46	−1,17	+0,98	
3.	22. 11	−2,47	−1,19	+1,00	
4.	22. 30	−2,49	−1,22	+1,03	
5.	22. 30	−2,50	−1,25	+1,06	
6.	22. 25	−2,52	−1,28	+1,08	
med. C	19. 22. 26	$-2,48\,\delta$	$-1,20.y$	$+1,02.\pi$	

Finis Eclipſeos $19^h. 22'. 8'' - 2,35\,\delta - 0,90.y + 0,94\,\pi$.

Si nunc concluſio ex fine Eclipſis deducta combinetur cum mediis A et B, mediumque B cum medio C, nouae hae orientur expreſſiones pro tempore coniunctionis:

I.	$19^h. 22'. 4''$	$-0,03\,\delta$	$-0,11.y$	$+0,26.\pi$	
II.	22. 2	$+0,02\,\delta$	$+0,06.y$	$+0,09.\pi$	
III.	22. 10	$-0,04\,\delta$	$-0,09.y$	$+0,14.\pi$	hincque
Med.	19. 22. 5	$-0,02\,\delta$	$-0,05.y$	$+0,16.\pi$.	

In hac poſtrema concluſione coefficientes correctionum, δ, y, π, tam ſunt exigui, vt tuto negligi queant, interim ſi pro y ponatur $+10''$ et $\pi = -3''$, fiet tempus coniunctionis verum Solis et Lunae pro Petropoli $19^h. 22'. 4''$, quod ſaltem cum praeciſione quinque ſecundorum verum eſſe, adfirmare haud dubitamus.

21. Quoniam Tabulae Lunares Cel. *Mayeri* exhibeant tempus coniunctionis pro Petropoli die 22 Martii $19^h. 21'. 56''$ Temp. vero, poſita Longitudine Petropolis a Pariſiis $1^h. 52'. 0''$, fiet hinc correctio Tabularum pro Longitudine Lunae $4''$ ſubtractiua; ſin vero ſtatuatur Longitudo Petropolis $1^h. 51'. 58''$, haec correctio vno ſcrupulo ſecundo augebitur. Tabulae vero antiquiores Cel. *Mayeri*, quum Longitudinem Lunae praebeant 11 ſecundis minorem ea, quae ex nouis Tabulis deducitur, correctionem requirent 6 ſecundorum additiuam. Denique Tabulae recens editae Illuſtr. *Euleri*, quae a nouis Tabulis *Mayerianis* $4''$ in defectu differunt, pro caſu noſtro propoſito vix vlla correctione opus habent. Probe autem notandum eſt, dum ex Tabulis *Eulerianis* inueſtigatur locus Lunae, argumenta ex veteribus Tabulis *Mayeri* eſſe deſumenda; ſciendum enim eſt in nouis Tabulis *Mayeri*, non ſolum loca media Lunae, ſed etiam locum Apogaei, paulo aliter aſſignari, ac in Tabulis Cel. Viri primum editis; quare quum Tabulae Illuſtr. *Euleri* argumentis motus medii ex veteribus Tabulis *Mayeri* deſumtis

ſint

ſint accommodatae, non licebit haec argumenta ex nouis *Mayeri* Tabulis deſumere. Haec tamen non eo valent, quaſi contendere vellem, correctiones iſtas quas Cel. *Mayer* nouis ſuis Tabulis attulit, recte ſe non habere, ſed neceſſaria tantum eſſe exiſtimaui, pro vſu Tabularum Illuſtr. *Euleri* explicando.

22. Quod latitudinis correctionem attinet, eius inueſtigatio, hoc modo inſtitui poſſe videtur. Ex valore partis lucidae Temp. vero $19^h. 10'. 8''$ obſeruato $11'. 4'', 9$, hincque per refractionem correcto $11'. 12''$, diſtantia minima centrorum Solis et Lunae facile colligitur. Quum enim pro eodem tempore ſit ſemidiameter Lunae apparens $896'', 2$, ob ſemidiametrum Solis $961'', 8$ fiet diſtantia centrorum Solis et Lunae $606'', 4$. At differentia inter Parallaxin Latitudinis et Latitudinem Lunae, huic tempori reſpondens ex Tabulis colligitur $621'', 2$, quae igitur quum maior ſit diſtantia centrorum obſeruata, omnino ſubſiſtere nequit; patet enim hanc differentiam 15 ſaltem ſecundis imminuendam eſſe. Nec tamen hinc inferre licet, hanc $15''$ diminutionem originem tantum ducere ex totidem ſecundorum augmento, quod Latitudini Lunae ex Tabulis deductae adtribuendum eſſet, niſi certo demonſtrari poſſit, valores ſemidiametrorum Solis et Lunae, nec non quantitatem Parallaxeos Lunae aequatoreae pro exactiſſimis haberi debere. Quum vero omnis correctio, quae circa ſemidiametrum Lunae admitti poterit vix duo aut tria ſecunda excedat et de Pa-

rallaxi incertitudo ſaltem 5 ſcrupula ſecunda non exſuperet; ſatis tuto ſtatuere poterimus, quod correct o Latitudinis Lunae ſit 10″ additiua, quamuis negare non velimus eandem forſan duobus aut tribus ſecundis augendam eſſe; Parallaxin autem Lunae aequatoream 3 ſecundis imminui debere, ſatis probabile mihi videtur; Elementa igitur Aſtronomica correcta pro hac Eclipſi habebuntur ſequentia:

Tempus coniunctionis Solis et Lunae Petropoli die 22 Martii 19ʰ. 22′. 4″ T. vero quo tempore erat.

I. Longitudo Solis et Lunae 0ˢ. 2°. 54′. 33″.

II. Latit. Lunae 42′. 35″, 1.

III. Parallaxis Lunae aequatorea 54′. 37″. 1

23. Reſtat denique vt paucis exponam, quas pro differentiis meridianorum ex hac Eclipſi deducere licuit concluſiones, vbi primum meminiſſe iuvat, finem huius Eclipſis Petropoli obſeruatum quoque eſſe a Celeb. *Rumovski* Temp. vero 20ʰ. 19′. 19″ et a Celeb. *Krafft* Temp. 20ʰ. 19′. 27″, quod poſtremum momentum ad meridianum obſeruatorii noſtri reductum praebet 20ʰ. 19′. 29″ proxime. Cum hiſce obſeruationibus iam eas conferre licebit, quas pro fine Eclipſis Wiennae et Schwezingae factas, Rev. Pat. *Mayer* litteris mecum communicare dignatus eſt. Obſeruationes vero hae ita ſe habent:

Finis

Finis Eclipſis obſeruatus *Wiennae*	Temp. vero
a D. *Piderit* Tub. *Newt.* 4. ped.	$18^h. 53'. 58''$
a Rev. Pat. *Helt* Tub. *Newt.* $4\frac{1}{2}$ ped.	54. 4
a Rev. Pat. *Pilgram* Tub. *Newt.* 6 ped.	54. 10
a D. *Sambach* Tub. Diopt. 9 ped.	54. 11
Schwezingae	
a Rev. Pat. *Mayer* Tub. *Dollondi* 7 ped.	
Micromet. obiect. inſtructo	18. 23. 4
a Rev. Pat. *Metzger* Tub. *Dollond* 10 ped.	23. 8.

Hinc deducuntur ſequentes valores temporis coniunctionis pro Wienna

$18^h. 26. 15$

$21 - 2,29.\delta - 0,72.y + 1,33.\pi$

27

med. $18. 26. 22 - 2,29.\delta - 0,72.y + 1,33.\pi$

pro Schwezinga

$17. 55. 9 - 2,30.\delta - 0,76.y + 1,38.\pi$

13

med. $17. 55. 11 - 2,30.\delta - 0,76.y + 1,38.\pi$.

24. Ex obſeruationibus Petropoli factis pro fine Eclipſis, medio ſumto fit tempus coniunctionis ad Meridianum Petropolitanum

$$19^h. 22'. 9'' - 2,35.\delta - 0,90.y + 0,94.\pi$$

hoc igitur comparato, cum concluſione pro Wienna inuenta, fiet differentia meridianorum inter haec loca

$$55'. 47'' - 0,06.\delta - 0,18.y - 0,39.\pi$$

ideoque

ideoque ſi pro y ſubſtituatur + 10 et pro $\pi - 3$, fiet $= 55'. 46''$. Quódſi ergo Longitudo Wiennae a Pariſiis ſtatuatur eſſe $56'. 10''$ erit differentia meridianorum inter Lutetias Pariſiorum et Petropolin $1^h. 51'. 56''$, vel ſi contra Longitudo Petropolis a Pariſiis ponatur $1^h. 51'. 58''$, erit Longitudo Wiennae $56'. 12''$. Facile autem patet ob errorem vnius vel alterius ſecundi, vtrinque obſeruationibus adhaerentem fieri poſſe, vt concluſio haec inuenta aliquot ſecundorum correctionem admittat. Quicquid autem ſit, admodum tamen probabile hinc redditur Longitudinem obſeruatorii Petropolitani a meridiano obſeruatorii Pariſini eſſe $1^h. 51'. 57''$ vel $58''$, ſaltem maior quam $3''$ aberratio ab hac determinatione metuenda non videtur. Facta comparatione concluſionis pro Schwezinga cum Petropolitana, obtinebimus differentiam meridianorum:

$$1^h. 26'. 58'' - 0{,}05.\delta - 0{,}14.y - 0{,}44.\pi$$

ſeu poſito $y = +10$, $\pi = -3$, $1^h. 26'. 58''$, quare obtinebitur Longitudo Schwezingae a Pariſiis $25'\ 0''$. Porro ſi concluſiones pro Schwezinga et Wienna inter ſe conferantur, prodibit differentia meridianorum pro his locis:

$$31'. 11 + 0{,}02.\delta + 0{,}06.y + 0{,}06.\pi = 31'. 11''$$

proinde Longitudo Schwezingae a Pariſiis $24'. 59''$. Ex obſeruationibus circa Eclipſes Satellitum Iouis, Longitudo Schwezingae concluſa eſt $25'. 15''$; at admodum probabile videtur noſtram determinationem ex Eclipſi Solis deductam rectius ſe habere, quod etiam

etiam obſeruatione Eclipſis Solis 1 Aprilis A. 1764 Schwezingae facta comprobatur. Nam ſi ſupponamus finem Eclipſis Schwezingae obſeruatum fuiſſe Temp. vero $0^h. 44'. 0''$, habebitur tempus coniunctionis pro Schwezinga

$$22^h.\ 55'.\ 51'' - 2,40.\delta + 0,96.y - 1,45.\pi$$

at ex obſeruatione Rev. Pat. *Hell* pro fine Eclipſis, tempus coniunctionis pro Wienna fiet:

$$23.\ 27.\ 8 - 2,58.\delta + 1,34.y - 1,78.\pi$$

ideoque differentia meridianorum

$$31'.\ 17'' - 0,18.\delta + 0,38.y - 0,33.\pi,$$

quae expreſſio poſito $y = -5$, $\delta = -2$ et $\pi = -3$, abit in $31'. 16''$, hincque fiet Longitudo Schwezingae $24'. 54''$. Ipſum momentum pro fine Eclipſis A. 1764. a Rev. Pat. *Mayer* aſſignatum quidem habetur Tempore $0^h. 43'. 0''$, at ſi hoc momentum in vſum vocetur, Longitudo loci pro Schwezinga ſere vno minuto primo adhuc diminuenda erit, quae diminutio quum omni deſtituatur veriſimilitudine, in eam omnino maxime procliuis ſum opinionem, vt credam, momentum a Rev. Pat. *Mayer* exhibitum pro fine Eclipſis 1764, vno minuto primo eſſe augendum. Donec igitur Longitudo Schwezingae a Pariſiis aliis obſeruationibus certius ſtabiliri queat, videtur eam abſque ſenſibili errore aſſumi poſſe $25'. 0''$.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAS

AB

ASTRONOMIS ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARVM

STEPHANO RVMOVSKI ET *AND. I. LEXELL*,

ANNO 1773. INSTITVTAS, RECENSVIT

AND. IOH. LEXELL.

Obſeruationes Aſtronomicas Anno 1773. factas, tam proprias, quam eas quas Cel. *Rumovski* benigne mecum communicare voluit, breuiter heic exponere conſtitui. In obſeruationibus autem Celeb. *Rumovski* recenſendis, iisdem vtar verbis, quibus a Celeb. hoc Aſtronomo conceptae ſunt. In genere quoque monuiſſe ſufficiat obſeruationes Cel. *Rumovski* in ſpecula Aſtronomica ſuperiori, meas vero in conclaui inferiori factas eſſe.

Eclipſis Solis die $\frac{11}{22}$. *Martii a Cel.* Rumovski *obſeruata.*

Ex altitudinibus Solis correſpondentibus captis

Die $\frac{8}{19}$.	Martii prodiit meridies verus -	0^h.	$38'$.	$8''$,6
$\frac{10}{21}$.	Martii - - - -	0.	39.	3, 5

vnde

vnde acceleratio horologii ſupra diem ſo-
larem medium concluditur 45″, 7.

Die $\frac{14}{25}$. Martii meridies verus ex altitud.
Solis correſp. - - - - - 0^h. 40′. 42″

vnde acceleratio horologii ſupra diem ſo-
larem medium prodit 43″, 2.

„Ob viciniam Solis horizonti de initio
„Eclipſeos obſeruando non fui ſollici-
„tus; finem vero eiusdem limbo Solis
„leuiuſcula vndulatione inquinato, ob-
„ſeruaui ad horologium - - - 20. 59. 8

„Vnde adhibita acceleratione horol. 43″, 2
„prodit tempus verum finis Eclipſeos 20^h. 19′. 19″.

„Hanc potius quam illam accelerationem adhibere „placuit ideo, quod a meridie illius diei, in quem „Eclipſis Solis incidit, ob frigus imminutum, acce-„leratio quoque horologii imminui debuit.

„Durante Eclipſi in decem diuerſis quadrantis „poſitionibus obſeruaui appulſus limborum Solis et Lu-„nae ad fila Micrometri quadranti affixi, verum „iis referendis ſuperſedeo.

„Obſeruatio haec inſtituta eſt Teleſcopio Gre-„goriano 24 pollic. quam proxime.

Obſeruatio Eclipſis Lunae partialis die $\frac{19}{30}$. Sept.

Obſeruationi huius Eclipſis a me inſtitutae quum Cl *Schröter* honeſtiſſimus huius vrbis ciuis et qui in obſeruationibus Aſtronomicis inſtituendis

 egre-

egregie verſatus eſt, intereſſe voluerit, momenta immerſionum vel emerſionum macularum ab ipſo adnotata, noſtris interſerenda eſſe exiſtimaui, licet nonnulla diſcrepantia obſeruationum ab ipſo factarum ab iis quas Cel. *Rumovski* et ego inſtituimus oriri debuiſſet, inde quod D. *Schröter* Tubo vſus ſit multo fortiori iis, quos Cel. *Rumovski* et ego adhibuimus. Nos enim Tubis *Dollondianis* 3 pedum duplici vitro obiectiuo praeditis vſi ſumus, qui obiecta vix plusquam 20 aut 25 vicibus multiplicant, ille vero Tubum adhibuit *Dollondianum* trium pedum ſed triplici vitro obiectiuo inſtructum et obiecta 60 circiter multiplicantem. Vt vero momenta a ſingulis obſeruatoribus notata, inter ſe diſcerni queant, notaſſe conueniet obſeruationes a Celeb. *Rumovski* factas littera R, quas Cl. *Schröter* inſtituit littera S measque littera L indicari.

		Temp. vero
Penumbra apparet in limbo Lunae	R	$6^h. 29'. 0''$
Initium Eclipſeos - - - -	L	31. 51
- - - -	R	34. 27
- - - -	S	34. 36
Vmbra ad Ariſtarchum - -	R	40. 2
Ariſtarchus immergit - - -	L	40. 7
- - - - - -	S	40. 49
Vmbra ad Galileum - - -	R	41. 47
Heraclides immergit - - -	L	42. 26
Harpalus immergit - - -	L	43. 48
Helicon immergit - - -	L	45. 14
Vmbra ad Heliconem - - -	R	46. 2

Vmbra

		Temp. vero	
Vmbra ad Grimaldum - -	S	$6^h. 46'. 32''$	
- - - - -	R	46. 37	
- - - -	L	47. 5	
Helicon in vmbra - - - -	R	47. 27	
Grimaldus immergit - - -	S	49. 6	
- - - - - -	L	49. 10	
- - - - - -	R	52. 0	dubia
Vmbra ad Platonem - - -	L	51. 14	
- - - - -	R	52. 21	
Copernicus immergere incipit -	S	52. 19	
totus tegitur - -	S	53. 6	
Eratoſthenes immergit - -	L	53. 24	
Vmbra ad Keplerum - - -	R	53. 28	
Plato immergit - - -	R	54. 2	
Vmbra ad Copernicum - -	R	56. 47	
Copernicus immergit - -	L	56. 54	
Vmbra ad Archimedem - -	R	7. 0. 27	
ad Capuanum - -	R	2. 37	
ad mare Serenitatis -	S	3. 54	
Immergit mare Imbrium - -	R	4. 20	
Vmbra ad mare humorum -	L	10. 24	
Vmbra ad Manilium - - -	S	7. 10. 59	
- - - - -	R	12. 23	
Manilius immergit - - -	S	12. 12	
Vmbra ad Gaſſendum - -	R	13. 5	
Manilius immergit - -	L	14. 2	
- - - - - -	R	14. 29	
Vmbra ad Poſidonium - -	R	15. 12	
Menelaum - -	S	15. 14	

		Temp. vero
Menelaus immergit - -	L	$7^h. 15'. 46$ dubia
Vmbra ad Menelaum - - -	R	16. 22
Poſidonius immergit - -	L	17. 8
Menelaus immergit - -	R	18. 7
- - - - -	S	18. 59
Vmbra ad Plinium - -	R	21. 21
Plinius immergit - -	R	22. 17
Vmbra ad Dyonyſium - -	S	24. 30
Bulialdum - - -	R	24. 37
Dyonyſius immergit - -	S	25. 13
Vmbra ad Dyonyſium - -	R	25. 52
Bulialdus immergit - - -	L	26. 15
Dyonyſius immergit - -	L	26. 33
- - - -	R	27. 27
Cleomedes immergit - -	L	27. 38
Bulialdus immergit - -	R	28. 23
Vmbra ad Proclum - -	S	30. 13
Vmbra ad mare criſium - -	L	31. 31
- - - - -	R	32. 9
Mare humorum totum tegitur -	L	32. 8
Proclus immergit - - -	L	33. 1
Vmbra ad promontorium acutum	R	37. 7
Promontorium acutum immergit	S	40. 12
Mare criſium totum in vmbra	S	43. 0
- - - -	L	43. 1
- - - -	R	43. 22
Vmbra ad mare nectaris - -	R	48. 27
ad Petauium - - -	S	8. 0. 45
Petauius immergit - -	S	1. 5

Mare

		Temp. vero
Mare humorum totum emergit -	L	8ʰ. 4ʹ. 11
Gaſſendus emergere incipit -	S	8. 44
Petauius emergit - - -	L	10. 2
Grimaldus emergere incipit -	L	14. 32
- - - -	S	15. 41
Grimaldus totus emergit - -	L	17. 2
- - - - -	S	20. 42
Landsbergius emergit - -	L	22. 26
Galileus emergit - - -	L	31. 33
Keplerus emergere incipit -	L	35. 6
Keplerus emergit - - -	S	40. 6
Copernicus emergere incipit -	L	43. 21
Ariſtarchus emergit - -	L	44. 2
Copernicus totus extra vmbram	L	44. 47
Cyrillus emergit - - -	L	45. 37
Ariſtarchus emergere incipit -	S	46. 1
totus extra vmbram - -	S	46. 19
Promontorium acutum emergit -	L	55. 59
Dyonyſius emergit - - -	L	57. 17
Manilius emergit - - -	L	9. 2. 1
Menelaus emergit - - -	L	4. 37
Heraclides extra vmbram -	L	5. 57
Harpalus emergere incipit -	L	6. 27
Timocharis emergit - -	L	8. 19
Mare criſium emergere incipit -	L	16. 27
- - - -	R	16. 47
Eudoxus emergit - - -	L	18. 33
Poſidonius emergere incipit -	R	19. 37
Ariſtoteles emergit - - -	L	19. 42

Poſi-

		Temp. vero
Poſidonius emergit - - -	L	$9^h. 21'. 7''$
- - - - -	R	22. 27
Proclus emergit - - -	L	21. 37
Meſſala emergit - - -	L	24. 58
Mare criſium totum extra vmbram	L	25. 18
- - - -	R	26. 9
Hermes emergit - - -	L	27. 18
Finis Eclipſeos - - -	L	33. 28
- - - -	S	34. 58
- - - -	R	35. 27.

Durante hac Eclipſi coelo vſi ſumus ſatis ſudo, aere tamen non prorſus ſicco.

Quemadmodum in Eclipſibus Lunae totalibus ſaepius obſeruari ſoleat, vt Luna poſtquam totalem Eclipſin paſſa eſt, colore ſubruſo conſpiciatur, ita in hac Eclipſi Lunae partiali inexſpectatum id mihi ſe obtulit phaenomenon, quod pars Lunae in vmbram immerſa ſatis diſtincte videri potuerit, colore primum cinereo deinde magis magisque in ſubruſum abeunte.

Praeter obſeruationes circa immerſiones et emerſiones macularum iam expoſitas, nonnullas quoque partium lucidarum Lunae menſuras cepi micrometro obiectiuo, quod Teleſcopio Gregoriano duorum pedum adaptatur; verum quod hae menſurae non admodum bene inter ſe conſentire mihi viſae ſunt, eas hoc loco plane praetereundas eſſe, exiſtimaui. Ex hoc autem ſpecimine ſatis euidenter conuictus

victus ſum, huiusmodi obſeruationes non minus quam immerſiones vel emerſiones macularum dubias eſſe, ita vt ex iis vix maiori cum certitudine quidquam concludi poſſit de veris Elementis Lunae, quam ex obſeruationibus macularum vel etiam initio et fine Eclipſis Lunaris.

Occultationes fixarum a Luna et congreſſus Lunae cum ſtellis fixis.

	Temp. Pend.
Die $\frac{12}{23}$. Sept. Meridies verus ex altitud. correſp. - - - -	$11^h. 25'. 16'', 3$
$\frac{21.}{2.}$ $\frac{\text{Sept.}}{\text{Oct.}}$ Meridies - - -	$11.\ 19.\ 56,\ 7$

hinc colligitur retardatio penduli diurna inter hos meridies $15'', 8$ et tempus meridiei die $\frac{14}{25}$. Sept. ad Pendulum $11^h. 24'. 4''$. Eodem vero die $\frac{14}{25}$. Sept. obſeruaui *occultationem ſtellae fixae quintae magnitudinis in conſtellatione Capricorni*, quae contigit ad limbum Lunae obſcurum Temp. Pend. $6^h. 42'. 57''$ ſeu $7^h. 19'. 3''$ Temp. vero. Obſeruatio quidem haec certiſſima eſt, ſed ex ea parum vtilitatis ſperare licet, quum valde dubium ſit vtrum locus ſtellae in quodam Catalogo conſignatus habeatur, nec mihi quidem vacauit eius ſitum obſeruationibus poſtmodum factis, explorare.

Die $\frac{23.}{4.}$ $\frac{\text{Sept.}}{\text{Oct.}}$ Meridies ex altitud. Solis correſpond. $11^h. 18'. 47''. 4$ hinc retardatio Penduli diurna inter 21 et 23 Septemb. $16'', 6$.

Die $\frac{21.}{2.}$ $\frac{\text{Sept.}}{\text{Oct.}}$ obſeruatus eſt congreſſus *Stellae ξ in conſtellatione arietis cum Luna. Occultatio* ſtellae contigit tempore Penduli $11^h. 13'. 35''$ hincque Tempore vero $11^h. 53'. 56''$. Haec obſeruatio aliquantum dubia eſt, quia immerſio ad limbum Lunae lucidum obſeruata eſt, maiorem tamen quam dimidii minuti primi errorem ipſi ineſſe non ſuſpicor. *Emerſio* eiusdem ſtellae ad limbum Lunae obſcurum obſeruata eſt Temp. Pend. $12^h. 30'. 8''$ ſeu Temp. vero $13^h. 10'. 30''\frac{1}{2}$. Obſeruatio admodum certa.

Caeterum tam haec quam ſuperior obſeruatio facta Teleſcopio Gregoriano duorum pedum.

Occultatio ϱ ♐ a Luna die $\frac{10}{21}$. *Octob. a Cel.* Rumovski *obſeruata.*

„Die $\frac{10}{21}$. Octob. Merid. verus ex altitud. Solis „correſpond. $0^h. 24'. 56'', 9$. Eodem die Luna limbo obſcuro occultauit ſtellam ϱ Sagittarii horologio „monſtrante $8^h. 17'. 14''\frac{1}{2}$. Obſeruatio certa eſt ad „dimidium ſecundum temporis.

„Die $\frac{11}{22}$. Octob. Merid. verus ex altit. corre„ſpond. $0^h. 24'. 59'', 9$ vnde colligitur tempus ve„rum diſparitionis ſtellae $7. 52. 16'', \frac{1}{2}$ obſeruatio fa„cta eſt Teleſcopio Gregoriano ſupra memorato.„

Tranſitus Lunae per Hyades die $\frac{21.}{1.}$ $\frac{\text{Octob.}}{\text{Novemb.}}$

Hoc die primum varias Lunae a ſtellis I et II θ Tauri diſtantias micrometro obiectiuo menſuravi,

vi, tum vero etiam praeter diſtantias Palilicii a limbo Lunae lucido circa tempus occultationis menſuratas, exactam obſeruationem emerſionis Stellae ad limbum Lunae obſcurum inſtituere mihi licuit, obſeruatio enim immerſionis ob nubes impedita fuit. Fateri autem cogor has obſeruationes quoad vera momenta temporum in aliquali incertitudine eſſe poſſe, quum proximae obſeruationes meridierum ex altitudinibus correſpondentibus inter quas haec obſervatio inciderit, interuallo 21 dierum diſtent, quo tempore de regulari motu Penduli omnimoda certitudo ſperari non poteſt. Interim quum ex praecedentibus et inſequentibus obſeruationibus pro motu horologii explorando inſtitutis, retardatio eius colligatur haud multum diſpar ab ea, quam obſeruationes pro meridiebus dier. $\frac{13}{24}$. Octob. et $\frac{3}{14}$. Nov. dederunt, incertitudo quae momentis temporum die $\frac{21.}{1.}$ $\frac{\text{Octob.}}{\text{Nou.}}$ ad Pendulum obſeruatis circa reductionem eorum ad tempus verum inducitur, vix quinque ſcrupula ſecunda ſupergredi poterit.

Inuentus autem eſt

pro $\frac{13}{24}$. Oct. Merid. ex altit. correſp. $11^h. 9'. 48'', 0$
$\frac{3}{14}$. Nou. Meridies - - - $11. 6. 56, 4$

hincque retardatio Penduli diurna $9'', 6$, ratione autem habita obſeruationum praecedentium, retardationem inter 13 et 21 Octob. $10'', 2$ adhibendam eſſe cenſui.

Coniunctio Lunae apparens cum ſtellis θ Tauri

	Diſtant. Stellae a limbo Lunae	Temp. Pend.	Temp. vero	
1 θ . . .	16′. 0″	6ʰ. 32′. 30″	7ʰ. 24′. 37″	
. . .	14. 16	35. 28	27. 35	
2 θ . . .	18. 47	37. 39	29. 46	dubia
. . .	16. 8	45. 42	37. 49	dubia
. . .	15. 51	47. 13	39. 20	
. . .	15. 24	48. 58	41. 5	
. . .	15. 9	50. 45	42. 52	
. . .	14. 37	52. 49	44. 56	
. . .	14. 15	54. 22	46. 29	
. . .	14. 0	56. 2	48. 9	
. . .	13. 34	59. 2	51. 9	
1 θ	7. 7	7. 0. 48	52. 55	
2 θ . . .	12. 45	3. 9	7. 55. 16	
. . .	12. 15	8. 20	8. 0. 27	
. . .	11. 25	14. 48	6. 55	
1 θ . . .	5. 54	16. 27	8. 33	
2 θ . . .	11. 16	18. 16	10. 23	
. . .	11. 14	20 33	12. 40	
. . .	11. 36	24. 32	16. 39	
. . .	12. 9	26. 46	18. 53	
. . .	12. 26	28. 41	20. 48	
1 θ	6. 58	30. 28	22. 35	
2 θ . . .	13. 12	33. 18	25. 25	dubia
. . .	13. 32	37. 51	29. 58	

Con-

Coniunctio Lunae apparens cum Palilicio.

	Diſtant. Stellae a limbo Lunae	Temp. Pend.	Temp. vero	
I.	21′. 50″	10^h. 2′. 54″	10^h. 55′. 3″	dubia
II.	20. 59	5. 26	57. 35	dubia
III.	19. 48	8. 0	11. 0. 9	
IV.	18. 16	11. 20	3. 29	
V.	17. 32	12. 56	5. 5	
VI.	17. 4	14. 31	6. 40	
VII.	16. 18	17. 23	9. 32	
VIII.	12. 24	26. 22	18. 31	
IX.	11. 50	27. 57	20. 6	
X.	11. 15	29. 13	21. 22	
XI.	10. 47	30. 32	22. 41	
XII.	10. 8	32. 6	24. 15	
XIII.	9. 32	34. 10	26. 19	
XIV.	8. 36	36. 3	28. 12	
XV.	7. 40	37. 47	29. 56	dubia
XVI.	7. 13	39. 36	31. 45	
XVII.	4. 56	45. 17	37. 26	dubia
XVIII.	4. 43	47. 8	39. 17	
XIX.	2. 23	52. 57	45. 6	
Stella adhuc videtur, ſed nubes interueniunt quae eam vi ſui eripiunt - -		58. 40	50. 49	
Nubibus aliquantulum diſſipatis Stella videtur limbo Lunae quaſi iuncta, ideoque immerſioni valde propinqua		59. 30	51. 39	

 Nubi-

	Temp. vero	Temp. vero
Nubibus demum diſpulſis, nullum amplius adparet indicium ſtellae - -	$11^h. 0'. 32''$	$11^h. 52'. 41''$
Emerſio ſtellae ſatis exacta ad limbum Lunae obſcurum	12. 4. 37	12. 56. 47

Licet obſeruationibus diſtantiarum Palilicii a limbo Lunae illuſtrato, omnimodam certitudinem vindicare non audeam, partim ob aliquantas difficultates, quibus huiusmodi obſeruationes premuntur, partim ob coelum nubibus inquinatum; calculo tamen inſtituto inueni easdem melius quam quidem ſperare fas fuiſſet inter ſe conſentire. Quid autem ex his obſeruationibus cum emerſione ſtellae combinatis colligatur de vero momento coniunctionis Lunae cum Palilicio infra pluribus exponam.

Eclipſes Satellitum Iouis.

Immerſio I. Satellitis die $\frac{5}{16}$. Iulii	Temp. vero
Lumen Satellitis debilitari incipit -	$11^h. 25'. 18''$
Senſibiliter decreuit - - - -	25. 56
Satelles difficulter videtur - - -	27. 1
Totalis immerſio - - - -	27. 8

Coelum ſudum. Obſeruatio. bona.

Immerſio I. die $\frac{12}{23}$ Iulii.

Nubes interueniunt, quae Satellitem viſui eripiunt - - - -	13. 18.
Diſpulſis nubibus Satelles adhuc conſpicitur ſed lumine valde debili -	13. 19. 57
Immerſio totalis - - - -	20. 20

Me-

	Temp. vero
Mediocris obſeruatio. Immerſionem ſecundi Satellitis eodem die ob nubes obſeruare non licuit.	
Immerſio II. Satellitis die $\frac{19}{30}$. Iulii	
Lumen Satellitis diminui incipit -	14. 49. 12
Satelles vix videtur - - - - -	50. 26
Totalis immerſio - - - - -	50. 38
Obſeruatio ſatis bona niſi quod lumen diluculi fortiſſimum.	
Immerſio I. Satellitis eodem die	
Satelles immergit - - - - -	15. 14. 40
Obſeruatio aliquantum dubia, nam ob lumen crepuſculare reliqui Satellites difficulter videbantur.	
Immerſio I. Satellitis die 28. *Iulii* / 8. Aug. *a Cel. Rumovski obſeruata.*	
Lumen Satellitis diminutum - - -	11. 36. 45
Immerſio totalis - - - - -	37. 36
Obſeruatio bona, ſplendor tamen Lunae exactitudini eius officere potuit.	
Eiusdem immerſionis obſeruatio mea	
Lumen Satellitis decreſcere incipit -	11. 36. 7
Satelles difficulter videtur - - - -	37. 30
Immerſio totalis - - - - - -	37. 37
Immerſio III. Satellitis eodem die	
Lumen Satellitis diminutionem patitur	13. 29. 8
Satelles difficulter videtur - - - -	31. 23
Immerſio totalis - - - - - -	31. 34

Im-

Immerſio I. Satellitis die $\frac{4}{15}$. Aug.
a Cel. Rumovski obſeruata. Temp. vero

Lumen Satellitis diminutum -	$13^h. 32'. 0''$
Immerſio totalis - - - -	32. 48

Obſeruatio exacta.

Eiusdem immerſionis obſeruatio mea.

Lumen Satellitis decreſcit - - -	31. 23
Senſibiliter decreuit - - - -	32. 10
Satelles difficulter videtur - - -	32. 48
Immerſio totalis - - - -	32. 58

Coelum ſudum. Obſeruatio bona.

Immerſio I. Satellitis die $\frac{11}{22}$. Aug.

Satellites debili lumine videtur -	15. 27. 53
Immerſio totalis - - - -	28. 20

Obſeruatio aliquantum dubia, tam ob lumen diluculi, quam nubes Ioui propinquas.

Immerſio I. Satellitis die $\frac{13}{24}$. Aug.
Auctore Cel. Rumovski.

Totatis immerſio - - - -	9. 56. 49

Coelo humido, faſciis Iouis non diſtincte conſpicuis.

Eiusdem immerſionis obſeruatio mea

Satelles exiguo lumine videtur -	9. 56. 21
Immerſio totalis - - - - -	56. 51

Obſeruatio dubia ab aerem vaporibus repletum.

Immerſionem II. Satellitis ob pluuiam obſeruare non licuit.

Im-

Immerſio I. Satellitis die $\frac{27.}{7.}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$

Auctore Cel. Rumovski. Temp. vero

Lumen Satellitis diminutum - $13^{h}.\ 47'\ 20''$
Immerſio totalis - - - - - 48. 30

Obſeruatio dubia ob vapores, faſciis Iouis vix conſpicuis.

Immerſio III. Satellitis die $\frac{2}{13}$. Sept.

Lumen Satellitis decreſcere incipit - 9. 45. 23
Satelles vix videtur - - - - - 48. 23
Immerſio totalis - - - - - - 48. 35

Immerſio I. Satellitis die $\frac{3}{14}$. Sept.

Satelles difficulter videtur - - 15. 46. 6
Totalis immerſio - - - - - - 46. 14

Obſeruatio dubia ob nubes in regione Iouis vagantes.

Immerſio IV. Satellitis die $\frac{8}{19}$. Sept.

Immerſio Satellitis - - - 16. 27. 22

Obſeruatio aliquantum dubia.

Emerſio I Satellitis die $\frac{21.}{3.}$ $\frac{\text{Sept.}}{\text{Oct.}}$

Emerſio Satellitis - - - - 10. 49. 49

Obſeruatio nonnihil dubia partim ob nubes Iouem paulo ante obſeruationem tegentes, partim ob Iouis cum Luna viciniam.

Emerſio IV. Satellitis die $\frac{25.}{6.}$ $\frac{\text{Septemb.}}{\text{Octob.}}$

Primum indicium Satellitis - - 12. 52. 58
Multum inclaruit - - - - 53. 53

Haec obſeruatio ſatis bona mihi eſt viſa.

	Temp. vero
Pro emerſione II. Satellitis eodem die et Immerſione IV. momenta maxime dubia inueni, quae igitur heic referre nihil attinet.	
Emerſio I. Satellitis die $\frac{28.\ \text{Sept.}}{9.\ \text{Octob.}}$	
Obſeruata a Cel. Rumovski.	
Satelles prope Planetam prodit ex vmbra - - - - - -	$12^h.47'.\ 8''$
Idcirco obſeruatio ad aliquod ſecunda dubia eſſe poteſt.	
Eiusdem emerſionis obſeruatio mea.	
Primum indicium Satellitis - -	12. 46. 30
Clarius videtur - - - - - -	36
Lumine multum inclaruit - -	47. 40
Aeque bene videtur ac reliqui Satellites	48. 7
Coelum admodum ſudum et faſciae Iouis bene viſibiles.	
Emerſio I. Satellitis die $\frac{30.\ \text{Sept.}}{11.\ \text{Oct.}}$	
Satelles primum in conſpectum prodit	7. 15. 30
Clarius videtur - - - -	15. 47
Multum inclaruit - - - - -	16. 35
Aeque bene videtur ac reliqui Satellites	17. 19
Coelum ſudum et faſciae Iouis optime viſibiles.	
Emerſio II Satellitis die $\frac{9.}{20.}$ Octob.	
a Celeb. Rumovski obſeruata - -	11. 59. 56
Eiusdem emerſionis obſeruatio mea	
Primum indicium Satellitis - -	11. 59. 26
Melius videtur - - - - - -	59. 36

Lumi-

	Temp. vero
Lumine multum inclaruit - -	$12^h. 0'. 41''$
Pleno ſplendore fulget - - -	1. 28

Obſeruatio bona. Coelum ſudum, faſciae Iouis bene viſibiles.

Emerſio III. Satellitis die $\frac{15}{26}$. Octob.

Auctore Celeb. Rumovski - -	12. 36. 23

Eiusdem emerſionis obſeruatio a me facta

Satelles primum emicat - -	12. 36. 54
Certus ſum adeſſe - - - -	37. 3
Multum inclaruit - - - -	37. 57
Aeque bene videtur ac reliqui - -	39. 5

Coelum ſudum.

Emerſio II. Satellitis die $\frac{3}{14}$. Nouemb.

Primum indicium Satellitis - -	9. 10. 52
admodum inclaruit - - -	11. 55
Nullum incrementum lucis animaduertitur - - - - - -	13. 18

Coelum ſudum, ſed ventus fortiſſimus.

Emerſio I. Satellitis die $\frac{6}{17}$. Nouemb.

Auctore Cel. Rumovski - -	11. 22. 10

Eiusdem emerſionis obſeruatio mea.

Satelles primum emicare videtur -	11. 22. 21
Melius videtur - - - -	22. 30
Multum inclaruit - - - -	23. 21
Vix vllum luminis incrementum -	24. 24

Ventus fortiſſimus, faſciis Iouis non bene conſpicuis.	Temp. vero
Emerſio I. Satellitis die $\frac{8}{19}$. Nouemb.	
Auctore Cel. Rumovski.	
Satelles ipſi adeſſe videtur, ſed dubitat vtrum is fuerit - - - -	$5^h. 50'. 27''$
Certo eundem adeſſe videt - -	50. 48
Eiusdem emerſionis obſeruatio mea.	
Primum indicium Satellitis mihi viſum	50. 52
Melius videtur - - - -	50. 57
Multum inclaruit - - - -	51. 51
Aeque bene videtur ac reliqui -	52. 21
Emerſio III. Satellitis die $\frac{13}{24}$. Nov.	
Satelles primum emicare videtur -	4. 39. 12
Certus ſum eum adeſſe - - -	39. 17
Admodum inclaruit - - - -	41. 3
Vix vllum luminis incrementum -	41. 37
Coelum ſudum ſed Luna Ioui valde propinqua.	
Emerſio I. Satellitis die $\frac{15}{26}$. Nov.	
Satelles primum emicat - - -	7. 44. 8
Senſibiliter inclaruit - - - -	44. 32
Aeque bene videtur ac reliqui -	7. 45. 22
Emerſio I. Satellitis die $\frac{15}{26}$. Decemb.	
Satellitis primum indicium - -	9. 43. 42
Certus ſum eum adeſſe - - -	52
Lumine multum creuit - - -	44. 48

Coe-

Coelum ſudum, ſed Luna pleno ſplendore fulgebat. Temp. vero

Emerſio I. Satellitis die $\frac{17}{28}$. Decemb.

Satelles emergere viſus - -	4. 10. 57
Lumine inclaruit - - - -	11. 42
Vix vllum luminis incrementum obſervari poteſt - - - -	12. 34

Obſeruatio vt videbatur bona.

Expoſitio calculi pro coniunctione Lunae cum Palilicio die $\frac{21.}{1.}$ Octob. / Nouemb.

In diſſertatione de Eclipſi Solis huius anni 1773, Methodum expoſui, qua obſeruationes Eclipſium Solis ſatis expedite computari poſſunt, leui autem mutatione haec Methodus quoque adhiberi poterit, ad computandas occultationes fixarum a Luna, vel etiam quascunque earum a Luna diſtantias. Interim quum haec Methodus ideo forſan quibusdam minus probata reddi poſſit, quod in ea requiratur, vt aſcenſio recta Lunae pro ſingulis obſervationibus ad quas calculus adplicatur, exploretur, quod Elementum alioquin in aliis Methodis vt cognitum ſupponi non ſolet; iam nouam propoſiturus ſum rationem huiusmodi computos ineundi, quae illi, quam in modo dicta Diſſertatione propoſui, facilitate vix quidquam cedit, caeterumque ſumma ſe commendat exactitudine. Sit P Z meridianus loci, in quo obſeruatio inſtituta eſt, P polus aequatoris, Z punctum in quo recta per centrum tellu- Tab. IX. Fig. 4.

 ris

ris et locum obſeruatoris ducta meridiano occurrit, Π polus Eclipticae, L locus Lunae verus et M locus eius apparens ob Parallaxin, atque ducantur arcus circulorum maximorum Π P, Π Z, Π L, Π M et Z L M. Ex dato igitur tempore obſeruationis et aſcenſione recta Solis primum innoteſcet angulus Π P Z, tumque reſoluatur triangulum Π P Z ex datis nimirum Π P, Π Z et angulo Π P Z quaerendo arcum Π Z et angulum P Π Z, quare quum angulus P Π L quoque cognitus ſit, innoteſcet Z Π L. Quum igitur in triangulo Z Π L, dentur Π Z, Π L aequalis complemento latitudinis Lunae et angulus Z Π L, reliquum eſt, vt quaerantur Parallaxes Lunae in Longitudinem et Latitudinem. Si itaque Π deſignet Parallaxin Lunae horizontalem aequatoream et ε exprimat rationem inter radium telluris pro loco dato et ſemidiametrum telluris, inueſtigatio Parallaxium ſequentibus perficietur formulis:

$$\text{Tang. } M\,\Pi\,L = \frac{\varepsilon\,\text{ſin. }\Pi\,\text{ſin. }\Pi\,Z\,\text{ſin. }Z\,\Pi\,L}{\text{ſin. }\Pi\,L - \varepsilon\,\text{ſin. }\Pi\,\text{ſin. }\Pi\,Z\,\text{coſ. }Z\,\Pi\,L} \text{ et}$$

$$\text{Cot. }\Pi\,M = \frac{\text{ſin. }Z\,\Pi\,M}{\text{ſin. }Z\,\Pi\,L}\,\text{Cot. }\Pi\,L\,\left(1 - \frac{\varepsilon\,\text{ſin. }\Pi\,\text{coſ. }\Pi\,Z}{\text{coſ. }\Pi\,L}\right)$$

Tab. IX. vbi M Π L dabit Parallaxin Longitudinis et Π M de-
Fig. 5. ſignat complementum Latitudinis apparentis. Sit iam S locus ſtellae et producantur arcus Π L, Π M, Π S vsque dum Eclipticae occurrant in punctis *l*, *m* et *s*, atque iungatur M S arcu circuli maximi, tum vero ex S in arcum Π M *m* normalis ducatur S Q. Quum Latitudo Lunae ſit ſatis parua, ſeu arcus Π M proxime ad 90° accedat, ſique diſtantia

ſtantia M S fuerit valde exigua, ita vt triangulum M Q S pro rectilineo haberi poſſit, ſtatuere licebit

$$MQ = Mm - Ss \text{ vel } Ss - Mm,$$

tumque inuenietur in triangulo rectangulo M S Q,

$$QS = \sqrt{(MS + MQ)(MS - MQ)},$$

hincque deducetur $ms = \frac{QS}{\text{ſin. } \Pi S}$. Probe autem obſeruandum eſt, hoc compendium tantum in vſum vocari poſſe, quando arcus M S eſt valde paruus, imprimis ſi arcus M Q exiguus ſit etiam reſpectu ipſius M S; dum autem M S exprimit diſtantiam ſatis notabilem, exacta reſolutione trianguli Sphaerici M Π S in quo dantur tria latera Π M, Π S, et M S quaeri debet ang. M Π S = arcui *m s*. Ex datis autem arcubus *m s* et *l m* capiendo eorum ſiue ſummam ſeu differentiam, innoteſcet pro tempore obſeruationis diſtantia Lunae vera ſecundum longitudinem a ſtella, quod interuallum ob cognitum motum horarium Lunae, praebebit quantitatem temporis, quae ad momentum obſeruatum vel addi, vel ab eo ſubtrahi debet, vt inueniatur verum momentum coniunctionis Lunae cum ſtella. Quia autem elementa in calculo ſuppoſita, diſtantia ſcilicet M S, latitudo Lunae et Parallaxis Lunae aequatorea, plerumque aliqua correctione opus habere ſoleant, variationum, quae inde in tempus coniunctionis ſtellae cum Lunae inducuntur, ſequenti modo haberi poterit ratio. Dicatur correctio diſtantiae M S = δ, correctio Latitudinis Lunae y, et Parallaxeos aequatoreae π, praeterea deſignetur angu-

angulus M S Q per Φ, arcus Π S per s et rationes parallaxium in Latitudinem et Longitudinem ad Parallaxin horizontalem aequatoream exprimantur fractionibus $\frac{p}{\Pi}$ et $\frac{p'}{\Pi}$, tumque deſignet m tempus quod Luna impendit percurrendo ſpatio vnius minuti ſecundi; eritque correctio ex variatione δ oriunda $= m\,\delta$ Sec. Φ coſec. s, ea quae ex y oritur $= m\,y$ Tang. Φ Coſec. s et demum quae ex π reſultat $= m\,\pi\,(\frac{p}{\Pi}$ Tang. Φ Coſec. $s \pm \frac{p'}{\Pi})$, de ſignis autem quibus hae correctiones adficiuntur heic quidquam monere nihil attinet, quum ſignorum ratio pro caſu quouis ſingulari, leui adhibita attentione innoteſcat.

His de ipſa Methodo qua computum iniui, praemonitis, ſubiungam Elementa, quae pro ineundo calculo parallaxium ex nouis Tabulis Lunae Cel. *Mayeri* deduxi:

A. 1773 die $\frac{31.}{1.}$ $\frac{\text{Oct.}}{\text{Nov.}}$ Temp. medio Pariſino

	$8^h. 48'. 30''$	$10^h. 48'. 30''$
Aſcenſio Solis recta - -	$217°. 21'. 51''$	$217°. 26'. 45''$
Longitudo ☽ - - - -	$2^s.\ 5°. 51'. 3'', 0$	$2^s.\ 6°. 50'. 18'', 8$
Latitudo ☽ auſtralis - -	4. 40. 24, 2	4. 42. 36, 0
Longitudo ſtellae α Tauri	2. 6. 38. 3, 9	- - -
Latitudo eiusdem - -	5. 28. 47, 8	- - -
Parallaxis ☽ horizont. aequatorea	54'. 6, 0	
Semidiameter ☽ - -	14. 44, 0	
Mot. hor ☽ in Longitudinem	29. 37, 5	
Mot. hor. ☽ in Latitudinem	65, 0	67, 0
Log. ε pro Petropoli	9,9983857	

His

His adhibitis elementis pro obſeruationibus diſtantiarum Palilicii a limbo Lunae illuſtrato et emerſione eiusdem ſtellae, ſequentes inueni quantitates, pro Parallaxi Longitudinis, differentia apparenti Latitudinum ſtellae et Lunae, nec non ſemidiametro Lunae.

	Paral. Longit.	Diff. app. Latit.	Semid. ☽ appar.	Diſtant. limbi ☽ a ſtella
I. - - -	12'. 2'', 9	6'. 29'', 4	14'. 52'', 3	21'. 50''
II. - - -	11. 51, 1	32, 4	52, 3	20. 59
III. - - -	11. 39, 2	35, 4	52, 4	19. 48
IV. - - -	11. 23, 4	39, 2	52, 4	18. 16
V. - - -	11. 15, 8	41, 0	52, 5	17. 32
VI. - - -	11. 8, 2	42, 7	52, 5	17. 4
VII. - - -	10. 54, 2	45, 9	52, 6	16. 18
VIII. - - -	10. 9, 5	55, 7	52, 7	12. 24
IX. - - -	10. 1, 4	57, 4	52, 7	11. 50
X. - - -	9. 55, 8	58, 6	52, 7	11. 15
XI. - - -	9. 48, 0	7. 0, 2	52, 8	10. 47
XII. - - -	9. 40, 0	1, 9	52, 8	10. 8
XIII. - - -	9. 29, 2	4, 1	52, 8	9. 32
XIV. - - -	9. 19, 3	6, 1	52, 9	8. 36
XV. - - -	9. 10, 1	8, 0	52, 9	7. 40
XVI. - - -	9. 0, 4	10, 0	53, 0	7. 13
XVII. - - -	8. 29, 9	15, 6	53, 1	4. 56
XVIII. - -	8. 20, 0	17, 5	53, 1	4. 43
XIX. - - -	7. 48, 6	22, 8	53, 2	2. 23
Pro emerſione ſtellae	32, 7	8. 16, 6	54, 0	- -

 Hinc

Hinc ergo ſequentes eliciuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis Lunae cum Palilicio.

Tempus coniunctionis verum Petropoli:

I.	$12^h. 32'. 53''$	$+2,06.\delta$	$-0,37.y$	$+0,67.\pi$
II.	33. 18	+2,06	−0,38	+0,68
III.	33. 0	+2,07	−0,40	+0,70
IV.	32. 36	+2,07	−0,41	+0,73
V.	32. 24	+2,08	−0,42	+0,74
VI.	32. 45	+2,08	−0,43	+0,75
VII.	33. 32	+2,08	−0,44	+0,76
VIII.	32. 46.	+2,10	−0,52	+0,79
IX.	32. 52	+2,10	−0,53	+0,79
X.	32. 42	+2,10	−0,54	+0,80
XI.	32. 45	+2,11	−0,56	+0,80
XII.	32. 40	+2,11	−0,57	+0,81
XIII.	33. 4	+2,12	−0,59	+0,81
XIV.	32. 27	+2,12	−0,61	+0,82
XV.	32. 1	+2,13	−0,64	+0,83
XVI.	32. 27	+2,14	−0,67	+0,83
XVII.	32. 9	+2,17	−0,74	+0,85
XVIII.	32. 50	+2,18	−0,77	+0,85
XIX.	32. 40	+2,20	−0,87	+0,94.

Ex Emerſione

$$12^h. 32'. 41'' - 2,33.\delta + 1,13.y - 0,77.\pi$$

Si ex omnibus expreſſionibus pro tempore coniunctionis, quas menſurae diſtantiarum praebuerunt, medium colligatur, prodibit haec expreſſio:

$$12^h. 32'. 44'' + 2,11.\delta - 0,56.y + 0,80.\pi$$

quae

quae combinata cum expreſſione ex tempore emerſionis deducta, dat tempus coniunctionis Lunae cum α Tauri:

$$12^h.\ 32'.\ 42'' - 0{,}11.\ \delta + 0{,}28.\ y - 0{,}01.\ \pi.$$

Ex his autem valoribus pro tempore coniunctionis, colligi poteſt correctiones δ, y, π tuto negligi poſſe et correctionem quidem Latitudinis cui maximum plerumque momentum tribuendum eſt, nullius fere eſſe momenti, ſaltem haec concluſio rite ſibi conſtabit ſi expreſſio ex menſuris diſtantiarum elicita veritati ſit conformis. Quum vero inter valores ex quibus medium ſumendo deducta eſt, nonnullae plus iuſto diſcrepent, excludamus *primo* obſeruationem VII et XV, quo facto medium ex reliquis dabit tempus verum coniunctionis: $12^h.\ 32'.\ 43''$ ad Meridianum Petropolitanum. Licet autem alicui videretur, ne hoc quidem momentum omnimodam mereri fiduciam, hincque excludendas cenſeret obſeruationes II et XVII; medium reliquarum quindecim nihilominus dabit idem tempus coniunctionis $12^h.\ 32'.\ 43''$, de quo quidem iam nullum amplius dubium ſupereſſe poterit; ex quo omnino colligere licet momentum pro tempore coniunctionis ſupra exhibitum $12^h.\ 32'.\ 42$ vix in vllam ſuſpicionem erroris venire poſſe, niſi ſi forſan circa reductionem momentorum obſeruatorum ad tempus verum, error vnius vel alterius ſcrupuli ſecundi induci potuerit.

 Quum

Quum igitur tempus coniunctionis Palilicii cum Luna contigerit Petropoli die 1. Nouemb. $12^h. 32'. 42''$ Temp. vero, ſeu tempore medio Pariſino $10^h. 24'. 29''$, ſi Longitudo Palilicii ſuppoſita $2^s. 6^°. 38'. 3'', 9$ rite ſe habeat, quum Tabulae Lunares *Mayeri* pro hoc tempore dent Longitudinem Lunae $2^s. 6^°. 38'. 27'', 3$, inde inferre liceret has Tabulas peccare in exceſſu $23''$ ſcrupulis ſecundis. At quod Latitudinis correctionem attinet, facile liquet modo Latitudo α Tauri $5^°. 28'. 47'', 8$ rite ſibi conſtet, Latitudini Lunae ſenſibilem errorem vix ineſſe poſſe, ideoque ex noſtris obſeruationibus hanc deducimus concluſionem:

Coniunctionem Palilicii cum Luna contigiſſe
A. 1773. die 1 Nov. $10^h. 24'. 29''$ Temp. med. Paris.
exiſtente *Longitudine Palilicii et Lunae* $2^s. 6^°. 38'. 3'', 9$
et *Latitudine Lunae Auſtrali* 4. 42. 9, 2.

Praeterea hinc patet immerſionem Palilicii contigiſſe Temp. vero Petropolitano $11^h. 52'. 3''$, quo tempore Luna nubibus tegebatur.

Si demum loco Lunae ex Tabulis deſumto, adplicentur perturbationes ex actionibus Planetarum oriundae, quae loco Solis adplicari ſolent; quod omnino fieri neceſſe eſt, dum locus Lunae ad ſtellam fixam refertur; correctio Longitudinis quae ſupra eſt inuenta $23''$, non amplius fiet maior quam 7 ſcrupulorum ſecundorum.

In

In expreſſionibus ſupra allatis pro tempore coniunctionis Lunae cum Palilicio, quas ex menſuris diſtantiarum elicuimus, quantitas δ inuoluit non ſolum correctionem ſemidiametro Lunae tribuendam, ſed etiam correctionem qua vnaquaeque diſtantia a limbo obſeruata opus habere poterit, ex quo intelligitur quantitatem hanc δ pro diuerſis obſeruationibus, valde diuerſos valores ſortiri poſſe; ſumto autem medio plurimarum obſeruationum confidimus fore, vt correctiones ipſis menſuris diſtantiarum tribuendae proxime ſe deſtruant, ſolaque remaneat correctio ſemidiametri Lunae, ſaltem ſi obſeruationes inſtrumento omni rigore verificato inſtitutae ſint. Caeterum quod nonnullae diſtantiarum menſurae a nobis captae in maiori quam 20 ſecundorum fuerint errore, nubibus, quibus Luna paſſim tegebatur adſcribendum. Immo ſi duo aut quatuor harum obſeruationum ſeponantur, reliquarum conſenſus tantus eſt, vt iure dubitare liceat, an menſurae diſtantiarum micrometris ordinariis captae ad tantam pertingere queant praeciſionem.

Obſeruationes diſtantiarum I et II θ Tauri a limbo Lunae, computo ſubiicere minus neceſſarium duxi, quippe quum hae menſurae captae ſint prope ad coniunctiones apparentes harum fixarum cum Luna, quare ex iſtis obſeruationibus ipſum tempus coniunctionis Lunae cum his ſtellis fixis minus feliciter

liciter determinatur, ſiquidem minimus error in diſtantiis menſuratis commiſſus, inſignem errorem in tempore coniunctionis producet; valde tamen vtiles haberi poterunt hae obſeruationes ad determinandam Latitudinem Lunae, quae ſatis exacte concludetur ex diſtantia minima apparente ſtellarum a limbo Lunae.

DETER-

DETERMINATIO LONGITVDINIS ET LATITVDINIS QVORVNDAM MOLDAVIAE ET WALACHIAE LOCORVM DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS A *IOHANNE ISLENIEFF* INTSITVTIS.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Redeuntem ab obſeruatione Tranſitus Veneris per diſcum Solis *Iohannem Islenieff* Academia Scientiarum Moldauiam ablegandam eſſe cenſuit, vt ibi perficiendae Geographiae incumberet. Quanto ſtudio et diligentia munere hoc functus ſit Vir Cl. ex obſeruationibus referendis lectores perſpicient.

Obſeruationes in Bender inſtitutae Anno 1771.

Pro Latitudine definienda.

Defuit occaſio Viro Cl. errorem quadrantis hic definiendi; quaeſiuit eum ante hac Tobolii et dein Moldauia redux Kiouiae; ibi errorem quadrantis ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum reperit 5′. 43″, hic vero 5′. 40″. Quare omnes altitudines infra recenſitas quantitate 5′. 42″ mulctatas ſiſtimus.

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſeru.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Br. − parall.	½ Diam. ☉lis	Declin. ☉lis Auſtralis	Latitudo
4/15. Oct.	34°. 56′. 38″	1′. 14″, 7	16′. 5″,	8°. 31′. 8″, 0	46°. 49′. 33″
5/16. —	34. 33. 47	1. 15	16. 5, 3	8. 53. 19, 2	46. 50. 13
6/17. —	34. 11. 37	1. 17	16. 5, 6	9. 15. 25.	46. 50. 20
24. Oct. 4. Nov.	28. 3. 13	1. 39, 2	16. 10, 2	15. 23. 41.	46. 50. 54
25/5. —	27. 45. 18	1. 40, 3	16. 10, 4	15. 42. 15.	46. 50. 17

Pro definienda declinatione Solis meridiei competente aſſumta eſt differentia meridianorum inter Lutetiam Pariſiorum et Bender $1^h. 49'$.

Reiecta prima determinatione, quippe quae ab omnibus reliquis nimium diſſentit, medium reliquarum dat 46°. 50′. 24″.

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſeru.	Nomin. Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1771.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
3/14. Oct	Phomahan	12°. 23′. 55″	−4′. 16″	30°. 49′. 46″, 6 a.	−14″ 8	+ 0″, 0	−6″, 8	46°. 50′. 56″
4/15. —	α Aquilae	51. 27. 24	45	8. 16. 40, 6 b.	+ 6, 5	+ 10	+7, 9	46. 50. 26
- -	Phomahan	12. 23. 54	4. 16	30. 49. 46, 6	− 14, 9	+ 0, 3	− 6, 8	46. 50. 57
5/16. Oct.	Phomahan	12. 23. 54	- - -	- - - -	− 14, 9	+ 0, 5	− 6, 8	46. 50. 56
6/17. Oct.	Phomahan	12. 23. 54	- - -	- - - -	− 19, 9	+ 0, 7	− 6, 8	46. 50. 56
7/18. —	α Aquilae	51. 27. 35	- 45	8. 16. 40, 6	+ 6, 9	+ 9, 8	+ 8, 0	46. 50. 15
24. Oct. 4. Nou.	Phomahan	12. 23. 55	- - -	- - - -	− 15, 7	+ 3, 8	− 6, 8	46. 50. 53
——	α Andr.	71. 0. 7	19, 5	27. 49. 16, 3 b.	+ 17	+ 11, 4	+ 4, 7	46. 50. 2
——	ζ Arietis	62. 51. 29	29, 1	19. 41. 1, 7 b.	+ 15, 2	+ 7, 7	+ 1, 8	46. 50. 27
					Medium			46. 50. 38.

Hinc Latitudo vrbis Bender ſtatui deberet 46°. 50′. 32″. Verum ex infra referendis eam aliquot ſecundis minuendam eſſe videbimus.

Obſer-

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Obſeruationes Satellitum Iouis inſtitutae ſunt tubo *Dollondiano* decem pedes longo, eodem ſcilicet quo Vir Cl. tranſitum Veneris per diſcum Solis in Iakutsk obſeruauerat.

Die $\frac{15}{26}$. Oct. obſeruata eſt	Imm. III. Sat. ♃	$8^h. 11'. 54''$ t. v.
$\frac{16}{27}$. —	Em. I. Sat. ♃	6. 24. 32
$\frac{23. \text{ Oct.}}{3. \text{ Nou.}}$	Em. I. Sat. ♃	8. 20. 40.

Media harum obſeruationum praeſtantior vltima aſſeritur; verum cum huic reſpondens detur Tyrnauiae obſeruata, ab ea initium faciam.

Die $\frac{23. \text{ Oct.}}{3. \text{ Nou.}}$ Em. I. Satell. ♃	$7^h. 32'. 32''$	Tyrnauiae
	8. 20. 40	Bender
Different. merid.	0. 48. 8	
Long. Tyrnauiae a Lutet. Par.	1. 0. 55	
Longitudo Bender	1. 49. 3.	

Obſeruatio Tyrnauienſis demonſtrat momentum Tabulare a Cel. *Wargentino* computatum a coelo aberrare $-18''$; aſſumere igitur licebit ſimile momentum ad diem $\frac{16}{27}$. Oct. a Cel *Wargentino* computatum $7^h. 35'. 10''$, totidem minutis ſecundis aberraturum; Quare

erit correctum - - -	$4^h. 35'. 28''$	Pariſ.
Obſeruatum eſt in Bender	6. 24. 32	
Longitudo Bender	1. 49. 4.	

Vnde apparet Longitudinem vrbis Bender a meridiano Pariſino computatam eſſe 1^h. 49$'$. 3$\frac{1}{2}''$ ſiue in gradibus 27°. 15$'$. 52$''$, et a meridiano primo 47°. 15$'$. 52$''$.

Obſeruationes in Akerman inſtitutae.

Altitudines meridianae ſtellarum Anno 1771.

Dies obſeru.	Nomina Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl Stell. ad 1771.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
22. Nou. 3. Dec.	α Orionis	51° 9′. 30″	45″, 6	7°. 20′. 50″ b	+ 1″, 4	+ 2″, c	− 6″, 4	46°. 12′. 1″
23. 4. —	Aldebaran	59. 50. 28	34, 0	16. 1. 58	+ 7, 6	+ 3, c	− 4, 0	46. 12. 11
— —	Rigel	35. 20. 20	1. 20,	8. 28. 51, 2 a	− 4, 5	− 2, 6	+ 5, 4	46. 12. 11
— —	ε Orionis	42. 27. 8	1. 2,	1. 21. 54, 7 a	− 2, 5	− 2, -	+ 5, 9	46. 12. 0
— —	α Orionis	51. 9. 32	45,	7. 20. 50	+ 1, 4	+ 2, c	− 6, 6	46. 11. 59
							Medium	46. 12. 4.

Altitudines Solis meridianae Anno 1771.

Dies obſeru	Alt. limb. ⊙ ſuper. corr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ⊙lis	Decl. ⊙lis Boreal.	Latitudo
8/19. Apr.	55°. 30′. 10½″	34″, 2	15′. 55″, 8	11°. 25′. 47″	46°. 12′. 0″, 5
10/21. —	56. 11. 15	33, 1	15. 55, 3	12. 6. 32	46. 11. 46, c
18/29. —	58. 46. 8	30, 0	15. 53, 6	14. 41. 26	46. 11. 42, c
21. Apr. 2. Maii	59. 40. 8	29,	15. 52, 9	15. 35. 42	46. 11. 56
				Medium	46. 11. 52.

Quamobrem Latitudo vrbis Akerman rotunde ſtatui poteſt 46°. 12$'$. 0$''$.

Obſer-

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Die $\frac{18}{29}$. April. Imm. III. Satell. ♃ $16^h. 13'. 56''$ t. v.
$\frac{20.\ Apr.}{1.\ Maii}$ Imm. II. Satell. ♃ 15. 59. 42.

Prior obſeruatio ex mente Cl. *Islenieff* praeſtantior quidem eſt poſteriori, verum deficientibus vtrique correſpondentibus poſterioris tutior eſt comparatio cum momento tabulari. Obſeruationes ſecundi Satellitis hoc anno inſtitutae et a Cel. *Wargentino* cum Tabulis collatae monſtrant menſe Iunio, Iulio et Auguſto illas a coelo aberrare $1\frac{1}{2}'$ in exceſſu, menſe vero Septembri et Octobri $2'$ et vltra. Vt igitur ex obſeruatione II. Satellitis certam quodammodo determinationem impetremus, momento tabulari ad meridianum Pariſinum a Celeberr. *Wargentino* computato $14^h. 7'. 37''$ applicemus correctionem $- 1'. 30''$, et prodibit Longitudo Akerman a meridiano Pariſino computata $1^h. 53'. 35''$ ſiue in gradibus $28°. 23'. 45''$ et a meridiano primo $48°. 23'. 45''$.

Determinatio iſta vni eidemque non ſatis certae obſeruationi ſuperſtructa eſt; in conficiendis igitur mappis Geographicis, ſi illa cum Longitudinibus aliorum locorum minus quadrare reperiatur, procul omni dubio ab ea aliquantum recedere licebit.

Declinatio acus magneticae diebus $\frac{14}{25}$ et $\frac{19}{30}$. Aprilis obſeruata eſt $9°. 25'$ verſus occidentem.

Obſeruationes in Kilia Noua inſtitutae Anno 1772.

Pro definienda Latitudine.

Dies obſeru.	Altit. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Bradl. — parall.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis	Declinat. ☉lis	Latitudo
$\frac{2}{13}$. Maii	63°. 23′. 59″	24″, 6	15′. 50″, 4	18. 33. 57	+5°. 26′. 13″
$\frac{3}{14}$. —	63. 37. 9,5		15. 50, 2	18. 48. 22	+5. 26. 18

Die $\frac{2}{13}$. Maii altitudo meridiana Antaris obſeruata eſt 18°. 47′. 41″, quae errore quadrantis — 5′. 42″ et Retractione 2′. 46″ correcta fit 18°. 39′. 13″. Declinatio Antaris ad 1772. eſt 25°. 54′. 23″ Auſtr. et ad diem obſeruationis + 3″, 3 Praec. + 3″, 1 Aberr. — 5″, 1 Nut. Hinc declinatio apparens 25°. 54′. 24″, 3 et Latitudo quaeſita 45°. 26′. 23″.

Quare Latitudo Kiliae Nouae rotunde ſtatui poteſt 45°. 26$\frac{1}{4}$′.

Obſeruationes in Ismail inſtitutae. Anno 1772.

Pro definienda Latitudine Ismail multae inſtitutae ſunt obſeruationes, ex quibus ad ſcopum, quem nobis proponimus, obtinendum eas tantum adhibebimus, quae nota bonitatis a Cl *Islenieff* inſignitae ſunt. Ad computandam Declinationem pro meridie Ismailenſi aſſumta eſt differentia meridianorum Pariſienſis et Ismailienſis 1^h. 45′.

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſeru.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Bradl. – parall.	½ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Boreal.	Latitudo
11/22. Maii	65°.27′.31″	22″, 5	15′.48″, 8	20. 32. 1″	45°.20′.41″
16/27. —	66. 21. 3	21, 5	15. 48, 0	21. 25. 33	45. 20. 39
17/28. —	66. 30. 12	21, 3	15. 47, 9	21. 35. 9	45. 21. 6
19/30. —	66. 48. 35	21, 0	15. 47, 6	21. 53. 12	45. 20. 46
22. Maii / 2. Iun.	67. 13. 16	20, 6	15. 47, 2	22. 17. 34	45. 20. 27
23/3. —	67. 20. 24,5	20, 4	15. 47, 1	22. 24. 52	45. 20. 35
				Medium	45. 20. 42

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſeru.	Nomina Stellarum	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
11/22. Maii	α Virginis	34°.42′.30″	1′.22″, 4	9°.57′.49″, 6 a	+7″, 4	+6″, 2	+1″, 3	45°.30′.47″.
	β Librae	36. 8. 36	1. 18, 5	8. 31. 35, 5 a.	+5, 2	+4, 8	−2, 9	45. 21. 0.
	β Scorpii	25. 31. 0	1. 58, 9	19. 9. 48, 3 a	+4, 0	+3, 7	−4, 5	45. 21. 7.
	α Scorpii	18 47. 3	2. 46, 0	25. 54. 22, 9 a.	+3, 3	+3, 4	−5, 2	45. 21. 19.
19/30. Maii	α Virginis	34. 42. 10	1. 22, 4		+7, 8	+5, 5	+1, 2	45. 21. 8.
21. Maii / 1. Iun.	α Virginis	34. 42. 8	1. 22, 4		+7, 9	+5, 3	+1, 2	45. 21. 10.
	α Librae	29. 35. 23	1. 40, 0	15. 4. 49, 7	+6, 2	+5, 4	−2, 1	45. 21. 18.
	β Librae	36. 8 23	1. 18, 5		+5, 8	+4, 0	−3, 0	45. 21. 13.
	β Scorpii	25. 21. 7	1. 58, 9		+4, 2	+4, 2	−4, 6	45. 21. 0.
	α Scorpii.	18. 47. 3	2. 46, 0		+3, 7	+3, 7	−5, 3	45. 21. 18.
						Medium	- .	45. 21. 14.

Notari hic meretur, quod Latitudo ex altitudinibus ſtellarum deducta maior prodeat quam ex altitudinibus Solis; et ſi omnium rationem habere velimus Latitudo Ismail media prodit 45°. 21′.

 Obſer-

Obſeruationes pro definienda Longitudine.

Die $\frac{22.\ Maii}{2.\ Iun.}$ Imm. I. Satell. ♃ $15^h.\ 0'.\ 33''$
—— Imm. II. Satell. ♃ 15. 37. 44.

Prior obſeruatio praeſtantiori eſt poſteriori; nam huic obfuit lumen crepuſculare iam ſatis intenſum et ros deciduus vitrum obiectiuum tantiſper obfuſcans, quamobrem momentum Immerſionis II. Satellitis iuſto citius obſeruatum ſit neceſſe eſt.

Immerſio I. Satellitis die $\frac{22.\ Maii}{2.\ Iun.}$ iuxta computum Celeberr. *Wargentini* ad meridianum Pariſinum eſt $13^h.\ 14'.\ 17''$. Vnde Longitudo Ismail a Lutetia Pariſiorum computata foret $1^h.\ 45'.\ 16''$, ſi certi eſſemus de conſenſu Tabularum cum coelo. Proxima huic Immerſioni obſeruata Pariſiis die $\frac{29.\ Iun.}{9.\ Iul.}$ $15^h.\ 7'.\ 32''$ indicat Tabulas peccare integro minuto primo in defectu; quare applicata hac correctione Immerſioni ad diem 22 Maii e Tabulis depromtae, prodibit differentia meridianorum Pariſienſis et Ismailenſis $1^h.\ 46'.\ 16''$. Verum ſi conſulamus obſeruationes eiusdem Satellitis per integrum annum diverſis in locis inſtitutas, et a Celeberr. *Wargentino* cum Tabulis ſuis collatas, videbimus eas vt plurimum paucis ſecundis nunc in exceſſu nunc in defectu a coelo aberrare, et rariſſime errorem ad dimidium minuti primi aſſurgere; crediderim itaque correctionem ſupra adhibitam eſſe iuſto maiorem, et differentiam meridianorum Pariſienſis et Ismailenſis aliquot ſecundis eſſe minuendam.

Die

Die 22. Maii / 2. Iun. Immerſio II. Satellitis Iouis iuxta Tabulas Celeberr. *Wargentini* ad meridianum Pariſinum eſt 13^h. 53$'$. 15$''$, applicata vero correctione — 1$'$. 30$''$, prout videre eſt, vbi de Longitudine Akerman egimus, fit momentum Tabulare Immerſionis II. Satellitis correctum 13^h. 51$'$ 45$''$, quod collatum cum momento in Ismail obſeruato 15^h. 37$'$. 44$''$, dat differentiam meridianorum 1^h. 45$'$. 59$''$.

Vnde concludere eſt Longitudinem Ismail a meridiano Pariſio computatam ſatis tuto ſtatui poſſe 1^h. 46$'$. 0$''$ ſiue in gradibus 26°. 30$'$ et a meridiano primo 46°. 30$'$.

Obſeruationes in Bukoreſt inſtitutae Anno 1772.

Pro determinanda Latitudine ex obſeruationibus Solis Longitudo Bukoreſt aſſumta eſt 1^h. 34$'$.

Dies obſeru.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Boreal.	Latitudo
15/26. Iun.	69°. 11$'$. 5$''$	18$''$, 8	15$'$. 45$''$, 5	23°. 21$'$. 51$''$	44°. 26$'$. 50$''$
17/28. —	69. 5. 40½	18, 8	15. 45, 5	23. 16. 32	44. 26. 56
18/29. —	69. 2. 20½	18, 8	15. 45, 5	23. 13. 17	44. 27. 1
19/30. —	68. 58. 50	18, 8	15. 45, 5	23. 9. 35	44. 26. 49
22. Iun. / 3. Iul.	68. 45. 32	19, 1	15. 45, 5	22. 56. 5	44. 26. 37
23/4. —	68. 40. 22	19, 2	15. 45, 5	22. 50. 46	44. 26. 28
1/12. Iulii	67. 43. 55	20	15. 45, 8	21. 54. 23	44. 26. 35
				Medium	44. 26. 45.

Alti-

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſer.	Nomina Stellarum	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{16}{27}$. Iun.	ζ Librae	37°. 2′. 14″	1′. 15″, 7	8°. 31′. 35″, 6 A	+6″, 8	+1″, [illegible]	−3″, 2	44°. 27′. 21″
—	ζ Scorpii	26. 24. 39	1. 53, 7	19. 9. 48, 3	+5, 2	+3, 5	−4, 7	44 27. 23
—	α Scorpii	19. 40. 49	2. 38,	25. 54 22, 9	+4, 4	−3, 5	−5, 4	44. 27. 31
—	α Aquilae	53. 50. 52	41,	8 16. 49, B	+4, 1	+0, [illegible]	+8, 6	44. 26. 50
$\frac{18}{29}$. Iun	ζ Scorpii	26. 24. 38	1. 53, 7	19. 9. 48, 3	+5, 3	+3, 4	−4, [illegible]	44. 27. 24
	α Scorpii	19. 40. 51½	2. 38,	25. 54. 22, 9	+4, 4	+3, [illegible]	−5, 5	44. 27. 28
	α Aquilae	53. 50. 49	41,	8. 16. 49	+4, 1	+0, 4	+8, 6	44 26. 54
					Medium			44. 27. 16

Obſeruationes ſtellarum fixarum praeſertim eae, quae in minoribus altitudinibus ſunt captae, conſtanter minorem dant Latitudinem, quam obſeruationes in maioribus altitudinibus inſtitutae; vnde concludere licet aut Tabulam refractionis a me adhibitam his locis non conuenire, aut, quod veroſimilius eſt, errorem quadrantis non in omnibus punctis eſſe eundem. Deficientibus vero obſeruationibus, ex quibus certi quid hac de re concludere liceat, illam Latitudinem pro vera aſſumere conſultius eſt, quae prodit ex obſeruationibus captis in maioribus altitudinibus.

Obſeruationes pro definienda Longitudine.

Die $\frac{16}{27}$. Iun. Imm. II. Satell. ♃ 12ʰ. 31′. 4″ t. v.

$\frac{30. \text{Iun.}}{11. \text{Iul.}}$ Imm. I. Satell. ♃ 13. 6. 53 obſeru. bon.

Obſeruatio II. Satellitis collata cum momento Tabulari a Celeb. *Wargentino* computato 10ʰ. 39′. 39″ dat

dat differentiam meridianorum Pariſienſis et Bukoreſtenſis $1^h. 33'. 2''$; quodſi momento Tabulari $10^h. 58'. 2''$ applicemus correctionem $- 1'. 30''$, prodit differentia meridianorum quaeſita $1^h. 34'. 32''$. Tutior tamen erit determinatio petita ab obſeruatione primi Satellitis; nam eadem Immerſio obſeruata eſt Pariſiis $11^h. 31'. 38''$; in Clugny $11^h. 31'. 57''$, vel ad meridianum Pariſinum reducta $11^h. 31'. 55''$; Tyrnaviae $12^h. 32'. 25''$ vel ad meridianum Pariſinum $11^h. 31'. 29''$. Ex his ternis momentis ſumto medio prodit

Imm. I. Sat. die $\frac{30.}{11.}$ $\frac{Iun.}{Iul.}$	$11^h.$	$31'.$	$41''$	Pariſiis
Eadem obſeruata eſt	13.	6.	53	Bukoreſti
Differentia meridianorum	1.	35.	12,	

Ex his ſequitur Latitudinem Bukoreſti ſtatui debere $34^\circ. 26'. 45''$; Longitudinem vero a meridiano Pariſino computatam $23^\circ. 48'$, vel a meridiano primo $43^\circ. 48'$.

Declinatio acus magneticae Bukoreſti die $\frac{24.}{5.}$ $\frac{Iun.}{Iul.}$ obſeruata eſt $11^\circ. 36\frac{1}{2}'$ verſus occidentem.

Determinatio Latitudinis Brahilow.

Die $\frac{8}{19}$. Iulii obſeruata eſt maxima altitudo Lucidae Lirae $83^\circ. 20'. 23''$, quae refractione correcta $- 7''$ fit $83^\circ. 20'. 16''$. Eſt autem declinatio ſtellae ad initium Anni 1772. $38^\circ. 34'. 57'', 6$ Bor. Praec. ad diem obſeruationis $+ 1', 7$ Aberr. $+ 6'', 7$ Nut. $+ 8'', 5$, hinc declinatio apparens $38^\circ. 35'. 14'', 5$, vnde Latitudo Brahilow $45^\circ. 14'. 58\frac{1}{2}''$.

 Eo-

Eodem die obſeruata eſt maxima altitudo Lucidae Aquilae 53°. 2'. 18'', quae refractione 42'', 6 correcta fit 53°. 1'. 35'', 4. Declinatio ſtellae ad initium Anni 1772. eſt 8°. 16'. 48'', 9 Bor. cui applicata Praec. + 4'', 4, Aberr. + 3'', 8 Nut. + 8'', 7 prodit declinatio apparens ad diem obſeruationis 8°. 17'. 5'', 8 et Latitudo quaeſita 45°. 15'. 31'', 4.

Die $\frac{9}{20}$. Iulii maxima altitudo limbi Solis ſuperioris obſeruata eſt 65°. 35'. 10'' quae refract. — parall. 33'' correcta prodit 65°. 34'. 47''; hinc dempta $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis 15'. 46'' fit altitudo centri ☉lis 65°. 19'. 1''; et cum declinatio ☉lis pro meridie Brahilow ſit circiter 20°. 34' 3'' Bor. prodit Latitudo Brahilow 45°. 15'. 2''.

Sumto medio fit Latitudo Brahilow, 45°. 15'. 20''.

Obſeruationes in Foktzani inſtitutae Anno 1772.

Pro definienda Latitudine.

Dies obſeru.	Altit. limb. ☉ ſuper. correct.	Refr. Bradl — parall.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Boreal.	Latitudo
$\frac{19}{30}$. Iulii	63°. 0'. 3''	25, 3	15'. 47'', 6	18°. 22'. 48''	45°. 38'. 58''
$\frac{2}{1}$. Iul. Aug.	62. 30. 3	25, 8	15. 47, 6	17. 52. 42	45. 38. 53
$\frac{23}{3}$. —	61. 58. 55,5	26, 4	15. 47. 9	17. 21. 24	45. 38. 43
$\frac{24}{4}$. —	61. 42. 57	26, 7	15. 48, 1	17. 5. 23	45. 38. 41
$\frac{25}{5}$. —	61. 26. 18	27, 0	15. 48, 2	16. 49. 5	45. 39. 3
$\frac{26}{6}$. —	61. 10. 20	27, 6	15. 48, 3	16. 32. 30	45. 38. 26
$\frac{31}{11}$. Iul. Aug.	59. 43. 0,5	29, 1	15. 49, 3	15. 5. 42	45. 39. 0

Reiecta penultima prodit Medium 45 38. 53

Altitu-

Altitudines Stellarum meridianae.

Dies obſeru	Nomin. Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{18}{29}$. Iul	α Aquil.	52°. 39′. 5″,5	43″	8°. 16′. 49.	+ 4″, 8	+ 5″, 4	+ 8″, 7	45°. 38′. 46″
$\frac{21}{1}$. Iul. Aug	α Lirae	82. 56. 38, 0	7	38. 34. 55, 8	+ 1, 4	+ 9, 8	+ 8, 6	46. 38. 45
	α Aquil.	52. 39. 2.	45	8. 16. 49.	+ 4, 8	+ 5, 7	8, 7	45. 38. 49
$\frac{26}{6}$. Iulii Aug.	α Lirae	82. 56. 23.	7	38. 34. 55, 8	+ 1, 4	+ 11, 0	8, 6	45. 39. 0
						Medium		45. 38. 50.

Vnde concludere licet Latitudinem Foktzani ſtatui poſſe 45°. 38′. 50″.

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Die $\frac{18}{29}$. Iulii Imm. II. Satell. ♃ 12^h. 18′. 22″ *bon.*
$\frac{23}{3}$. *Iul. Aug.* Imm. I. Satell. - - - 14. 20. 50 *opt.*
$\frac{25}{5}$. — Imm. II. Satell. - - - 14. 56. 4 *bon.*
$\frac{30}{10}$. — Imm. I. Satell. - - - 15. 15. 28 *ſubdub.*

Cum omnibus hic recenſitis obſeruationibus dentur correſpondentes, facile erit ex iis colligere Longitudinem, quam quaerimus.

		diff. mer.
Die $\frac{18}{29}$. Iul. Imm. II. Sat. obſeru. eſt Pariſiis	10^h. 39′. 39″	
Clugny	10. 39. 55	1″, 8 or.
Stockholmiae	11. 31. 35	1^h. 2′. 58″ or.
Petropoli	12. 31. 35	1. 51. 58. or.

Momentis his reductis ad meridianum Pariſinum, et ex omnibus ſumto medio prodit

Imm. II. Sat. die $\frac{18}{29}$. Iulii 10. 39. 41. Pariſiis
Eadem obſeruata eſt 12. 18. 22. Foctzani

I. Differentia meridianorum 1. 38. 41.

Die $\frac{27.\ \text{Iul.}}{3.\ \text{Aug.}}$ Imm. I. Sat. obſeruata eſt 13^h. 33′. 29″ Petropoli
13. 20. 50 Foctzani

Differentia meridianorum	0. 12. 39
Longitudo Petropolis	1. 51. 58
II. Different. merid. Pariſ. et Foctzan.	1. 39. 19.

Die $\frac{25.\ \text{Iul.}}{5.\ \text{Aug.}}$ Imm. II. Sat. obſeruata eſt Pariſ.	13^h. 17. 26″	Diff. mer.
Clugny	13. 17. 36	
Greifswaldiae	14. 1. 25	0^h. 44′. 15″
Stockholmiae	14. 20. 19	

Ope differentiae meridianorum reductis his obſeruationibus ad meridianum Pariſinum, et ex omnibus momentis ſumto medio prodit.

Imm. II. Sat. die $\frac{25.\ \text{Iul.}}{5.\ \text{Aug.}}$	13^h. 17′. 26″	Pariſiis
Eadem obſeruata eſt	14. 56. 4	Foctzani
III. Diff. merid. Pariſ. et Foctzan.	1. 38. 38.	

Die $\frac{30.\ \text{Iul.}}{10.\ \text{Aug.}}$ Imm. I. Sat. obſeruata eſt 13^h. 36′. 56″ Pariſiis
13. 37. 11 Clugny
15. 28. 26 Petropoli.

Facta reductione ad meridianum Pariſinum et ex omnibus momentis ſumto medio prodit

Imm. I. Sat. die $\frac{30.\ \text{Iul.}}{10.\ \text{Aug.}}$ ..	13^h. 36′. 48″	Pariſiis
Eadem obſeruata eſt	15. 15. 28	Foctzani
IV. Differ. mer. Pariſ. et Foctzan.	1. 38. 40.	

Sumto denique ex his quatuor determinationibus medio reſultat Longitudo Foctzani a meridiano Pariſino

Pariſino verſus ortum numerata $1^h.\ 38'.\ 50''$ et in partibus circuli $24^\circ.\ 42\frac{1}{2}'$ et a meridiano primo $44^\circ.\ 42\frac{1}{2}'$.

Obſeruationes in Iaſſi inſtitutae Anno 1772.

Pro definienda Latitudine altitudines Solis meridianae.

Dies obſeru.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Br. – parall.	½ Diam. ☉lis	Declin. ☉lis Auſtralis	Latitudo
$\frac{10}{21}$. Aug.	55°. 2'. 29''	43'', 8	15'. 51'', 5	11°. 54'. 39''.	47°. 8'. 37''
$\frac{12}{23}$. —	54. 21. 56	35, 8	15. 51, 7	11. 13. 59.	47. 8. 31
$\frac{13}{24}$ —	54. 1. 29	36, 1	15. 51, 9	10. 53. 23.	47. 8. 23
$\frac{16}{27}$. Aug.	52. 58. 35	37, 5	15. 52,	9. 50. 35.	47. 8. 30
				Medium	47. 8. 30

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſeru.	Nomin. Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{10}{21}$. Aug.	α Lirae	81°. 27'. 17''	8'', 6	38°. 34'. 55'', 8	–1'', 5	+ 14'', 0	+ 8'', 6	47°. 8'. 12''
——	α Aquilae	51. 9. 18	45, 7	8. 16. 49,	+ 5, 3	+ 8 0	+ 8, 7	47. 8. 39
	α Capricor.	29. 38. 55	1'. 39'', 8	13. 14. 13, 7	– 6, 6	– 4, 8	– 8, 5	47. 8. 52
$\frac{12}{23}$. Aug.	α Lirae	81. 27. 19	- - -	- - - -	+ 1, 5	+ 14, 3	+ 8, 6	47. 8. 10
	α Aquilae	51. 9. 18	- - -	- - - -	+ 5, 4	+ 8, 4	+ 8, 7	47. 8. 38
	α Capricor.	29. 38. 56	- - -	- - - -	– 6, 7	– 4, 8	– 8, 5	47. 8. 50

Hic rurſum idem euenit, quod ſupra de obſeruationibus in minoribus altitudinibus captis notauimus; reiectis itaque determinationibus ab obſeruationibus α Capricorni petitis, Latitudo Iaſſi ex obſeruationibus ſtellarum prodit $47^\circ.\ 8'.\ 25''$. Hinc Latitudo Iaſſi rotunde ſtatui poteſt $47^\circ.\ 8\frac{1}{2}'$.

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Die $\frac{18}{29}$. Aug. Em. III. Sat. Iouis	$15^h. 32'. 15''$	t. v.
— $\frac{19}{30}$. Aug. Em. II. Sat. Iouis	15. 4. 7.	

Cum obſeruationi II. Satellitis detur reſpondens Tyrnauiae inſtituta, obſeruationi III. hic non immorabimur.

Die $\frac{19}{30}$. Aug. Em. II. Sat.	$14^h. 24'. 23''$	Tyrnauiae
Eadem obſeruata eſt	15. 4. 7	in Iaſſi
Differ. meridian.	$0^h. 39' 44''$	
Longitudo Tyrnauiae	1. 0. 55	
Longitudo Iaſſi a Lut. Par.	1. 40. 39.	

Eadem in partibus circuli $25°. 9'. 45''$ et a meridiano primo computata $45°. 9'. 45''$.

OBSER-

OBSERVATIONES PEKINI CHINARVM INSTITVTAE EXCERPTAE EX LITTERIS A R. P. *COLLAS* AD *STEPHANVM RVMOVSKI* ANNO 1772. DIE 5. MAII DATIS.

Mitto tibi obſeruationes, quas ab initio huius Anni R. PP. *Dollierus*, *Bourgeois* et ego inſtituimus, vna cum obſeruationibus a P. *Dolliero* ſuper Cometam habitis, qui viſibilis fuit Anno 1769. menſe Auguſto, et ſub finem Octobris eiusdem Anni denuo apparuit. R. P. *Dollierus* gratias tibi agit pro litteris, quas nomine Academiae Scientiarum ad eum dediſti.

Exitum Veneris e diſco Solis Anno 1769. obſeruauimus ad vnum idemque horologium, et in momentis contactuum ad 6″ conſenſimus. P. *Dollierus* magno numero altitudinum Solis correſpondentium in motum horologii inquiſiuit; verum facto quodam tanta perturbatio in illo eſt deprehenſa, vt nequaquam omnimoda fides obſeruationi ſit habenda. Horologium hoc ſemper pro excellenti reputauimus, et P. *Dollierus* obſeruationes inſtituens ad hunc vsque diem nihil ſimile in illo obſeruauit. Neſcimus cuinam cauſae ſubita mutatio eſt adſcribenda.

Cum Europae degerem, et Lotharingiae Muſſiponti in Vniuerſitate munere Profeſſoris Matheſeos fungerer, in obſeruatorio nouiter ibi exſtructo licet non nullas

las inſtituerim obſeruationes, verum per triennium, quod hic tranſegi, iisdem nusquam vacare mihi licuit; a laboribus Aſtronomicis detinuit me praecipue ſtudium linguae Chinarum, cuius cognitio a viro iam triginta quinque annos nato, non niſi magno cum labore acquiritur. P. *Dolliero* muneri miſſionarii praecipue intento, itidem non ſuppedit tempus quod Aſtronomiae impendat.

Occupationes noſtrae non permiſere nobis obſeruationibus iſtis reductiones adiungere, nec ex iisdem conſequentias elicere, curabo impoſterum, ſi otium ſuppetat, vt melius officio meo fungar. Venio nunc ad ipſas obſeruationes, quae ſunt quinque occultationes ſtellarum fixarum a Luna.

In obſeruationibus his vſi ſumus horologio a *Iuliano le Roi* elaborato, et collocato in conclaui meo ad ſuperficiem ſoli pro more Chinarum exſtructo: ante conclaue eſt area domus, ſatis commoda ad obſeruationes inſtituendas. Ibi poſitus eſt quadrans circuli trium pedum inſeruiens ad capiendas altitudines Solis correſpondentes, et nulla obſeruatio facta eſt, quin ſtatus horologii per altitudines Solis correſpondentes fuerit exploratus, ex quibus nunc meridies ipſius diei, in quem obſeruatio cadit et diei praecedentis, nunc meridies et media nox fuere concluſi. Praeterea interuallo, quod ab vna obſeruatione ad alteram intercedebat, capiebam multoties altitudines Solis correſpondentes, vt certior euaderem de vniformitate motus horologii, ex quibus per-

perſpexi horologium non niſi leuibus pro ratione temperiei mutationibus eſſe obnoxium. Meliori igitur cum cucceſſu tranſitum Veneris per diſcum Solis obſeruauiſſemus, ſi hoc, non illo, quod virga effectum a dilatione proficiſcentem corrigente inſtructum eſt, vſi fuiſſemus, et quod id circo P. *Dollierus* praeferendum eſſe cenſuit.

Occultatio Spicae Virginis 1772. die 26. Ian. mane.

Immerſionem poſt limbum Lunae lucidum P. *Bourgeois* et ego obſeruauimus $5^h. 28'. 49''$. t. v. In momento Immerſionis ad ſecundum vsque conſenſimus, et vterque vidimus ſtellam interuallo aliquot ſecundorum limbo Lunae inhaeſiſſe, poſtmodum ſubito diſparuiſſe. Emerſio iuxta obſeruationem P. *Dollieri* contigit $6^h. 33'. 37''$ t. v. P. *Bourgeois* et ego obſeruationem tubis 15 pedum inſtituimus.

Occultatio γ Scorpionis die 29. Ian. mane.

Immerſio ſtellae non eſt obſeruata; Emerſio vero ad limbum Lunae obſcurum ſecundum obſervationem P. *Bourgeois* et meam contigit $5^h. 34'. 10''$. t. v.

Occultatio α Librae die 23. Februarii.

Immerſionem P. *Dollierus* tubo 15 pedum obſeruauit $11^h. 46'. 54''\frac{1}{2}$, Luna prope horizontem exiſtente et limbo eius vndulante, interim tamen exiſti-

mat veram Immerſionem tardius aliquot ſecundis eueniſſe; nam tempus immerſionis annotatum eſt illud quo ſtellam conſpicere deſiit. Emerſionem ad limbum Lunae obſcurum P. *Dollierus*, *Bourgeois* et ego obſeruauimus eueniſſe $12^h. 45'. 18\frac{1}{2}''$. t. v.

Occultatio γ Geminorum die 10. Aprilis.

P. *Dollierus*, *Bourgeois* et ego Immerſionem poſt limbum Lunae obſcurum obſeruauimus eueniſſe $10^h. 59'. 0\frac{1}{4}''$. t. v. Fractiones ſecundorum originem ducunt a reductione temporis horologii ad tempus verum; interim tamen non difficile eſt, vt bini obſeruatores ad dimidium ſecundi conſentiant, praeſertim cum Immerſionem aut Emerſionem ad limbum Lunae obſcurum et ad idem horologium obſeruant.

Emerſionem ad limbum Lunae lucidum obſervaui teleſcopio 30 pollicum nuper a miniſtro ſtatus *Bertino* ad nos miſſo; ſtellam conſpexi $11^h. 46'. 12''$. t. v. a limbo Lunae iam ſeiunctam, ſed tam exiguo interuallo, vt credam veram Emerſionem contigiſſe certe poſt $11^h. 46'. 4''$ Idem ſentit P. *Dollierus*, ille tubo 15 ped. ſtellam tardius prae me conſpexit $17''$, partim ob aberrationem luminis, cui tubi antiqui ſunt obnoxii, partim ob incommoditatem longos tubos tractandi.

Occultatio exiguae Stellae Piſcium die 29. Aprilis mane.

Immerſio non eſt obſeruata, aut illa euenit ante ortum Lunae, aut vapores fecere, quo minus ſtella

ſtella prope limbum Lunae conſpici potuerit. Poſt ortum Lunae ob crepuſculum matutinum intenſius credidimus Emerſionem quoque obſeruari non poſſe: Id circo ſepoſui tubum 14 aut 15 pedes longum, cum laſſus iam eſſem ſuſtinendo illum per quartam partem horae. P. *Dollierus* obſeruans teleſcopio 30 pollicum, cum itidem de relinquendum illud in animo haberet, vidit ſtellam ad limbum Lunae obſcurum prodire $4^{h}. 25^{\prime}. 9^{\prime\prime}$. t. v. Non obſtantibus debili ſtellae lumine et diluculo ſatis diſtincte illa conſpiciebatur, vt Emerſio cum praeciſione obſeruari potuerit, et P. *Dollierus* obſeruationi non maiorem quam vnius ſecundi incertitudinem in eſſe mihi aſſeuerabat.

Obſeruaui nonnullas phaſes Eclipſeos Lunae, quae contigit die 23. Oct. Anni 1771. mediam noctem concluſi ex altitudinibus Solis correſpondentibus. En quatuor phaſes quas aſſeruandas eſſe exiſtimaui.

Initium Eclipſeos - - -	$11^{h}. 23^{\prime}. 17^{\prime\prime}$. t. v.
Dimidium Tychonis in vmbra	11. 41. 11.
Dimidium Tychonis ex vmbra	13. 9. 47.
Finis - - - - - - -	13. 39. 48.

Notum eſt initium et finem Eclipſeos magnae praeciſionis non eſſe capaces, verum obſeruationem Tychonis pari fiducia, ac obſeruationem ſecundi Satellitis, adhibendam eſſe exiſtimauerim.

Finem Eclipſeos Solis, quae contigit mane die 25. Maii 1770, obſeruaui $9^{h}. 15^{\prime}. 55\frac{1}{2}^{\prime\prime}$. t. v.

 Ex

Ex altitudinibus Solis correſpondentibus die 23 et 25 captis concluſi tempus verum et motum horologii, quo nunc et poſtea vſus ſum. Initium Eclipſeos eueniſſe aeſtimaui intra $7^h. 32'$ et $7^h. 33'$. Obſeruationem inſtitui tubo 14 pedes longo.

Obſeruationes a P. *Dolliero* ſuper cometam Anno 2769. inſtitutae ſunt micrometro Anglicano nunc tubo ſex pedum, nunc quatuor pedum adaptato. Obſeruationes inſequenti tabula conſcriptae, excepta vltima prodiere ſumendo medium duarum aut trium et interdum quatuor obſeruationum ſeſe inuicem excipientium. Durante ſecunda apparatione repetitis vicibus obſeruationes inſtituere non licuit. In prima columna indicaui numerum obſeruationum, quarum conſectarium tantum a P. *Dolliero* aſſeruatum hic appono.

Dies obſeru.	*Tempus ver. ad quod refertur poſitio Cometae hic allata*	*Min. et Sec. temp. quibus Cometa ante aut poſt ſtellam appellit ad filum hor.*	*Grad. Min. et Sec. quibus Cometa Borealior aut Auſtralior eſt ſtella.*	*Stellae, cum quibus comparatio eſt inſtituta ex Tabulis Flamſtedii deſumtae.*
28. Aug. 3. *obſeru.*	$14^h. 30'. 14''\frac{1}{4}$	praec. $9'. 50''$	Bor. $0°. 19'. 26''$	Stella paulo Borealior, quam eſt binarum *u* ♉ verſus Boream ſita: deeſt in Catalogo.
29 4. *obſ.*	$13^h. 53'. 38''$	praec. $0'. 38''$	Bor. 1. 4. 22	Auſtralior et lucidior binarum *u*.
30 4. *obſ.*	12. 52. 25¼	ſequ. $1'. 5''$	Bor. 0. 3. 5	*r* Tauri
31 4. *obſ.*	12. 53. 19	ſequ. 0. 36	Auſtr. 1. 13. 5	*d* Tauri

3. Sept 2. *obſ.*	15^h. 47' 33''$\frac{1}{2}$	praec. 7'. 12''$\frac{1}{2}$	Bor. 0°. 16'. 6''	γ hum. occid. Orionis
4. Sept. 4. *obſ.*	14. 20. 58	ſequ. 1. 51	Auſtr. 0. 8. 24	A Orionis ſequens γ.
6. Sept 4. *obſ.*	14. 14. 28	ſequ. 2. 31	Auſtr. 0. 29. 30	Auſtralis binarum ſub brachio ſequenti Orionis.
8. {2 *obſ.*	15. 29. 24	praec. 0. 17$\frac{1}{3}$	Auſtr. 1. 21. 51$\frac{1}{2}$	Gula monocerotis.
{2. *obſ.*	15. 56. 27	ſequ. 0. 10$\frac{1}{2}$	Auſtr. 1. 22. 56	
9. - - 3. *obſ.*	15. 12. 28	praec. 4. 0$\frac{1}{2}$	Bor. 0. 19. 12	De quatuor in humero monocerotis omnium Auſtralior
11. Sept. 2. *obſ.*	15. 52. 57	praec. 9. 17	Bor. 0. 38. 11	Omnium Auſtralior trianguli.
12. - - 1. *obſ.*	15. 53. 32	ſequ. 11. 20	Auſtr. 0. 33. 42	eadem.
26. Oct.	6^h. 35'. 4''	ſequ. 4'. 24''	Bor. 0. 39. 42	μ Serpentis.
31 —	6. 25. 1	ſequ. 3. 46	Bor. 0. 43. 35	Stella intra λ et ε Ophiuci in mappa non deſignata.
1. Nov.	6. 37. 55	praec. 3. 50	Bor. 1. 4. 16	Stella cuius declin. in mappa poſita eſt 1°. 40' Auſtr. ſub brachio praecedenti Ophiuci.
3. Nov.	6. 17. 30	ſequ. 7. 30	Bor. 1. 7. 11	Eadem ſtella quae fuit 1. Nov.

5. —	6. 34. 12	praec. 22. 37	Auſtr. 0. 28. 22	Stella Ophiuci
6. —	6.h 34'. 12''	praec. 17'. 32''	Auſtr. 0 26. 28	eadem { in aequatore, cuius aſcenſio ponitur 17h. 3'. Poſitio eius in Catalogo Flamſtedii et in mappis videtur minime exacta.
8. —	6. 16. 54	praec. 7. 45	Auſtr. 0. 23. 59	eadem
10. —	6. 2. 40	ſequ. 1. 23	Auſtr. 0. 21. 3	eadem
11. —	6. 7. 10	ſequ. 5. 53	Auſtr. 0. 19. 53	eadem
12. —	6. 14. 17	ſequ. 10. 7	Auſtr. 0. 18. 21	eadem
15.	6. 10. 32	ſequ. 22. 24	Auſtr. 0. 14. 0	eadem
16.	6. 6. 33	ſequ. 26. 18½	Auſtr. 0. 12. 18	eadem
18.	6. 4. 34	ſequ. 33. 48/58	Auſtr. 0. 9. 22	eadem
19.	6. 13. 47	ſequ. 37. 35	Auſtr. 0. 8. 15	eadem
20.	6. 24. 14	ſequ. 41. 12	- - - - -	eadem, declinatio non eſt obſeruata, aſcenſio vero proxime tantum
22.	6. 19. 27	ſequ. 3. 6	Auſtr. 1. 33. 8	*k* inter humerum Ophiuci et caudam Serpentis
24.	6. 21. 33½	ſequ. 9. 43½	Auſtr. 1. 28. 9	eadem
25.	6. 5. 34	ſequ. 12. 54½	Auſtr. 1. 27. 26	eadem
26.	6. 40. 11	ſequ. 15. 59	Auſtr. 1. 24. 57	eadem. Cometa difficile conſpieciebatur, id circo obſ. non eſt praeciſa.

In obſeruatione die 18. Nou. inſtituta dubium P. *Dolliero* ſubortum eſt, vtrum 48'' aut 58'' fuerint notanda, nam eo ipſo momento, quo obſeruatio fuerat inſcribenda, aliquis ſuperuenit. Vt ex obſeruatio-

vationibus P. *Dollieri* Elementa Cometae determinentur, neceſſe eſt noſſe poſitionem ſtellarum, cum quibus Cometa fuit comparatus. Nulli e nobis vacauit hoc operis ſuſcipere, tantoque minus in Cometae Elementa inquirere; procul dubio ab Aſtronomis per Europam diſperſis iam illa fuerunt definita.

EPITO-

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXIII. SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

Vſus ſum barometro ſimplici. Diameter tubi aliquantillum partem decimam pollicis ſuperat, et ſcala diuiſa eſt in pollices, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt: quiuis autem iterum in viginti partes aequales ſubdiuiſus eſt; ita vt partes adeo centeſimas proxime aeſtimare facile mihi contigerit. Barometrum hoc porro in hypocauſto ad altitudinem circiter 18 pedum ſupra ſuperficiem mediam fluminis Neuae in diſtantia 5000 propemodum pedum ab eius oſtio ſuſpenſum fuerat. Pro quouis autem menſe variationes ipſas altitudinum barometricarum per lineam curuam in charta deſignaui, cuius applicatae altitudinibus ipſis, abſciſſae vero temporibus, quibus obſeruatae fuerant, correſpondent.

Menſe autem quouis elapſo, ex linea curua delineata ſequentia facillime concludere potui: ſcilicet

cet 1) altitudinem barometri maximam et 2) minimam: hinc 3) variationem ſeu differentiam inter altitudinem maximam et minimam; porro 4) medium ſeu ſemiſummam altitudinis maximae et minimae; denique 5) altitudinem barometri mediam, ſiue ſummam omnium altitudinum diuiſam per numerum earum.

Haec quinque momenta in tabulam ſequentem diſpoſui: vbi notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros deſignare, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem*.

Huic tabulae adſtruxi ſecundam, quae oſtendit, per quod interuallum temporis ſtatus Barometri in quolibet menſe ſuperabat altitudines $28\frac{10}{100}$; $28\frac{5}{100}$; 28; $27\frac{95}{100}$ et $27\frac{90}{100}$ pollicum; quibus interuallis per dies et horas expreſſis adiecta eſt inſuper columna, quae indicat altitudinem, quam ſtatus barometri ſuperabat praeciſe per dimidium menſis.

Colligitur ex his tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima barometri 28. 88: menſe Novembris die 23. hora 10 veſperi. Thermom. Delisl. 168. Coelum ſerenum. Vent. N.

2. Altitudo minima barometri 26. 85: menſe Decembris die 31. hora 6 mane. Thermom. Delisl. 152: coelum nubibus obductum. Nix copioſa et ventus valde vehemens ex regione S – W.

3. Variatio maxima 2. 03 vel $2\frac{3}{100}$ pollicum.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27. 86.

5. Altitudo media inter omnes obſeruatas 28. 13.

6. Porro mercurius in tubo barometri ſe ſuſtentabit ſupra

$28\frac{10}{100}$ poll. per dies 207
$28\frac{5}{100}$ poll. per dies $227\frac{1}{2}$
28 poll. per dies $251\frac{1}{2}$
$27\frac{95}{100}$ poll. per dies $272\frac{1}{2}$ et ſupra
$27\frac{90}{100}$ poll. per dies 292.

Vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum ſupra altitudinem $28\frac{16}{100}$ poll. quae altitudo non valde differt a media.

Comparatione autem facta cum concluſionibus quae ex obſeruationibus praeterito anno 1772. factis erutae fuerunt, deprehendimus ſtatum barometri hoc 1773. anno generatim multo altiorem fuiſſe, illo praecedenti 1772. anni.

I. Baro-

I. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1773, ſecundum Calendarium Gregorianum.

Menſe	Altitudo maxima Dig. p. c.	die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	die hora	Variatio D. p. c.	Medium Dig. p. c	Altitudo medi Dig. pc.
Ianuar.	28. 35	6 III a.m.	26. 98	12 meridie	1. 37	27. 67	27. 82
Februar.	28. 78	10 III. p.m.	27. 77	25 meridie	1. 01	28. 27	28. 34
Mart.	28. 55	4 IX. p m.	27 07	17 VII. p.m.	1. 48	27. 81	28. 07
April.	28. 72	18 VI. a.m.	27. 90	30 VI. a.m.	0. 82	28. 31	28. 37
Maii	28. 63	23 IX. a m.	27. 83	7 IX. p.m.	0. 80	28. 23	28. 22
Iunii	28. 52	13 IX. a.m.	27. 48	4 meridie	1. 04	28. 00	28. 03
Iulii	28. 39	20 meridie 21 VI. a. m.	27. 70	5 X. p. m.	0. 69	28. 05	28. 04
Auguſt.	28. 32	16 IX. a. m.	27. 80	1 III. p.m.	0. 52	28. 06	28. 05
Sept.	28. 48	30 II. p. m.	27. 67	13 meridie	0. 81	28. 07	28. 06
Octobr.	28. 83	9 IV. p. m.	27. 24	25 IX. p.m.	1. 59	28. 04	28. 12
Nouemb.	28. 88	23 X. p. m.	27. 97	1 X. p. m. 2 IX a. m.	0. 91	28. 43	28. 43
Decembr	28. 79	14 VI. p.m.	26. 85	31 VI. a. m.	1. 94	27. 82	28. 06
Anno 1773.	28. 88	Menſe Nouembr.	26. 85	Menſe Decembr.	2. 03	27. 86	28. 13

II. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

Menſe	ſupra 28. 10 Dies horae	ſupra 28. 05 Dies horae	ſupra 28. 00 Dies horae	ſupra 27. 95 Dies horae	ſupra 27. 90 Dies horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	7. 0	7. 15	10. 3	13. 12	14. 21	27. 87
Febr.	25. 18	26. 3	26. 12	26. 21	27. 3	28. 30
Mart.	17. 3	17. 15	18. 15	20. 9	22. 6	28. 16
April.	25. 15	27. 12	28. 3	29. 6	30. 0	28. 42
Maii	23. 21	24. 9	27. 18	28. 18	29. 12	28. 27
Iun.	14. 0	16. 0	17. 0	18. 3	19. 3	28. 07
Iul.	11. 15	14. 18	16. 3	18. 15	23. 6	28. 02
Aug.	10. 0	14. 12	22. 6	25. 21	28. 6	28. 04
Sept.	12. 21	14. 9	15. 15	17. 9	19. 18	28. 03
Oct.	18. 15	21. 9	23. 0	24. 3	26. 9	28. 13
Nov.	28. 3	28. 18	29. 3	30. 0	30. 0	28. 37
Dec.	12. 12	14. 15	17. 6	19. 15	21. 15	28. 03
Anno 1773	207. 3	227. 12	251. 12	272. 12	292. 3	28. 16

Adiungam hic denique obſeruationes nonnullas deſcenſuum et aſcenſuum Barometri ſubitaneorum.

Menſe Ianuario.

d. 1. hora 9. p. m. 27. 30.

d. 2. hora 10. p. m. 27. 85.

Ergo

Ergo interuallo temporis 25 horarum barometrum aſcendit $\frac{55}{100}$ pollicis. Coelum nubibus obductum, nix copioſa et procella e regione W.

d. 6. hora 3 mane 28. 35
d. 7. hora 9 p. m. 27. 50.

Hinc per tempus 42 horarum deſcendit barometrum interuallo $\frac{85}{100}$ poll. Coelum obductum, nix et ventus vehemens ex N — W.

d. 11. hora 6 p. m. 27. 53
d. 12. meridie 26. 98
d. 13. hora 9 p. m. 27. 95.

Primo ergo barometrum tempore 18 horarum per ſpatium $\frac{55}{100}$ poll. deſcendit, coelo nubibus obducto, et vento vehementer flante ex plaga N-W; vna cum pluuia ac niue abundante. Tum vero iterum per 33 horas aſcendit interuallo $\frac{97}{100}$ poll. coelo exiſtente ſereno et vento e regione N — O flante.

Menſe Martio.

d. 10. meridie 27. 98
d. 11. meridie 28. 50.

Conſequenter tempore 24 horarum aſcendit barometrum per ſpatium $\frac{52}{100}$ poll. Coelum erat ſerenum et ventus flabat ex ſeptentrione.

d. 16. hora 9 p. m. 27. 67
d. 17. hora 8 p. m. 27. 07
d. 19. hora 9 p. m. 27. 87.

Primum ergo interuallo 23 horarum barometrum per ſpatium $\frac{6}{15}$ poll. deſcendit. Nix cecidit copioſa et procella fuit occidentalis. Tum autem tempore 49. horarum iterum per $\frac{8}{15}$ poll. aſcendit: coelo exiſtente ſereno et vento flante e ſeptentrione.

d. 27. hora 3 p. m. 27. 42
d. 29. meridie 28. 33.

Per interuallum temporis 45 horarum aſcendit igitur mercurius in barometro $\frac{91}{100}$ poll. coelum nubibus obductum, nix et ventus e regione N – O.

Menſe Aprili.

d. 27. hora 6 p. m. 28. 54

d. 29. hora 3 mane 27. 97.

Ergo tempore 33 horarum deſcendit mercurius per $\frac{57}{100}$ poll. coelum obductum, pluuia et ventus e regione W.

Menſe Iunio.

d. 7. hora 6. a. m. 28. 05
d. 8. hora 9. a. m. 27. 52.

Hinc interuallo 27 horarum deſcenſus fuit $\frac{55}{100}$ poll. Pluuia copioſa et ventus vehementiſſimus ex occcidente.

Menſe Septembri.

d. 23. media nocte 27. 68

d. 25. hora 6. p. m. 28. 38.

Aſcen-

Aſcendit igitur mercurius in tubo barometri interuallo 42 horarum, per ſpatium $\frac{7}{10}$ poll. Pluvia decidit et ventus e regione S — W vehementisſimus fuit.

Menſe Octobri.

d. 24. meridie 28. 20
d. 25. hora 9 p. m. 27. 24
d. 27. hora 6 a. m. 28. 35
d. 28. hora 6. a. m. 27. 88.

Primum ergo Barometrum interuallo temporis 33 horarum deſcendit per $\frac{96}{100}$ poll. Pluuia copiſſima, grando, et ventus occidentalis vehementiſſimus: Deinde tempore 33 horarum iterum aſcendit per $\frac{111}{100}$ poll. niue cadente et vento vehementer flante ex ſeptentrione. Denique interuallo 24 horarum rurſus deſcendit per $\frac{47}{100}$ poll. nix et procella e regione N — W.

Menſe Decembri.

d. 26. hora 10 a. m. 27. 90
d. 26. hora 12 p. m. 28. 43
d. 27. hora 6 p. m. 28. 03
d. 31. hora 6. a. m. 26. 85.

Primum igitur interuallo 14 horarum aſcendit barometrum $\frac{53}{100}$ poll. Deinde interuallo 18 horarum deſcendit $\frac{4}{10}$ poll. Tum autem tempore 84 horarum adhuc deſcendit per $\frac{118}{100}$ poll. Coelum nubibus obductum; nix copioſa, et ventus vehementiſſimus

tiſſimus primo e ſeptentrione, deinde e regione N – W et vltimum ad finem anni e regione S – W.

II. Thermometrum.

Adhibui Thermometrum mercurio impletum deslislianum, Petropoli factum, cuius conſtructionis principium ſatis notum eſt: indicatur ſcilicet in ſcala eius, calor aquae bullientis per ciphram et punctum congelationis naturalis per numerum 150. Tum hoc Thermometrum aëri expoſitum et in tali loco verſus boream ſemper collocatum fuit, vt ſol id nec directe nec per reuerberationem irradiare potuerit. Obſeruationes autem hoc Thermometro inſtitutas iterum in duas tabulas redigere conatus ſum, quarum prior altitudinem maximam et minimam vna cum differentia inter easdem indicat, poſterior vero ſpeciatim ſtatum frigoris et caloris pro ſingulis menſibus exhibet. Vbi monendum eſt, per ſtatum frigoris illam altitudinem minimam Thermometri intelligi, quae pro vnoquoque die plerumque tempore matutino et veſpertino obſeruatur. Similique modo ſtatus caloris cuiusuis diei ſignificabit altitudinem maximam Thermometri, vel eam quae maxima parte meridie aut ſtatim poſt meridiem notatur. His iam monitis oſtendit tabula ſecunda pro quouis menſe numerum dierum, quibus ſtatus frigoris et caloris ſuperabat terminos nonnullos in Thermometro deslisliano. Vnde patet hoc 1773 anno fuiſſe dies 148 frigidiores gradu 150, inter quos

quos 83 reperti ſunt frigidiores gradu 160, et 43 frigidiores gradu 170. Tum vero inter hos 21 dies fuiſſe, quibus frigus ſuperabat gradum 180; inter quos tandem 6 dies fuerunt frigidiores gradu 190 et 2 tantum dies frigidiores gradu 200. Sic et de ſtatu caloris.

Ex tabula priori autem intelligitur, per totum annum fuiſſe:

Altitudinem Thermometri minimam ſeu gradum frigoris maximi 203 menſe Ianuarii die 29. hora matutina VII^{ma}, Barometro $28\frac{26}{100}$; coelo exiſtente ſereno et vento leniter flante ex plaga N – O.

Altitudinem Thermometri maximam ſeu gradum caloris maximi 104 die 24 menſis Iulii, hora II^{da} poſt meridiem. Barometrum $28\frac{18}{100}$; coelum ſerenum: ventus e regione S – O.

Vnde variatio Thermometri maxima per totum annum fuit 99 grad. Deslisl.

Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus

		dies
210 et 200	die 29 et 30 Ianuarii - - -	2
200 et 190	die 23, 28, 31, Ian. et die 1 Febr.	4
190 et 180	die 2. 4. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 24. 27. Ian. die 2. 3. 4. Febr. et die 24 Decembris - - - -	15
180 et 170	die 1. 3. 5. 6. 12. 22. 26. Ian. die 12. 22. 23. 24 Febr. die 14. 19. 20. 21. 23. 29 Mart. die 23. 24 Nov. et die 15. 23. 27. Dec.	22

 Calor

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus

100 et 110	die 15. Iun. die 22. 23. 24. 25. 27. 28. 29. 31. Iulii, et die 18. 22. 23. Aug. - - - - - - -	dies 12
110 et 120	die 14. 17. Maii: die 3. 4. 13. 14. 16. 19. 20. 22. 24—30 Iunii; die 1—4. 12. 14. 18. 19. 20. 21. 26. 30. Iulii; die 1. 5. 8. 9. 14. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 29. 31. Auguſti - - - - - - - -	42
120 et 130	die 15. 16. 17. 19. 20. Aprilis; die 2. 5. 6. 7. 8. 11. 12. 13. 16. 18. 20. 21. 26. 27. 28. 30. 31. Maii; die 1. 2. 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 17. 18. 21. 23. Iunii; die 5—11. 13. 15. 16. 17. Iulii; die 2. 3. 4. 6. 7. 10. 11. 12. 13. 15. 24. 25. 26. 27 30. Auguſti; die 1—5. 7—12. 14. 16. 18. 21. 23. 24. 25. 27 Septembris; denique die 2. 5. 6 et 7. Octobris -	84

I. Ther-

I. Thermometri altitudines minimae et maximae pro ſingulis menſibus anni 1773, ſecundum Calendarium Gregorianum.

Menſe	Altitudo minima		Altitudo maxima		Differentia
	Gradus	die hora	Gradus	die hora	Gradus
Ianuar	203	29. VII. a. m.	146	10 II. p. m.	57
Februar.	193	1. VI. a. m.	151	15, 20, 21 II. p. m.	42
Mart.	178	20. VI. a. m.	144	12, 24 II. p. m	34
April.	153	1. VI. a. m.	127	20. II. p. m.	26
Maii	148	1 VI. a. m.	118	14. II. p. m.	30
Iunii	138	5, 7, 9 VI. a. m.	108	15. II. p. m.	30
Iulii	136	8. VI. a. m.	104	24. II. p. m	32
Auguſt.	134	7, 28 VI. a. m.	107	22. II. p. m.	27
Septembr.	143	6, 7 VI. a. m.	121	10, 23 II. p. m.	22
Octobr.	160	24. VI a m.	124	7. II. p m.	36
Nouembr.	172	24. VII. a. m.	136	1. II. p. m.	36
Decembr.	181	24. VI. a. m.	146	6. II. p. m.	35
Anno 1773.	203	Menſe Ian.	104	Menſe Iulio	99

II. Status frigoris et caloris.

Menſe	Dies quibus frigus ſuperabat gradus							Dies calidiores gradibus				
	200	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150
Ian.	2	5	16	23	27	29	31					4
Febr.		1	4	8	20	28	28					
Mart.				6	15	31	31					15
Apr.						5	30			5	23	30
Maii							12		2	19	31	31
Iun.							–	1	16	29	30	30
Iulii							–	8	20	31	31	31
Aug.							–	3	16	31	31	31
Sept.							6			19	30	30
Oct.					1	7	27			4	19	28
Nov.				2	10	19	30				1	14
Dec.			1	4	10	29	31					12
Anno 1773.	2	6	21	43	83	148	226	12	54	138	196	256

Hinc comparatione ſacta cum ſtatu frigoris et caloris anno praecedente 1772 obſeruato, concluditur, hoc 1773 anno et frigus et calorem minorem fuiſſe illo 1772 anno. Nam anno praeterito annotauimus 236 dies frigidiores gradibus 140; 144 dies frigidiores gradibus 150; 89 dies frigidiores gradibus 160; 56 dies frigidiores gradibus 170; 25 dies frigidiores gradibus 180; 14 dies frigidiores gradibus 190 et 3 dies frigidiores gradibus 200. Similique modo deprehendimus illo anno praeterito 19 dies calidiores fuiſſe gradibus 110; 61 dies calidio-

lidiores gradibus 120; 121 dies calidiores gradibus 130; 205 dies calidiores gradibus 140 et 267 dies calidiores gradibus 150.

Deinde frigus maximum praeterito anno fuit 208, cum hoc anno tantum 203 graduum obſeruatum fuerit; vnde propoſitum ſatis conſtat, quamvis differentia non magna deprehendatur.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procelloſus	Nord	N-O	Oſt	S-O	Süd	S-W	Weſt	N-W	Variabilis
Menſe	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	6	20	3	2	6	14	—	—	—	—	3	7	1
Febr.	4	12	9	3	9	3	—	3	—	—	4	9	—
Mart.	4	14	11	2	8	2	1	2	2	6	2	5	3
Apr.	13	8	6	3	4	1	—	4	10	6	1	2	2
Maii	6	14	9	2	—	3	7	4	2	4	3	5	3
Iunii	3	13	6	8	—	1	9	1	1	5	5	7	1
Iulii	11	11	5	4	4	2	6	3	1	2	3	3	7
Aug.	7	12	8	4	2	9	1	3	3	2	4	7	—
Sept.	4	10	9	7	1	6	1	2	4	3	8	3	2
Oct.	5	7	14	5	4	2	1	1	11	3	6	3	—
Nov.	5	15	9	1	5	7	2	3	5	5	1	1	1
Dec.	—	20	7	4	5	4	1	2	1	5	9	4	—
Anno 1773	68	156	96	45	48	54	29	28	40	41	49	56	20

Vnde patet, hoc anno maxime regnaſſe ventum e regione N-W, tum vero ventum e regione N-O; deinde zephyrum et boream. Porro perſpicitur hunc

 annum

annum aliquantillum ventoſiorem fuiſſe anno praeter-ito 1772.

Speciatim autem hoc anno procellae flabant e regione

		dies
Nord	d. 24. 25 Febr. d. 26. Octobr. d. 27. Decembr. - - - - - - - - - -	4
N–O	d. 4. Auguſti - - - - - - - -	1
Oſt	d. 6. Maii d. 5. 6. Iulii - - - - - -	3
S–O	d. 19. Apr. d. 7. Maii d. 3. Iun. d. 24 Iul. d. 9. Sept. d. 16. Nov. - - -	6
Süd	d. 14. Apr. d. 23. Aug. d. 23. Sept. d. 31. Oct. - - - - - - - - - - -	4
S–W	d. 17. Mart. d. 15. Apr. d. 4. 9. Iun. d. 17. Aug. d. 10. 24. Sept. d. 11. 31 Decembr. - - - - - - -	9
Weſt	d. 3. Ian. d. 5. 6. Iunii d. 15. Iul. d. 11. 18. 21. Sept. d. 25. Oct. d. 28 Decembr.	9
N–W	d. 11. Ian. d. 13. Febr. d. 10. Mart. d. 1. 2. 30. Iun. d. 15. Aug. d. 24. 27. Oct. - - - - - - -	9

IV. Conſtitutio coeli.

Menſe	coelum ſerenum	coelum obductum	Nebuloſum	Pluuia	Nix
	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	12.	13.	5.	2	11.
Februar.	3.	18.	8.	—	11.
Mart.	13.	10.	6.	—	9.
April.	16.	8.	3.	4	1.
Maii	11.	4.	1.	13	—
Iunii	10.	11.	1.	14	—
Iulii	17.	3.	3.	12	—
Auguſt	11.	8.	2.	15	—
Sept.	9.	10.	5.	19	—
Octobr.	12.	8.	7.	9	4.
Nouembr.	11.	14.	5.	6	7.
Decembr.	2.	17.	2.	2	14.
Anno 1773.	127.	124.	48.	96	57.

Plures igitur dies ſereni fuerunt, quam anno praeterito, vbi eorum tantum 102 numerabantur. Ac numerus dierum, quibus pluuia et nix cecidit, multo minor deprehenditur illo, anno praeterlapſo: pluit ſcilicet tunc per 114 dies et ninxit per 61 dies.

V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 3; die ſcilicet 6 Maii; porro die 17 Auguſti et die 25 Octobris.

Aurorae

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 31; et quidem 18 perlucidae d. 16. 17. 18. 28. 30 Ianuarii; d. 1. 21 Febr. d. 13. 16 Martii, d. 27 Aprilis, d. 15 Auguſti, d. 27 Sept. d. 20 Octobris d. 15. 17. 18 Nouembris et d. 3. 14. Decembris. Porro 13 aurorae boreales debiliores d. 15. 27 Ianuar. d. 12. 21 Martii, d. 12. 18. 23. 24 Aprilis; d. 10. Sept. d. 9. 21 Octobris et d. 14. 16. Nouembris.

Tonuit 16ies; die 7 Maii; d. 15. 16. 27. 28. 29 Iunii; d. 4. 24. 25. 26. 29. 31 Iulii; d. 1 17. 18 et 23 Auguſti.

Parhelia obſeruata fuerunt 5, ſcilicet d. 2. 15. 26. 31 Ianuarii; et d. 24 Februarii.

Halo Lunae bis; d. 27 Ianuarii et d. 1 Februarii.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 16 Aprilis; et die 19 Nouembris maxima parte, die 23 Nouembris vero vbique glacie obducebatur.

I. Ta-

I. Tabula exhibens comparationem Thermometri Deslisliani cum Reaumuriano, cuius ope gradus Deslisliani facillime reducuntur ad reaumurianos et vice verſa.

Deslisle	Reaum	Deslisle	Deslisle	Reaum.	Deslisle	Deslisle	Reaum.	Deslisle
150 −	0	150 +	170	10.7	130	190	21.3	110
151	0.5	149	170.6	11	129.3	191	21.9	109
151.9	1	148.1	171	11.2	129	191.2	22	108.8
152	1.1	148	172	11.7	128	192	22.4	108
153	1.6	147	172.5	12	127.5	193	22.9	107
153.7	2	146.3	173	12.3	127	193.1	23	106.9
154	2.1	146	174	12.8	126	194	23.5	106
155	2.7	145	174.4	13	125.6	195	24	105
155.6	3	144.4	175	13.3	125	196	24.5	104
156	3.2	144	176	13.9	124	196.9	25	103.1
157	2.7	143	176.2	14	123.8	197	25 1	103
157.5	4	142.5	177	14.4	123	198	25.6	102
158	4.3	142	178	14.9	122	198.7	26	01.3
159	4.8	141	178.1	15	121.9	199	26.1	101
159.4	5	140.6	179	15.5	121			
160	5.3	140	180	16	120	200	26.7	100
161	5.9	139	181	16.5	119	200.6	27	99.4
161.2	6	138.8	181.9	17	118.1	201	27.2	99
162	6.4	138	182	17.1	118	202	27.7	98
163	6.9	137	183	17.6	117	202.5	28	97.5
163.1	7	136.9	183.7	18	116.3	203	28.3	97
164	7.5	136	184	18.1	116	204	28.8	96
165	8	135	185	18.7	115	204.4	29	95.6
166	8.5	134	185.6	19	114.4	205	29.3	95
166.9	9	133.1	186	19.2	114	206	29.9	94
167	9.1	133	187	19.7	113	206.2	30	93.8
168	9.6	132	187.5	20	112.5	207	30.4	93
168.7	10	131.3	188	20.3	112	208	30.9	92
169	10.1	131	189	20.8	111	208.1	31	91.9
170	10.7	130	189.4	21	110.6	209	31.5	91
			190	21.3	110	210	32	90

Gradus Deslisliani ad partem ſiniſtram reſpondent gradibus reaumurianis infra punctum congelationis naturalis, ad dextram vero gradibus iisdem ſupra punctum congelationis.

II. Reductio pollicum Pariſinorum ad Londinenſes.

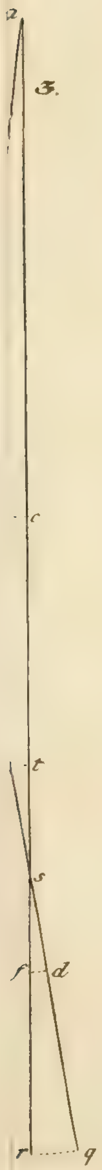
Pariſin. poll. lin.	Londin. poll. lin.
26. 9	28. 8. 4
26. 10	28. 8. 5
26. 11	28. 8. 5
27. 0	28. 9. 6
27. 1	28. 10. 7
27. 2	28. 11. 7
27. 3	29. 0. 8
27. 4	29. 1. 9
27. 5	29. 2. 9
27. 6	29. 4. 0
27. 7	29. 5. 1
27. 8	29. 6. 1
27. 9	29. 7. 2
27. 10	29. 8. 3
27. 11	29. 9. 3
28. 0	29. 10. 4
28. 1	29. 11. 4
28. 2	30. 0. 4
28. 3	30. 1. 5
28. 4	30. 2. 5
28. 5	30. 3. 6
28. 6	30. 4. 7
28. 7	30. 5. 8
28. 8	30. 6. 9
28. 9	30. 7. 9
28. 10	30. 9. 0
28. 11	30. 10. 1
29. 0	30. 11. 2

Pariſin. poll.	Londin. poll.	Pariſin. poll.	Londin. poll.
26. 85	28. 64	28. 05	29. 92
26. 90	28. 69	28. 10	29. 97
26. 95	28. 74	28. 15	30. 02
27. 00	28. 80	28. 20	30. 08
27. 05	28. 85	28. 25	30. 13
27. 10	28. 90	28. 30	30. 19
27. 15	28. 96	28. 35	30. 24
27. 20	29. 01	28. 40	30. 29
27. 25	29. 06	28. 45	30. 35
27. 30	29. 12	28. 50	30. 40
27. 35	29. 17	28. 55	30. 45
27. 40	29. 22	28. 60	30. 51
27. 45	29. 28	28. 65	30. 56
27. 50	29. 33	28. 70	30. 61
27. 55	29. 38	28. 75	30. 67
27. 60	29. 44	28. 80	30. 72
27. 65	29. 49	28. 85	30. 77
27. 70	29. 54	28. 90	30. 82
27. 75	29. 60	28. 95	30. 88
27. 80	29. 65	29. 00	30. 93
27. 85	29. 70	29. 05	30. 98
27. 90	29. 76	29. 10	31. 04
27. 95	29. 81	29. 15	31. 09
28. 00	29. 87	29. 20	31. 14

III.

III. Reductio partium centeſimarum pollicis ad lineas ſiue partes duodecimales pollicis.

Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae
1	0. 1	21	2. 5	41	4. 9	61	7. 3	81	9. 7
2	0. 2	22	2. 6	42	5. 0	62	7. 4	82	9. 8
3	0. 3	23	2. 7	43	5. 1	63	7. 5	83	9. 9
4	0. 5	24	2. 9	44	5. 3	64	7. 7	84	10. 1
5	0. 6	25	3. 0	45	5. 4	65	7. 8	85	10. 2
6	0. 7	26	3. 1	46	5. 5	66	7. 9	86	10. 3
7	0. 8	27	3. 2	47	5. 6	67	8. 0	87	10. 4
8	0. 9	28	3. 3	48	5. 7	68	8. 1	88	10. 5
9	1. 1	29	3. 5	49	5. 9	69	8. 3	89	10. 7
10	1. 2	30	3. 6	50	6. 0	70	8. 4	90	10. 8
11	1. 3	31	3. 7	51	6. 1	71	8. 5	91	10. 9
12	1. 4	32	3. 8	52	6. 2	72	8. 6	92	11. 0
13	1. 5	33	3. 9	53	6. 3	73	8. 7	93	11. 1
14	1. 7	34	4. 1	54	6. 5	74	8. 9	94	11. 3
15	1. 8	35	4. 2	55	6. 6	75	9. 0	95	11. 4
16	1. 9	36	4. 3	56	6. 7	76	9. 1	96	11. 5
17	2. 0	37	4. 4	57	6. 8	77	9. 2	97	11. 6
18	2. 1	38	4. 5	58	6. 9	78	9. 3	98	11. 7
19	2. 3	39	4. 7	59	7. 1	79	9. 5	99	11. 9
20	2. 4	40	4. 8	60	7. 2	80	9. 6	100	12. 0



3.

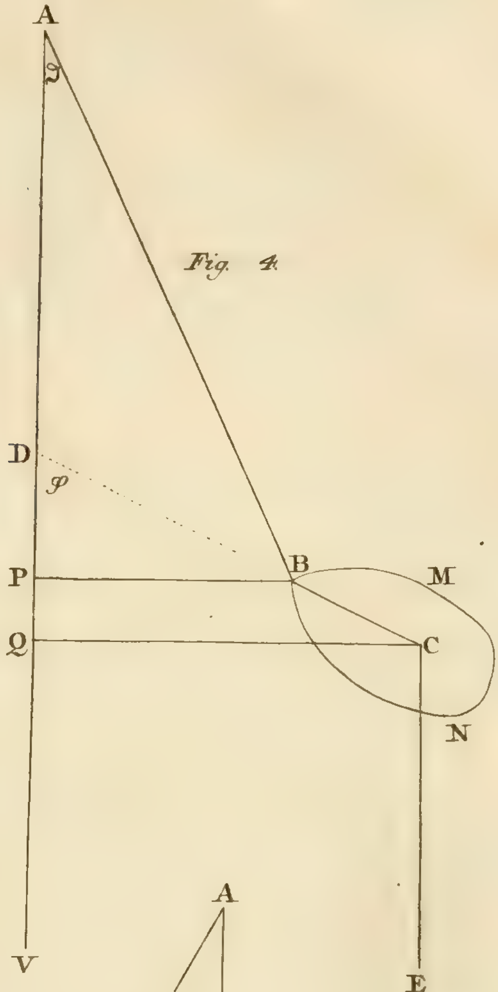


Fig. 4.

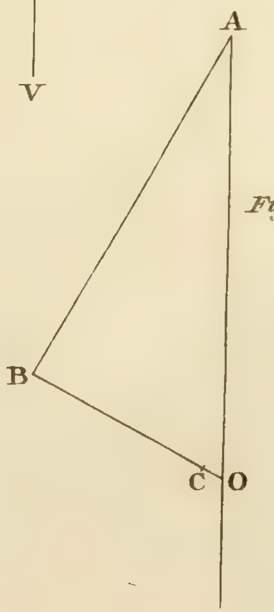


Fig. 5.

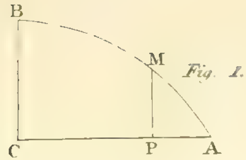


Fig. 1.

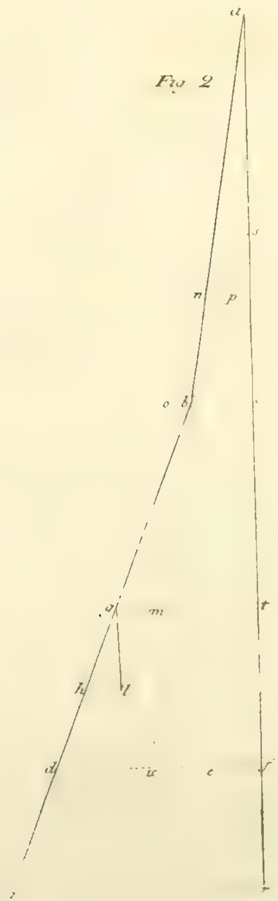


Fig. 2.

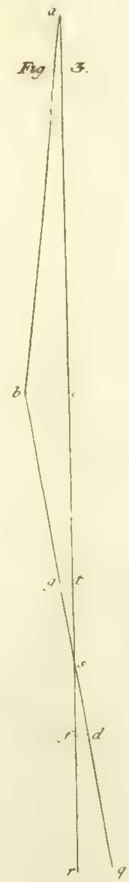


Fig. 3.

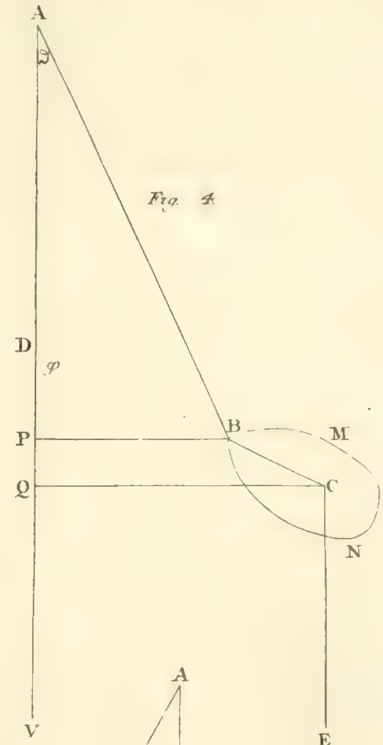


Fig. 4.

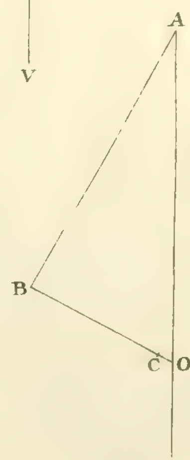


Fig. 5.

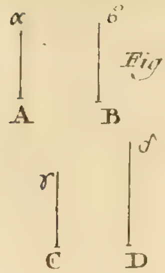


Fig 2.

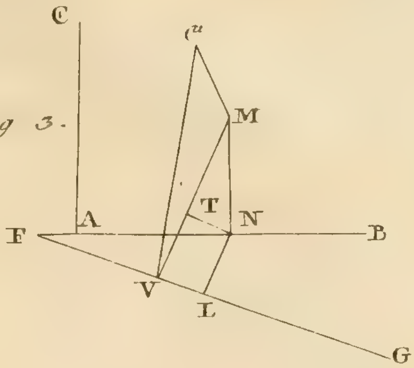


Fig 3.

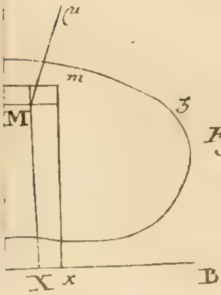


Fig 4.

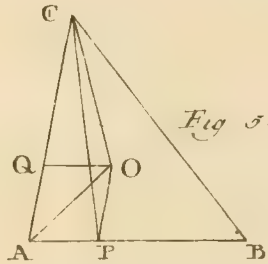


Fig 5.

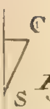


Fig 6.

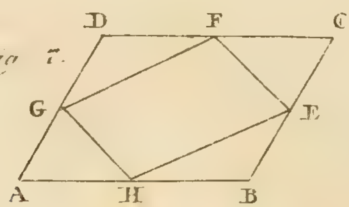
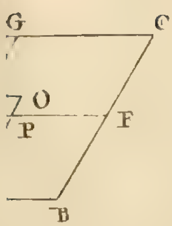


Fig 7.



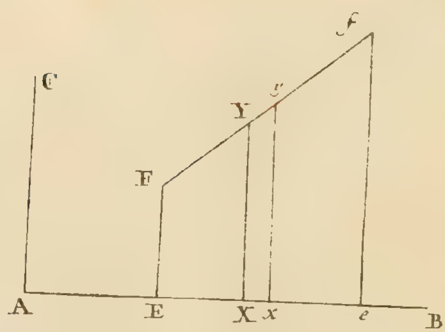


Fig 9.

Fig. 1.

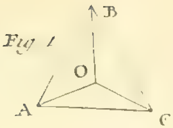


Fig. 2.

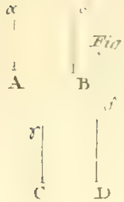


Fig. 3.

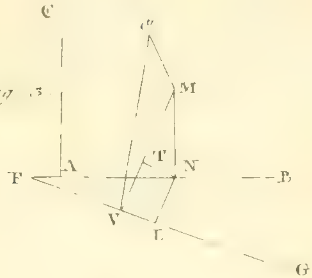


Fig. 4.

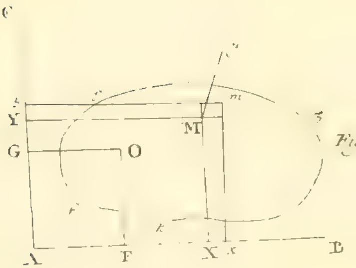


Fig. 5.

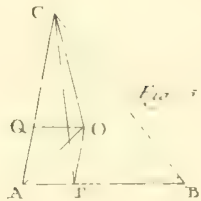


Fig. 6.

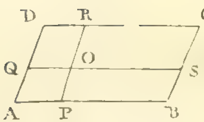


Fig. 7.

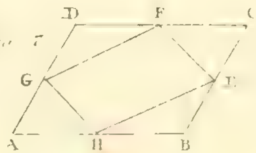


Fig. 8.

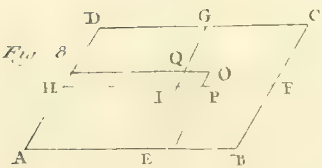
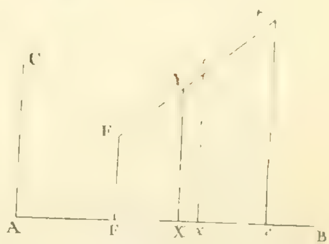


Fig. 9.



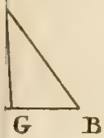
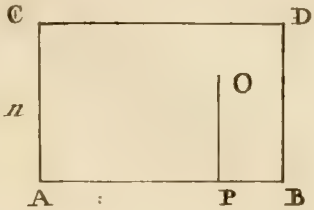
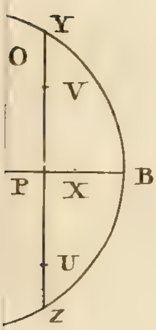


Fig. n





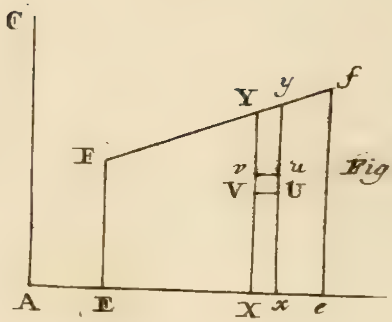
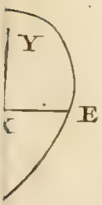


Fig. 18



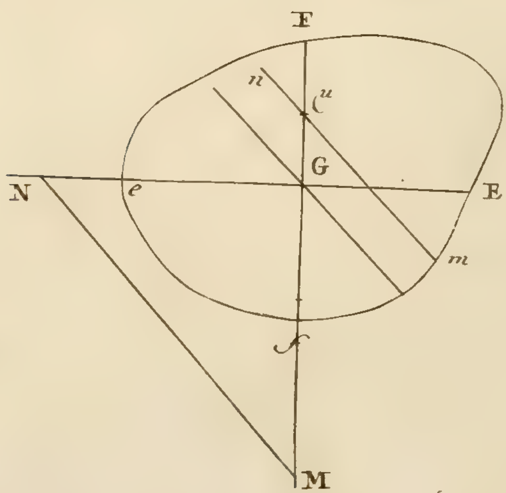


Fig. 15

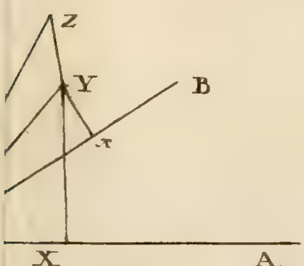


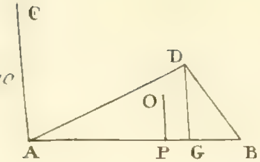
Fig 10


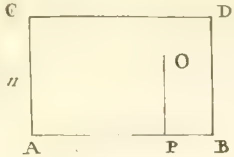
Fig 11


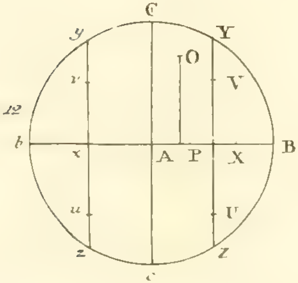
Fig. 12


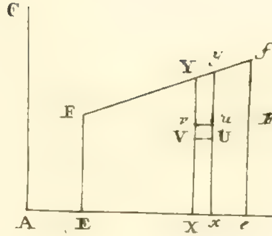
Fig. 13


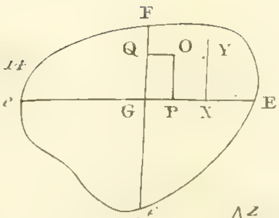
Fig 14


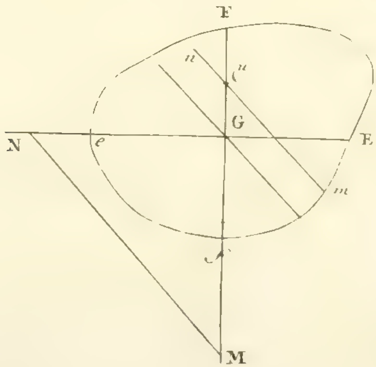
Fig 15


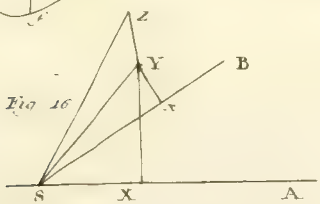
Fig 16


Fig. 1.

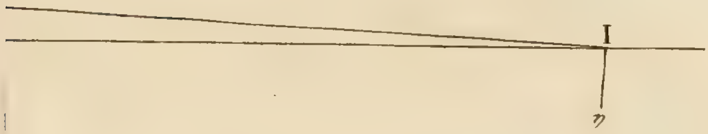


Fig. 2.

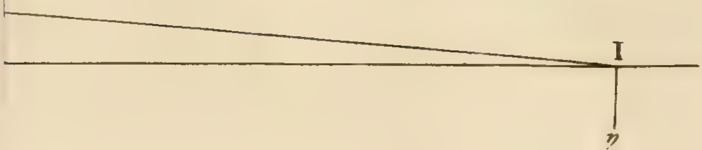


Fig. 3.

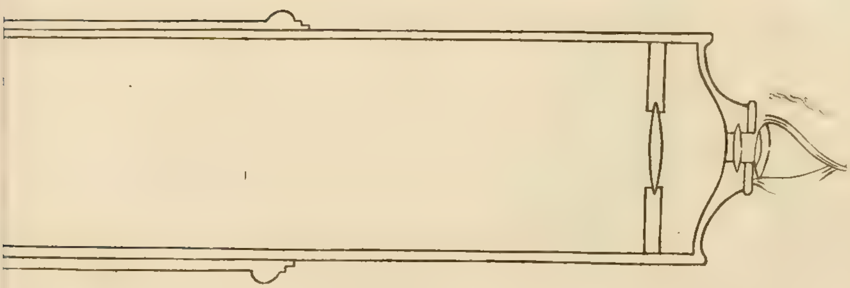


Fig. 4.

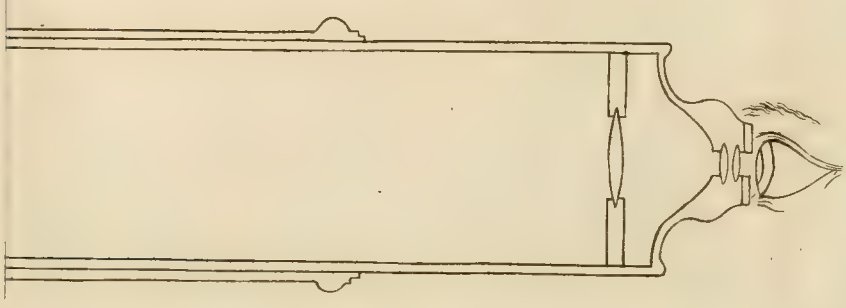


Fig. 1

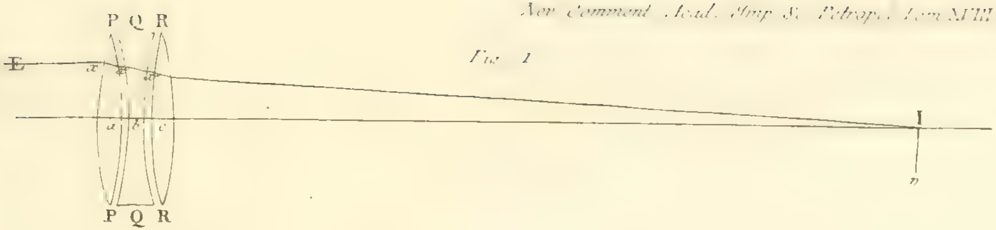


Fig. 2.

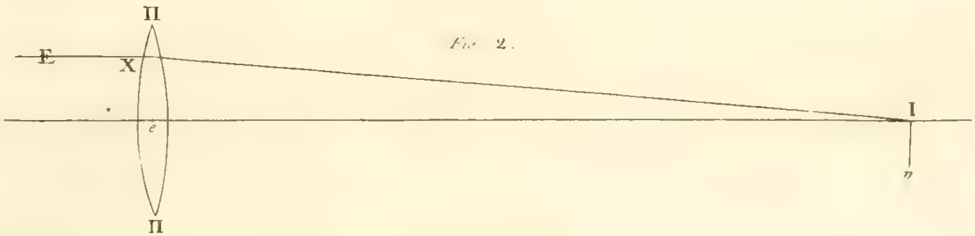


Fig. 3.

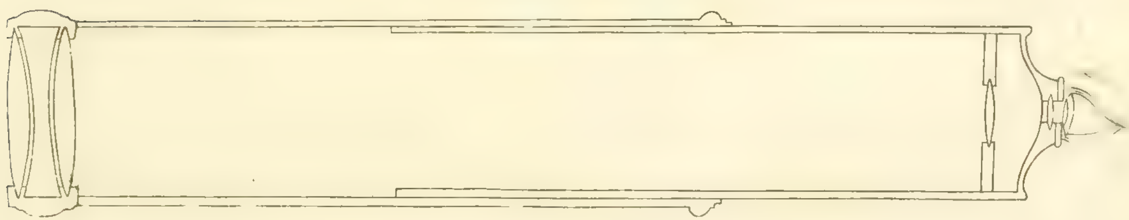


Fig. 4

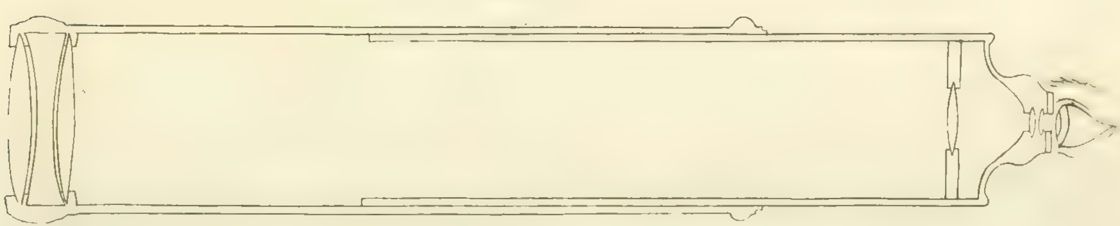




Fig. 3.



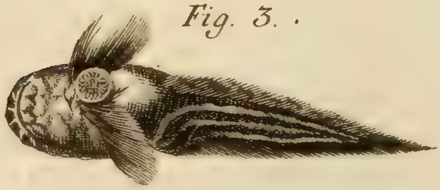


Fig 1.

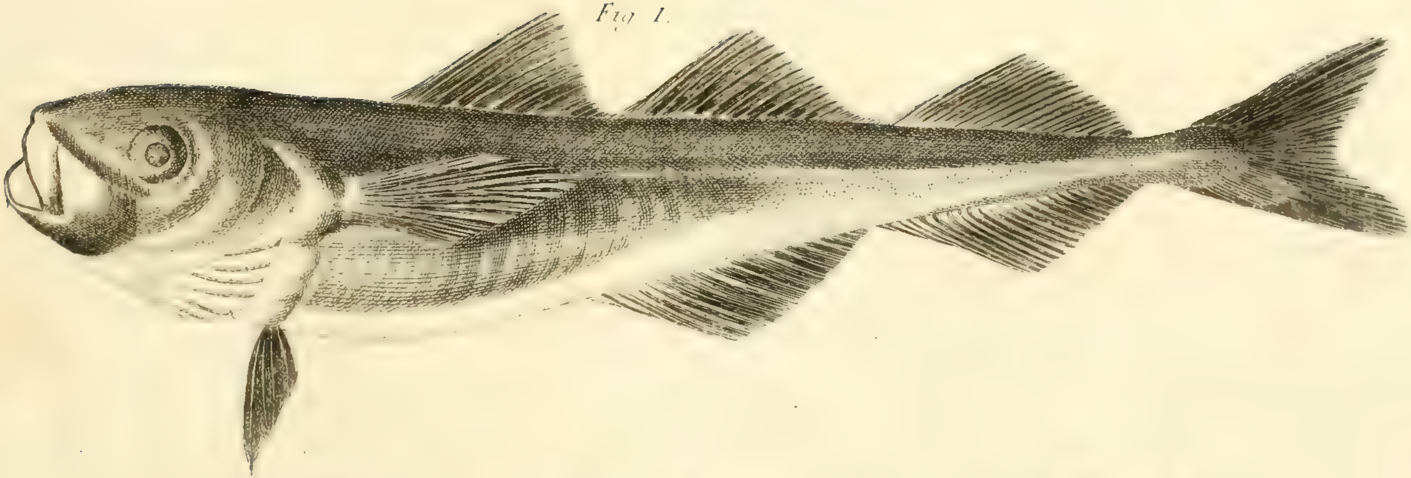




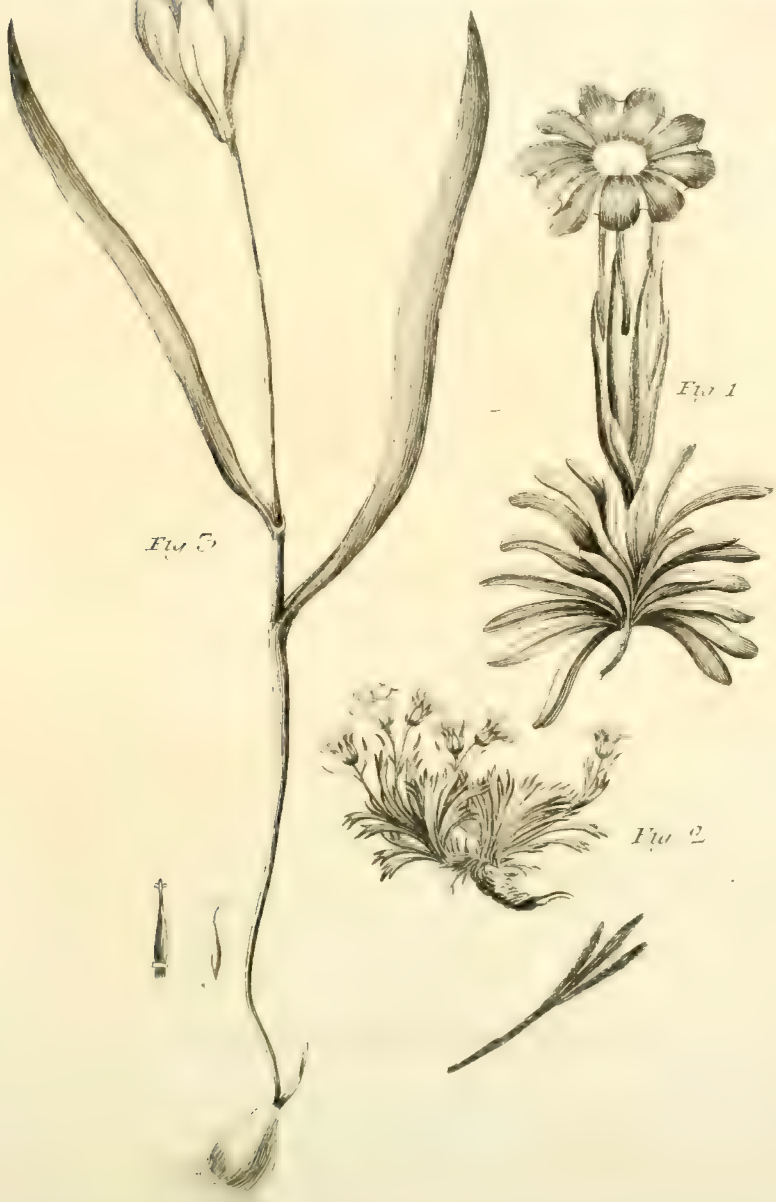
Fig 2.



Fig 3.




Fig. 1
Fig. 2
Fig 3


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3



1.

Fig. 2.


Fig. 1.
Fig. 2.

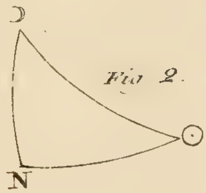
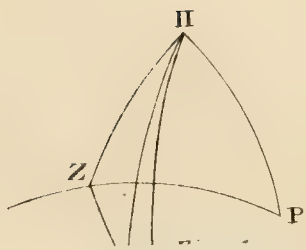


Fig. 2.



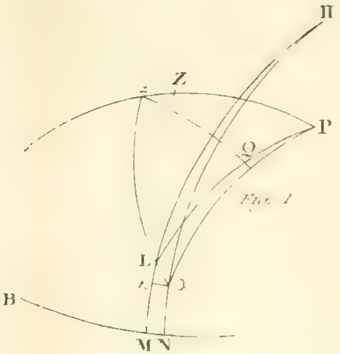


Fig. 1

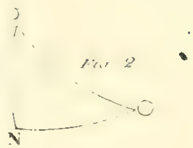


Fig. 2

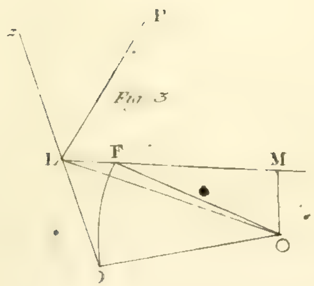


Fig. 3



Fig. 4

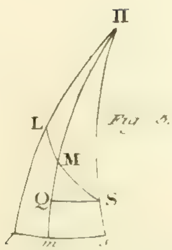


Fig. 5

AMNH LIBRARY
100125052